

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES: ELEMENTOS BÁSICOS PARA LA TOMA DE DECISIONES



www.cidepro.org

Miguel Francisco Girón Guerrero
Ely Israel Borja Salinas
Mauricio Federico Ortuño Delgado
Johnny Roddy López Briones

Miguel Francisco Girón Guerrero
Ely Israel Borja Salinas
Mauricio Federico Ortuño Delgado
Johnny Roddy López Briones

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES:
ELEMENTOS BÁSICOS PARA LA
TOMA DE DECISIONES

OPERATIONS RESEARCH:
BASIC ELEMENTS FOR DECISION MAKING

Miguel Francisco Girón Guerrero
Ely Israel Borja Salinas
Mauricio Federico Ortuño Delgado
Johnny Roddy López Briones

Investigación de Operaciones:
Elementos Básicos para la Toma de Decisiones

Operations Research:
Basic Elements for Decision Making



Autores:

Miguel Francisco Girón Guerrero
Facultad Ciencias de la Ingeniería
Universidad Estatal de Milagro
mgirong@unemi.edu.ec
 <https://orcid.org/0000-0003-0268-6993>

Mauricio Federico Ortuño Delgado
Dirección de Internacionalización
y Movilidad Académica
Universidad de Guayaquil
mauricio.ortunod@ug.edu.ec
 <https://orcid.org/0000-0001-6534-1138>

Ely Israel Borja Salinas
Facultad de Ingeniería Química
Facultad de Ciencias Sociales,
Educación Comercial y Derecho
Universidad de Guayaquil
Universidad Estatal de Milagro
eborjas@unemi.edu.ec
ely.borjas@ug.edu.
 <https://orcid.org/0000-0003-1465-9538>

Johnny Roddy Lopez Briones
Facultad Ciencias de la Ingeniería
Universidad Estatal de Milagro
jlopezb@unemi.edu.ec
 <https://orcid.org/0000-0002-6491-8430>

Advertencia: Está prohibido, bajo las sanciones penales vigentes que ninguna parte de este libro puede ser reproducida, grabada en sistemas de almacenamiento o transmitida en forma alguna ni por cualquier procedimiento, ya sea electrónico, mecánico, reprográfico, magnético o cualquier otro sin autorización previa y por escrito del Centro de Investigación y Desarrollo Profesional (CIDEPRO).



Primera Edición, enero del 2020

*Investigación de Operaciones:
Elementos Básicos para
la Toma de Decisiones*

ISBN: 978-9942-823-28-1 (eBook)

ISSN: 2600-5719 (electronic)

<https://doi.org/10.29018/978-9942-823-28-1>

Editado por:

Centro de Investigación y Desarrollo Profesional

© **CIDEPRO Editorial 2020**

Babahoyo, Ecuador

Móvil - (WhatsApp): (+593) 9 8 52-92-824

www.cidepro.org

E-mail: editorial@cidepro.org

Este texto ha sido sometido a un proceso de evaluación por pares externos con base en la normativa editorial de CIDEPRO.

Diseño y diagramación:

CIDEPRO Editorial

Diseño, montaje y producción editorial:

CIDEPRO Editorial

Hecho en Ecuador

Made in Ecuador

ÍNDICE

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS.....	XIX
PRÓLOGO.....	XX
INTRODUCCIÓN.....	XXII

CAPÍTULO 1

LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES	25
Elementos básicos para la toma de decisiones.....	25
Elementos de la investigación de operaciones.....	26
Definición del problema	26
Construcción del modelo	26
Solución del modelo	27
Validez del modelo	27
Evolución	27
Modelos de investigación de operaciones.....	28
Campos de aplicación	29
Metodología de la investigación de operaciones	29
Programación lineal	30
Los modelos matemáticos: ventajas y desventajas	31
Aspectos relevantes de la programación lineal.....	32
Fundamentos	33
Linealidad	33
Divisibilidad.....	33
No negatividad.....	33
Certidumbre	33

Tipos de soluciones.....	34
Presentación de los modelo.....	35
Forma canónica.....	35
Forma estándar.....	35
La solución gráfica.....	35
Metodología.....	36
Ejercicio de aplicación	37
Solución	37
Ejercicio de aplicación.....	40
Solución	41
Ejercicio de aplicación.....	44
Solución	44
Granja agrícola.....	46
Solución	47
Carpintería.....	48
Solución	49
Fabricante de ropa.....	50
Solución	50
Algoritmo de simplex	51
Procedimiento	53
Cronología de la solución	54
Definir el objetivo	54
Definir las variables de decisión	54
Definir las restricciones.....	54

Restricciones	54
Capacidad.....	54
Mercado	55
Entradas.....	55
Calidad	55
Balance de material.....	55
Internas.....	55
Procedimiento para maximización.....	55
Procedimiento para minimización (big m)	56
Ejercicio de aplicación del método big m.....	57
Ejercicio de aplicación	60
Productos varios.....	60
Solución	60
Ejercicio de aplicación	62
Productos alimenticios	62
Solución	62
Ejercicio de aplicación	67
Empresa farmacéutica.....	67
Solución	68
Ejercicio de aplicación	70
Taller industrial	70
Productos de madera S.A.....	72
Solución	73
Manteles de mesa.....	75

Granja agrícola.....	77
Solución	78
Carpintería.....	79
Solución	80
Fabricante de ropa.....	81
Solución	81
Teoría de la dualidad.....	82
¿Para qué sirve la dualidad?.....	83
Ejercicios de aplicación	83
Ejercicio #1	83
Solución	83
Ejercicio #2	84
Solución	84
Ejercicio # 3	87
Solución	88
Ejercicio #4	92
Solución	92
Análisis de sensibilidad.....	93
Ejercicio de aplicación: mesas de madera	94
Solución	95
Tablero inicial	95
Segundo tablero	95
Tercer tablero	96
Conclusión	97

CAPÍTULO 2

EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE Y

LAS ASIGNACIONES.....	99
Balanceo del modelo de transporte	101
Métodos de solución	102
Esquina noroeste	102
Procedimiento	103
Ejercicio de aplicación.....	103
Empacadora de mariscos.....	103
Solución	104
Método de aproximación de Vogel	105
Paso # 1	106
Paso # 2	106
Optimización de la solución.....	107
Paso # 1	107
Paso # 2	107
Paso # 3	107
Ejercicio de aplicación	108
Almidón de maíz modificado.....	108
Solución	109
Método del costo mínimo	111
Procedimiento	112
Paso 1	112
Paso 2	112

Paso 3	112
Ejercicio de aplicación.....	113
Empacadora de mariscos.....	113
Optimización de la solución.....	114
Selección del método	119
El problema de asignación	119
Algoritmo general del método húngaro	122
Ejercicio de aplicación.....	123
Asignación de personas.....	123
Solución	124
Fase # 1	124
Fase # 2	125
Ejercicios propuestos	126
Asignación de vendedores	126

CAPÍTULO 3

PUNTO DE EQUILIBRIO Y TEORÍA DE

INVENTARIOS	128
Procedimiento de cálculo.....	128
Definir costos	128
Clasificación de los costos	129
Costo variable unitario.....	129
Metodología de cálculo.....	129
Ingreso en el punto de equilibrio	130
Ejercicio de aplicación.....	132

Comerciante	132
Solución	132
Ejercicio de aplicación.....	133
Comprar o fabricar.....	133
Solución	133
Ejercicio de aplicación.....	134
Industria automotriz.....	134
Ejercicios de aplicación	134
Punto de equilibrio – método gráfico.....	134
Ejercicio de aplicación.....	136
Camisería	136
Solución	136
Molienda de cacao	137
Solución	137
Punto de equilibrio para varios productos	137
Ejercicio de aplicación para varios productos	138
Modelo general de inventario	140
Tipos de inventarios	142
Inventario de Materia Prima (M.P.)	142
Inventario de Productos en Proceso (P.P.).....	143
Inventario de Productos Terminados (P.T.).....	143
Inventario de reserva.....	143
Inventario en tránsito	143
La gestión de inventarios y los costos.....	144

Costos de inventarios	144
Costo del Ítem	144
Costo de colocación del pedido	144
Costos de mantenimiento	145
Costos de agotamiento	145
Modelos de inventarios	145
Modelos determinísticos	146
Política de inventarios	146
Modelos estáticos del lote económico de compras	147
Sistema de planeación “MRP”	148
La demanda y sus características	149
Demanda dependiente	149
Demanda independiente	149
El sistema de control ABC	150
Ejercicio de aplicación	152
Criterios de la curva ABC	152
Lote económico de compras	154
Solución	156
Ejercicio de aplicación	161
Lote económico de producción	161
Solución	162
Ejercicio de aplicación	163
Requerimiento semanal	163
Solución	164

Ejercicio de aplicación.....	165
Árbol del producto	165
Solución	167
Producto	167
Elementos.....	167
Pinturas para exteriores.....	169
Solución	170
Serie económica de fabricación	170
Solución	170
Corridas por año.....	170
¿Suministro actual o propuesto?	170
Solución	171
Situación propuesta.....	171
Conclusión	172
Mecanizado industrial.....	172
Solución	172
Comercializadora de llantas.....	173
Solución	173
Inventario de seguridad.....	174

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA PERT – CPM	176
Las actividades del proyecto.....	176
Diferencias entre PERT y CPM	177
Tiempo optimista	177

Tiempo más probable.....	177
Tiempo pesimista	178
Tiempo esperado	178
¿Qué significa «ruta crítica»?.....	179
Ejercicio de aplicación.....	180
Solución	181
Ejercicio de aplicación.....	182
Control de inventarios.....	182
Solución	183
Ejercicio de aplicación.....	185
Solución	186
Cálculo de la red	187
Procedimiento para cálculo de TL (Tiempo lo más tardío posible para completar un evento)	189
Ejercicio de aplicación.....	190
Proyecto	190
Solución	190
Cálculo de la duración del proyecto.....	191
Solución	192

CAPÍTULO 5

RENTABILIDAD DE LAS INVERSIONES	195
Introducción	195
Metodología	196
Valor actual neto	197

Tasa interna de retorno (TIR)	199
Adición del valor de salvamento.....	201
Inflación	201
Tipos de inflación.....	202
Devaluación	202
Ejercicios de aplicación	204
El eterno dilema: ¿comprar o alquilar?	204
Solución	205
Manutención	206
Solución	207
Plataforma para transporte de carga.....	208
Solución	210
Alternativa de reparación.....	210
Alternativa de alquiler.....	211
Alternativa de compra.....	212
Costos de operación	212
Análisis de casos propuestos.....	213
Plásticos industriales Ecuatorianos S.A. (Pliesa).....	213
Análisis de casos propuestos.....	213
Plásticos Industriales Ecuatorianos S.A. (Pliesa)	213
Solución	216
Rentabilidad	216
Punto de equilibrio.....	216
Análisis de la situación propuesta.....	216

Rentabilidad de la propuesta.....	217
Conclusiones	217
Ejercicio de aplicación.....	218
Análisis de inversión.....	218
Solución	219
Análisis sin inflación.....	219
Metodología de aplicación.....	221
Enfoque con inflación	221
Ejercicio de aplicación.....	224
Transporte de pasajeros.....	224
Solución	226
Alternativa de reparación.....	226
Alternativa de alquilar.....	227
Alternativa de comprar	227
Alternativa de costo bus + furgón.....	227
Pasajeros movilizados por año.....	228
Costo unitario equivalente por pasajero transportado.....	228
Conclusión	228
ANEXOS	230
ACERCA DE LOS AUTORES	233
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	237

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

Con mucho cariño dedico este trabajo a mi esposa, a mis hijos y a mis nietos, en él se refleja una colección de experiencias que Dios me ha permitido vivirlas desde mi temprana juventud y que ahora desde la docencia universitaria deseo compartir con mis estudiantes y con los futuros profesionales que apoyarán y asesorarán a las industrias.

Miguel Girón Guerrero

Dedico este libro para quienes me han brindado su sincero apoyo en las dificultades de la vida profesional y universitaria; lo dedico a mi familia y en especial a mis hijos, ellos son quienes me brindan día a día su ayuda, y la inspiración para continuar en este sendero de la vida académica. Agradezco siempre a Dios por sus bendiciones y las fuerzas que me ha dado para culminar con éxito este trabajo.

Johnny López Briones

Dedico esta obra a la juventud universitaria, aquellos interesados en resolver problemas de decisión en la gestión operativa de las empresas industriales. Agradezco la realización de este libro, principalmente a Dios por todo lo bueno que me ha dado, y me permite compartir con otros, A mis padres y hermanos por su incondicional apoyo, a mi Esposa, gracias por tu paciencia, y a mi Hijo Elian, gracias por permitirme soñar que puedo crear un mejor mundo para ti.

Ely Borja Salinas

Dedicado para quién jamás perdió la fe en mí y ahora descansa en paz. Gracias por todo Papá. A mi madre, esposa e hija.

Mauricio Ortuño Delgado

PRÓLOGO

El presente texto busca llegar a los estudiantes de la carrera de Ingeniería Industrial como una herramienta de acceso fácil a la hora de estudiar las diferentes metodologías de toma de decisiones.

Su contenido se expresa en cuatro capítulos de naturaleza dinámica más un quinto de carácter integrador con la finalidad de insertar al estudiante en un ámbito global integrado es decir involucrando las diferentes asignaturas hasta ese momento estudiadas.

El primer capítulo se enfoca en la temática de la optimización mediante la cual el estudiante será capaz de determinar combinaciones óptimas de producción que garanticen maximizar las utilidades o por el contrario minimizar los costos. Enfoca por añadidura el análisis de dualidad y el análisis de sensibilidad.

El segundo se enfoca de lleno a la problemática del transporte a través de la cual el estudiante será capaz de realizar programas de distribución de los productos desde los diferentes orígenes hasta los más variados destinos buscando siempre operar con alta eficiencia y al menor costo total posible. Analiza la temática de asignaciones lo que le permitirá asignar hombres y máquinas a diferentes actividades o tareas en función ya sea de tiempos de ejecución o niveles de rendimiento para la eficiente realización de una tarea en particular.

El tercer capítulo, se enfoca en primer lugar al llamado punto de equilibrio mediante el cual, el estudiante podrá identificar si las

actividades a realizar generarán utilidades o pérdidas a la empresa, es decir encontrar el punto crítico donde los ingresos son iguales a los egresos, es decir, es el punto de actividad en donde no existe utilidad, pero tampoco existe pérdida.

En segundo lugar, el estudiante podrá definir lo que es un inventario en general teniendo bien en claro los elementos que le permitirán ejercer una administración equilibrada en función de mantener balanceados los costos inherentes a dicha gestión.

Finalmente, este capítulo enfoca el sistema de planeación MRP analizando la demanda y sus características.

En el capítulo cuarto, aprenderá las técnicas PERT–CPM que no es otra cosa que un algoritmo basado en la teoría de redes mediante el cual se facilita la planificación de proyectos lo que le permitirá conocer de antemano los tiempos de ejecución y la probabilidad de ocurrencia de los mismos.

Finalmente, el quinto capítulo que trata sobre la rentabilidad de las inversiones, permitirá a los estudiantes incursionar en el ámbito de la casuística el cual consiste en el analizar situaciones específicas aplicando métodos integradores.

INTRODUCCIÓN

La investigación de operaciones (Operations Research) se caracteriza por ser una disciplina orientada hacia la aplicación apropiada de métodos de análisis en apoyo del proceso de toma de decisiones. Dicho de otra forma, lo que persigue la investigación de operaciones es optimizar las tareas de maximización o minimización lo que finalmente nos lleva a utilizar de la mejor manera posible los recursos disponibles para la ejecución de un proceso productivo. La maximización aplica cuando nos referimos beneficios para la empresa y la minimización cuando nos referimos a costos de producción.

La principal técnica es la aplicación de modelos matemáticos. Un modelo como tal implica una función objetivo sujeta a diferentes restricciones limitadas por una condición de no negatividad.

Para la tarea de modelación es muy importante la aplicación de dos pasos fundamentales:

Definición del problema

Implica identificarlo, dimensionarlo, determinar los factores que inciden en el mismo. La eficiencia del modelo planteado dependerá de cuan acertados estuvimos en la definición.

Planteamiento del modelo

El modelo como tal necesariamente debe reflejar la realidad, pero a su vez se busca que sea sencillo. Podemos decir que esta actividad es de orden subjetivo ya que cada especialista aplicará sus conocimientos

en función de sus convicciones, podemos afirmar entonces que es bastante probable la creación de diferentes modelos para intentar dar solución a un problema en particular.

Para concluir diremos que la investigación de operaciones nos permite optimizar el uso de los recursos disponibles para las diferentes actividades de la empresa y en consecuencia incrementar los niveles de rentabilidad.

LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Capítulo 1

LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Elementos básicos para la toma de decisiones

La investigación de operaciones; investigación operativa o investigación operacional (conocida también como teoría de la toma de decisiones o programación matemática) (I.O.) es una rama de las matemáticas que consiste en el uso de modelos matemáticos, estadísticos y algoritmos con objeto de realizar un proceso de toma de decisiones. Frecuentemente trata del estudio de complejos sistemas reales, con la finalidad de mejorar (u optimizar) su funcionamiento.

La investigación de operaciones permite el análisis de la toma de decisiones teniendo en cuenta la escasez de recursos, para determinar cómo se puede optimizar un objetivo definido, como la maximización de los beneficios o la minimización de costos. En pocas palabras podemos definirla como “Proceso de maximización o minimización de la función objetivo sujeta a determinadas restricciones en función de una rígida condición de no negatividad” (Taha, 2004, pág. 3).

Muchas personas clasifican el desarrollo de la programación lineal (PL) entre los avances científicos más importantes de mediados del siglo XX. En la actualidad es una herramienta común que ha ahorrado miles o millones de dólares a muchas compañías y negocios, incluyendo industrias medianas en distintos países del mundo. ¿Cuál es la naturaleza de esta notable herramienta y qué tipo de problemas puede manejar?

Expresado brevemente, el tipo más común de aplicación abarca el problema general de asignar recursos limitados entre actividades competitivas de la mejor manera posible (es decir, en forma óptima).

Este problema de asignación puede surgir cuando deba elegirse el nivel de ciertas actividades que compiten por recursos escasos para realizarlas.

Elementos de la investigación de operaciones

En general reúne un conjunto de ciencias como física; biología; química; economía, etc., las mismas que contribuyen a identificar un problema y en base a modelos matemáticos y estadísticos procurar una solución correcta al problema analizado.

No toma decisiones por sí sola, pero aporta elementos de juicio a quienes analizan para decidir ubicando previamente las condiciones de acuerdo con cada caso. Normalmente la investigación de operaciones utiliza métodos de aproximaciones sucesivas es decir que genera alternativas y opciones para la toma de decisiones orientando la totalidad del proceso a minimizar los riesgos inherentes.

Se podría mencionar como elementos principales los siguientes:

Definición del problema

Significa definir de manera concreta el problema a ser investigado.

Construcción del modelo

Implica un intento de transformar la definición del problema en función de relaciones matemáticas.

Solución del modelo

Es por mucho la más sencilla de todas las fases de IO porque implica el uso de algoritmos de optimización bien definidos. Un aspecto importante de la fase de solución del modelo es el análisis de sensibilidad.

Validez del modelo

Comprueba si el modelo propuesto cumple a cabalidad con su cometido, es decir, ¿Predice adecuadamente el comportamiento del sistema que se estudia? Al principio, el equipo de IO debe estar convencido de que el resultado del modelo no contenga “sorpresas”. En otras palabras, ¿tiene sentido la solución? ¿Los resultados son intuitivamente aceptables? Del lado formal, un método común de comprobar la validez de un modelo es comparar su resultado con resultados históricos. (Taha, 2004, pág. 9)

Aunque los modelos de IO están diseñados para “optimizar” un criterio objetivo específico sujeto a un conjunto de restricciones, la calidad de la solución resultante depende de la exactitud con que el modelo representa el sistema real. (Taha, 2004, pág. 4)

Evolución

En los inicios de la segunda guerra mundial surgieron muchos problemas de carácter militar. Las grandes potencias se preocuparon de dar a estos problemas un enfoque científico buscando optimizar sus acciones para tener resultados esperados utilizando el menor número de recursos en el menor tiempo posible. Es así como surgen los

siguientes elementos los mismos que fueron rápidamente recogidos por las empresas industriales:

<i>Estrategia</i>	<i>(Precisión de un objetivo)</i>
<i>Logística</i>	<i>(Recursos disponibles)</i>
<i>Táctica</i>	<i>(Forma, habilidad y destreza para cumplir los objetivos con los recursos disponibles).</i>

Modelos de investigación de operaciones

Se basan principalmente en técnicas matemáticas y estadísticas, sistemas de ecuaciones, inecuaciones, distribuciones, estadísticas, matrices, probabilidades, etc.

Son modelos en los cuales algunas variables representan las decisiones a tomar. Se trata de representar la realidad en un modelo matemático (Carro, 2009, pág. 65).

En forma general, el resultado de un modelo estará en función de los siguientes elementos:

- Identificación exacta del problema.
- Definición exacta de los objetivos.
- Condiciones del modelo
- Metodología a emplearse
- Ejecución y control
- Evaluaciones y soluciones.

Campos de aplicación

Desde la aplicación en áreas militares, en forma sucesiva los métodos operacionales han ido encontrando aplicaciones prácticas en varios sectores como la industria, agricultura, construcción, transporte, banca, etc.

Desde una óptica industrial, es un valioso instrumento para resolver problemas relacionados con: producción, inventarios, distribución, selección y renovación de equipos, problemas de espera, administración, gerencia, inversiones, etc. (Taha, 2004, pág. 6)

Resumiendo, podemos decir que las actividades han ido más allá de las aplicaciones militares e industriales e incluyeron centros médicos, instituciones financieras, bibliotecas, planeación urbana, sistemas de transporte y sistemas de comercialización.

Metodología de la investigación de operaciones

Los métodos más utilizados son: cálculo matricial; sistemas de inecuaciones; estadística descriptiva e inferencial; programación lineal; modelos de transporte; teorías de colas; métodos Gantt, PERT–CPM; probabilidades, etc.

El planteamiento de los problemas organizacionales, por lo general, comienza con los métodos cualitativos; es decir, revisa todas las cualidades o características, hasta un punto en donde después se pueden usar los métodos cuantitativos, que llevan a obtener modelos que permiten tomar decisiones con mayor grado de confiabilidad. (Aquino Córdova, 2012, pág. 15)

Programación lineal

Se entiende por programación lineal al conjunto de técnicas matemáticas que pretenden optimizar es decir maximizar o minimizar una función objetivo basada en una relación de linealidad con diferentes variables sujetas a una serie de restricciones expresadas por inecuaciones lineales. (Carro, 2009, pág. 65)

Se refiere exclusivamente a relaciones (ecuaciones o inecuaciones) de primer grado. A través de ella se puede resolver interesantes casos tales como combinación óptima de mezclas de producción; disposición interna de procesos, maximización del beneficio, minimización del costo; transporte, tiempos de ejecución de un proyecto. Teoría de administración de inventarios, etc.

Es un método sistemático y matemático de enfocar determinado problema para lograr una solución óptima o la mejor posible empleando una ecuación objetivo (propósito del problema), un conjunto de restricciones lineales y una condición de no negatividad. Utiliza dos métodos de solución: el método gráfico y el método del algoritmo de simplex. El método gráfico se aplica únicamente para resolver problemas de programación lineal de hasta dos variables.

La programación lineal o matemática es empleada en muchas organizaciones debido a la facilidad de formulación y solución de numerosos problemas organizacionales, arrojando siempre el mejor resultado de varios disponibles. Puede definirse como la técnica

matemática para determinar la mejor asignación de los recursos limitados de la empresa. En la programación lineal, se emplean algoritmos matemáticos, creados a partir de ecuaciones lineales, en donde se busca la mejor asignación de los recursos limitados de la empresa. El término linealidad representa una relación entre más de una variable, que son directas y proporcionales; por ejemplo, un aumento del 10% de mano de obra, causará el mismo porcentaje en el aumento de la producción.

El objetivo básico de la programación lineal es interpretar problemas en sistemas complejos y resolverlos empleando modelos con ecuaciones lineales que permitan encontrar la solución óptima, con la finalidad de hacer más eficiente el recurso disponible en una organización. (Aquino Córdova, 2012, pág. 23)

Los modelos matemáticos: ventajas y desventajas

Ventajas

- Requieren menos tiempo y es más económico que experimentar con el objeto o la situación real.
- Permiten una identificación rápida de las expectativas esperadas.
- Reducen los riesgos asociados con la experimentación real.

Desventajas

Se pierde información (que puede ser relevante) del fenómeno que se está estudiando.

Las diferentes interpretaciones de la información, pueden ocasionar resultados que estén lejos de la realidad.

La recolección de datos puede ser muy costosa y complicada.

Sensibilidad ante errores de medición; a veces pequeñas variaciones en los datos ocasionan que se tengan resultados opuestos.

Aspectos relevantes de la programación lineal

Para el caso de maximizar tenemos:

$$\text{F.O Max.} \quad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots C_nX_n$$

$$\begin{aligned} \text{S.A.} \quad & a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ & a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}X_n \leq b_2 \\ & a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}X_n \leq b_n \\ & X_1, X_2, \dots\dots X_n \geq 0 \end{aligned}$$

Para el caso de minimizar tenemos:

$$\text{F.O Min.} \quad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots C_nX_n$$

$$\begin{aligned} \text{S.a.} \quad & a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n \geq b_1 \\ & a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}X_n \geq b_2 \\ & a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}X_n \geq b_n \\ & X_1, X_2, \dots\dots X_n \geq 0 \end{aligned}$$

F.O. Función objetivo a maximizar o minimizar.

S.a. Sujeto a (restricciones del modelo).

Fundamentos

Conforme a lo expuesto en la sección anterior se puede decir que la programación lineal se ocupa del estudio de la optimización (maximización o minimización) de una función lineal de varias variables, la cual está sujeta por un conjunto de inecuaciones lineales de varias variables. A la función que se debe optimizar se le llama Función Objetiva mientras que a las inecuaciones se les llama Restricciones o Limitaciones. (Rincón Abril, 2001, pág. 17)

Se basa en los cuatro supuestos siguientes:

Linealidad

Tanto la función objetivo como las restricciones deben ser funciones lineales de X_j . Implica que el uso de los recursos sea proporcional es decir que, si producir una mesa lleva dos horas, producir dos mesas llevará cuatro.

Divisibilidad

Las variables X pueden tomar valores continuos.

No negatividad

Las variables de decisión deben asumir valores no negativos.

Certidumbre

Todas las constantes tales como C_j ; A_{ij} ; b_i deben tener valores definidos. Si estos valores fueran probabilísticos deberán emplearse técnicas especiales de programación estocástica o probabilística.

Tipos de soluciones

- Óptima finita única

Se llama óptima por ser la mejor de las soluciones factibles. Se llama finita porque tanto las variables como la función objetivo toman valores finitos. Se llama única porque solo hay una combinación de valores para optimizar la función objetivo cumpliendo con todas las restricciones impuestas.

- Óptima finita múltiple

Se trata de un caso poco frecuente. Generalmente aparece en los casos que la función objetivo sea paralela a una de las restricciones o a una combinación lineal de las mismas.

- Ilimitada

Puede presentarse debido a omisión de una o más restricciones; falla en el planteamiento o errores en los datos de entrada.

- No factible

Es cuando se puede encontrar una o más soluciones que cumplen con las restricciones estructurales, pero no con la condición de no negatividad.

- Inexistente

Se presenta cuando no podemos encontrar modelos que cumplan con las restricciones.

Tanto la solución ilimitada como la solución no factible y la inexistente no deben aparecer en un problema real de programación lineal correctamente planteado.

Presentación de los modelo

Forma canónica

Se dice que un modelo de maximización está escrito en forma canónica si todas las variables son no negativas y todas las restricciones son del tipo $\leq$.

Se dice que un modelo de minimización está escrito en forma canónica si todas las variables son no negativas y todas las restricciones son del tipo $\geq$.

Forma estándar

Se dice que el modelo está en forma estándar una vez que a la forma canónica se han agregado las variables de holgura, exceso, artificiales, etc. Según corresponda en función de maximizar o minimizar el modelo.

La solución gráfica

El método gráfico como su nombre lo indica se orienta a graficar las restricciones en el plano cartesiano o plano bidimensional, mediante este método solo se resuelven problemas con máximo dos variables. Por su naturaleza propia, el mecanismo de solución es de lo más sencillo y muy fácil de interpretar.

El método está basado en la graficación en el plano cartesiano X_1 vs X_2 del conjunto de restricciones para el modelo propuesto y en la selección del punto que optimiza entre todos los factibles.

El método considera que la solución óptima al programa lineal debe coincidir con uno de los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles; por tanto, en los programas de dos variables de decisión, será necesariamente uno de los vértices de la región solución. Entonces, para encontrar la solución óptima basta reemplazar cada uno de los vértices en la función objetivo y observar cuál genera el mayor valor en el caso de maximizar o el menor valor en el caso de minimizar.

Metodología

- Enfocar apropiadamente el texto del problema.
- Establecer el modelo matemático de la función objetivo que nos permita llegar a una maximización o minimización según corresponda.
- Establecer las inecuaciones que representan las restricciones del problema.
- Definir la condición de no negatividad de la solución.
- Convertir las inecuaciones en ecuaciones y representarlas gráficamente.
- Calcular las coordenadas de las intersecciones de las restricciones y determinar la región de solución básica factible.
- Interrelacionar las coordenadas de los diferentes vértices con la función objetivo e identificar la solución óptima.

La solución óptima será aquella que proporcione el valor más alto en el caso de maximización o el valor más bajo en el caso de minimización. Un detalle por demás importante es verificar que los valores obtenidos

cumplan con cada una de las restricciones, así como con la condición de no negatividad.

Dicho de una forma sencilla, es el conjunto de valores para las variables: X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_n ; que satisfacen el criterio de factibilidad y optimizan la función objetiva del modelo matemático de programación lineal.

Se observará posteriormente que la metodología de búsqueda de la solución óptima se basa en el análisis matemático del conjunto de soluciones factibles para el programa lineal. (RINCÓN ABRIL, 2001, pág. 19)

Ejercicio de aplicación

Productos varios

Una empresa fabrica dos productos A y B. El primero requiere 7 kilos de materia prima; 2 horas hombre de mano de obra y 4.5 horas máquina. El segundo requiere 3 kilos de materia prima; 3 horas hombre de mano de obra y 4 horas máquina. Se dispone de 21 kilos de MP; 12 horas de M de O. y 18 horas máquina. Hallar la combinación óptima que maximice la utilidad sabiendo que el producto A genera US\$15 de ganancia y el producto B US\$11 de ganancia por unidad.

Solución

La información proporcionada la podemos resumir en el siguiente cuadro:

REQUERIMIENTOS POR UNIDAD

Materia Prima (Kg)	Horas de Mano de obra	Horas - Máquina	Utilidad (US\$)	
A	7	2	4.5	15
B	3	3	4	11
Disponible	21	12	18	

Lo primero que haremos es asumir que X_1 representa el número de unidades a producir del ítem A y X_2 el número de unidades a producir del ítem B.

Basados en esto, procedemos ahora a plantear el modelo matemático que nos permitirá luego llegar a la solución óptima.

$$\text{F.O. Max. } Z = 15X_1 + 11X_2$$

$$\text{S.a. } 7X_1 + 3X_2 \leq 21$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$4.5X_1 + 4X_2 \leq 18$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

El siguiente paso será el trazado de la recta correspondiente a cada una de las restricciones para lo cual primero debemos convertir las inecuaciones en ecuaciones y en base ello tendremos:

$$7X_1 + 3X_2 = 21 \quad (\#1)$$

$$2X_1 + 3X_2 = 12 \quad (\#2)$$

$$4.5X_1 + 4X_2 = 18 \quad (\#3)$$

De donde:

Para la ecuación # 1:

Asumiendo $X_1 = 0$, tenemos $X_2 = 7$

Asumiendo $X_2 = 0$, tenemos $X_1 = 3$

Para la ecuación # 2

Asumiendo $X_1 = 0$, tenemos $X_2 = 4$

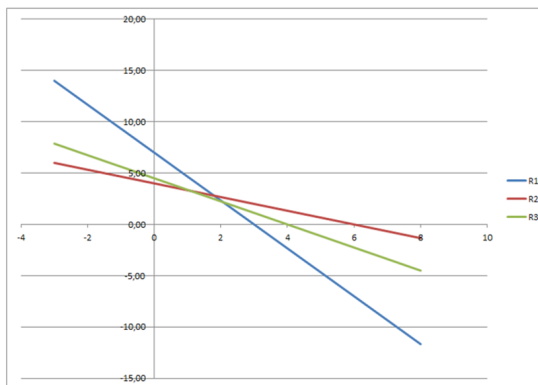
Asumiendo $X_2 = 0$, tenemos $X_1 = 6$

Para la ecuación # 3

Asumiendo $X_1 = 0$, tenemos $X_2 = 4.5$

Asumiendo $X_2 = 0$, tenemos $X_1 = 4$

Estas coordenadas nos permiten graficar las tres ecuaciones que reflejan el comportamiento de las restricciones dadas con lo queda a la vista el poliedro que conforma la región básica factible en uno de cuyos vértices estará la solución óptima.



Elaborado por: los autores

La solución óptima se encuentra reemplazando cada uno de los vértices del poliedro en la función objetiva y tomar el mayor valor para el caso de maximización el menor valor para el caso de minimización.

Es importante señalar que previamente se deben determinar las coordenadas del o de los vértices faltantes para lo cual se utilizan los métodos conocidos de resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Las cantidades a producir para este caso por cada ítem en el punto de solución óptima estarán determinadas por el punto cuyas coordenadas proporcionen el mayor valor.

Numéricamente se lo expresa de la siguiente manera:

	<u>X_1</u>	<u>X_2</u>	<u>F.O.</u>
1	0	4	44
2	0.92	3.4	51.2
3	2.07	2.17	54.92
4	3	0	45

Para el presente ejercicio, como estamos maximizando (la utilidad), la solución óptima es producir: 2.07 unidades de X_1 = y 2.17 unidades de X_2 . Esta es la combinación óptima y por ende la que genera la utilidad máxima que es de 54.92 um. La totalidad de las restricciones quedan cubiertas a entera satisfacción.

Ejercicio de aplicación

Productos alimenticios

Se requiere fabricar dos tipos de alimento A y B que en conjunto reúnan por lo menos 20 gramos de calorías y 30 gramos de proteína. El

producto A deberá contener 2 g de calorías y 1 g de proteína mientras que el producto B deberá contener 3 g de calorías y 5 g de proteínas como composición mínima. Determine la combinación óptima para la cual el costo total sea el mínimo posible. El costo unitario de los productos son US\$3 y US\$4 respectivamente.

Solución

En este segundo ejercicio enfocaremos una situación de minimización. Para su solución aplicaremos exactamente el mismo procedimiento comenzando con el levantamiento de un cuadro resumen en los siguientes términos:

REQUERIMIENTOS			
Calorías (gr)	Proteínas (gr)	Costo de producción unitario (US\$)	
A	2	1	3
B	3	5	4
Disponible	20	30	

El procedimiento se inicia asumiendo X_1 para representar el número de unidades a producir del ítem A y X_2 el número de unidades a producir del ítem B, entonces:

$$\text{F.O. Min. } 3X_1 + 4X_2$$

$$\text{S.a. } 2X_1 + 3X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 5X_2 \geq 30$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

Note que se ha cambiado el signo de la desigualdad en virtud de tratarse de un caso de minimización.

El siguiente paso será convertir las inecuaciones en ecuaciones y en base ello tendremos que realizar el trazado de la recta correspondiente a cada una de las restricciones con lo cual se obtiene:

$$2X_1 + 3X_2 = 20 \quad (\#1)$$

$$X_1 + 5X_2 = 30 \quad (\#2)$$

De donde:

Para la ecuación # 1:

Asumiendo $X_1 = 0$, tenemos $X_2 = 6.67$

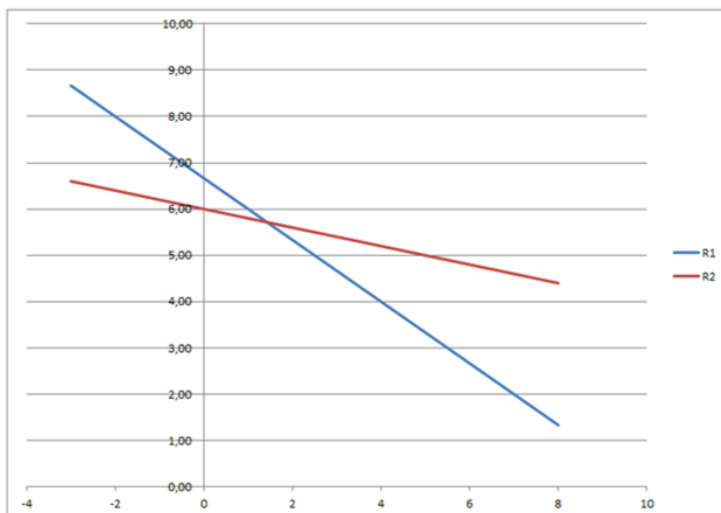
Asumiendo $X_2 = 0$, tenemos $X_1 = 10$

Para la ecuación # 2

Asumiendo $X_1 = 0$, tenemos $X_2 = 6$

Asumiendo $X_2 = 0$, tenemos $X_1 = 30$

Conocidas las coordenadas, procedemos a graficar las dos ecuaciones que reflejan el comportamiento de las restricciones dadas. Queda visible entonces el poliedro que conforma la región básica factible en uno de cuyos vértices estará la solución óptima.



Elaborado por: los autores

Tal como lo vimos en el caso anterior de maximización, la solución óptima se encuentra reemplazando las coordenadas de cada uno de los vértices del poliedro en la función objetiva y tomar el menor valor para el caso de minimización. Es importante señalar que previamente se deben determinar las coordenadas de los vértices faltantes para lo cual se utilizan los métodos de resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado. Las cantidades a producir por cada ítem en el punto de solución óptima serán justamente las coordenadas que generen el menos valor.

La solución a este problema es:

	X1	X2	F.O.
1	0	6.67	26.68
2	1.5	5.7	27.3
3	30	0	90

La solución a adoptar en este caso de minimización es $X_1 = 0$ y $X_2 = 6.67$ unidades con lo cual el costo total de producción es el mínimo. La solución encontrada cumple además con ambas restricciones.

Ejercicio de aplicación

Taller industrial

En un taller se disponen de dos máquinas diferentes para la elaboración de un solo producto. La máquina # 1 puede producir 20 y la máquina # 2 puede producir 15 lb/hr.

Se requieren 2 H-h por cada hora de operación de la máquina 1 mientras que en la máquina 2 se requieren 3 H-h.

En total se deben utilizar al menos 15 H-h como tiempo normal. El costo de operación de una hora de máquina es de US\$25 para la máquina 1 y US\$30 para la máquina 2. Ambas máquinas deben elaborar en conjunto al menos 100 lbs de producto. ¿Cuál será la combinación óptima que minimice el costo total?.

Solución

Comencemos elaborando el cuadro resumen:

	Costo / Hora	Requer. H - h	Capac. De Produc.
Maq. # 1	25	2	20
Maq. # 2	30	3	15
Necesario		15	100

Estamos nuevamente ante un caso de minimización y, por tanto:

$$\text{F.O. Min. } Z = 25X_1 + 30X_2$$

$$\text{S.a. } 20X_1 + 15X_2 \geq 100$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 15$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Corresponde ahora convertir las inecuaciones en ecuaciones con lo cual tenemos:

$$\text{F.O. Min. } Z = 25X_1 + 30X_2$$

$$\text{S.a. } 20X_1 + 15X_2 = 100 \quad (1)$$

$$2X_1 + 3X_2 = 15 \quad (2)$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

El siguiente paso es determinar los pares coordenados para proceder a realizar los gráficos.

Para ecuación (1)

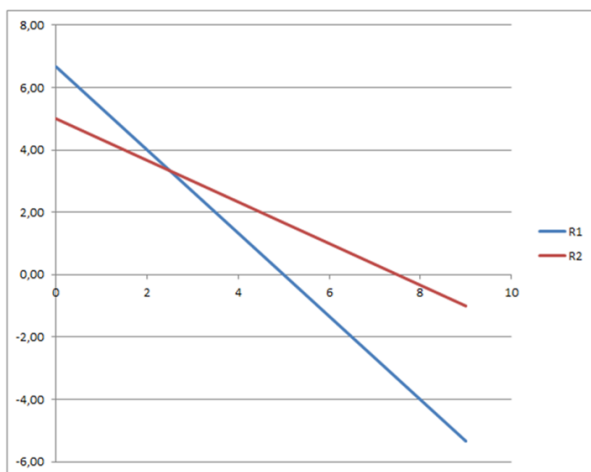
$$X_1 \quad 0 \quad 5$$

$$X_2 \quad 6,67 \quad 0$$

Para ecuación (2)

$$0 \quad 7,5$$

$$5 \quad 0$$



Elaborado por: los autores

Para calcular las coordenadas del punto de corte de las dos rectas hacemos uso de cualquier método de resolución de sistemas de ecuaciones con una incógnita.

$$20X_1 + 15X_2 = 100 \quad (1)$$

$$2X_1 + 3X_2 = 15 \quad (2)$$

La ecuación (2) la multiplicamos por -10 para reducir y obtener.

$$-15X_2 = -50$$

Esto significa $X_2 = 3,33$

Finalmente llegamos a $X_1 = 2,5$

Una vez conocidos estos valores elaboramos la siguiente tabla:

<u>X_1</u>	<u>X_2</u>	<u>Z</u>
0	6,67	200,1
2,5	3,33	162,4
7,5	0	187,5

Este último cuadro nos dice que el costo mínimo lo genera la intersección de las dos rectas. Por tanto, la respuesta es producir 2,5 unidades de X_1 y 3,33 unidades de X_2 .

Téngase presente que Z representa a la función objetivo es decir el modelo a minimizar.

Granja agrícola

Una granja agrícola desea criar conejos y pollos para lo cual disponen de 180 horas por mes. En su bodega solo pueden almacenar un máximo de 1000 kilos de alimento y sabemos que un conejo requiere 20 kilos

al mes y un pollo 10. Un conejo requiere 3 horas mensuales de cuidado y un pollo 2. El conejo da un beneficio de UM500 y el pollo UM300.

Determine la combinación de elementos que optimice el beneficio.

Solución

Sea X_1 = variable que representa el # conejos a criar.

Sea X_2 = variable que representa el # pollos a criar.

Comencemos elaborando el cuadro resumen:

	<u>Conejos</u>	<u>Pollos</u>	<u>Disponible</u>
Alimento/Mo	20	10	1000
Ho/Mo cuidado	3	2	180
Utilidad	500	300	

$$\text{F.O. Max. } Z = 500 X_1 + 300 X_2$$

$$\text{Sa. } 20X_1 + 10 X_2 \leq 1000$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 180$$

$$X_j \geq 0$$

Procedemos a realizar el proceso de graficación y seguidamente a calcular las coordenadas del punto de corte de las rectas y tenemos $X_1 = 20$ y $X_2 = 60$.

Estos valores permitirán obtener una utilidad máxima de US\$28.000.



Las coordenadas en mención se calculan para el presente caso, mediante la aplicación de un sistema de ecuaciones el cual da como resultado $X_1 = 20$ y $X_2 = 60$ con lo cual, la utilidad máxima será US\$28.000.

El valor de la utilidad máxima lo obtenemos de la siguiente manera:

X1	X2	F.O.
0	90	$0 + 27.000 = 27.000$
50	0	$25.000 + 0 = 25.000$
20	60	$10.000 + 18.000 = 28.000$

Carpintería

Un fabricante produce sillas y mesas para lo cual requiere las áreas de montaje y pintura. Producir una silla requiere una hora de montaje y dos de pintura. La mesa en cambio requiere tres y una horas en su orden. La sección de montaje solo puede trabajar nueve horas al día

mientras que la de pintura ocho. El beneficio de cada mesa es el doble de la silla. Determine el número de mesas y sillas a producir para maximizar el beneficio.

Solución

Resumen

	Sillas	Mesas	Requerimiento
Montaje	1	3	9
Pintura	2	1	8
Utilidad	1	2	

$$\text{F.O. Max. } X_1 + 2X_2$$

$$\text{Sa. } X_1 + 3X_2 \leq 9$$

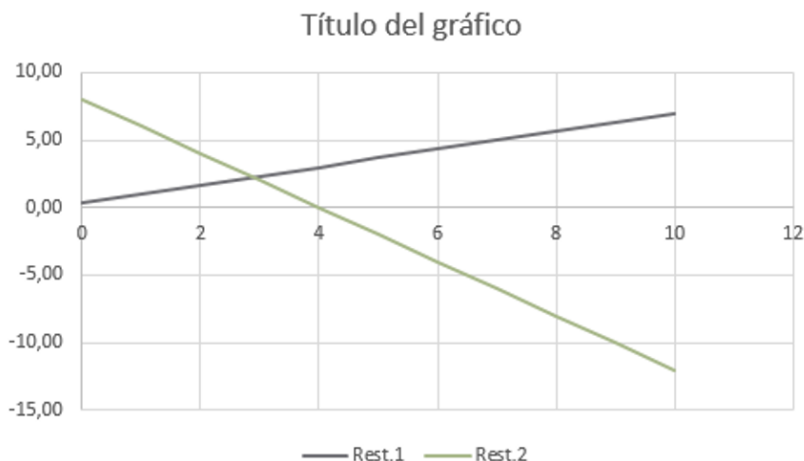
$$2X_1 + X_2 \leq 8$$

$$X_j \geq 0$$

Aplicando la metodología gráfica y calculando las coordenadas del punto de corte tenemos $X_1 = 3$ y $X_2 = 2$ con lo cual la utilidad máxima es de 7.

Mediante la resolución de un sistema de ecuaciones encontramos que el punto de corte de las rectas tiene por coordenadas (3,2). Con esto, el cálculo de la utilidad máxima queda:

<u>X1</u>	<u>X2</u>	<u>F.O.</u>
0	3	$0 + 2(3) = 6$
3	2	$3 + 2(2) = 7$
4	0	$4 + 0 = 4$



Fabricante de ropa

Un fabricante de ropas recibe un pedido abierto por pantalones y chaquetas de un prestigioso almacén de la localidad.

El fabricante dispone de 750 m de tejido de algodón y 1000 m de tejido de poliéster. Cada pantalón requiere 1 m de tejido de algodón y 2 m de tejido de poliéster. Cada chaqueta requiere 1,5 m de tejido de algodón y 1 m de tejido de poliéster. El precio unitario de venta es de US\$50 para cada pantalón y US\$40 para cada chaqueta. Determine la combinación apropiada que maximice el ingreso por ventas.

Solución

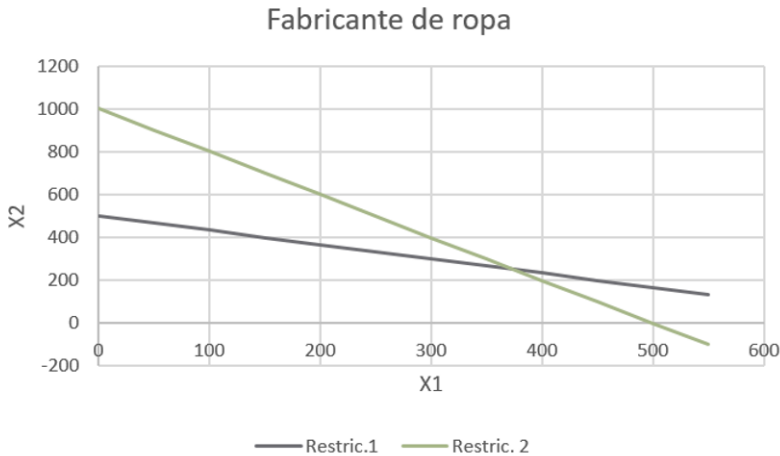
Sea X_1 la variable que representa el número de pantalones a producir.
 Sea X_2 la variable que representa el número de chaquetas a producir.

$$\text{F.O. Min. } Z = 50X_1 + 40X_2$$

$$\text{S.a.} \quad X_1 + 1,5X_2 \leq 750$$

$$2X_1 + X_2 \leq 1000$$

$$X_j \geq 0$$



La respuesta es $X_1 = 375$

$X_2 = 250$

Algoritmo de simplex

El algoritmo del simplex busca optimizar la solución de un problema de programación lineal recorriendo sólo algunos de los vértices del poliedro que representa el conjunto de soluciones factibles.

En cada iteración, el algoritmo se desplaza de un vértice a otro de forma que el valor de la función objetivo mejore con el desplazamiento, esto es, que aumente si el problema es de maximización, o disminuya si el problema es de minimización.

La optimización puede dar lugar a cuatro posibles resultados:

- Alcanzar un óptimo único.
- Alcanzar un óptimo que no es único (soluciones alternativas o múltiples).

- Concluir que el problema es no factible, esto es, que no existe ninguna solución que satisfaga simultáneamente todas las restricciones del problema.
- Concluir que el problema es no acotado, es decir, que el valor de la función objetivo en el óptimo es tan grande como se desee si el problema es de maximización, o tan pequeño como se quiera si el problema es de minimización.

Podemos resumir en el siguiente concepto: Una solución no acotada (espacio infinito de soluciones) se da cuando en algunos modelos de programación lineal los valores de las variables pueden aumentar en forma indefinida sin violar alguna de las restricciones, y eso significa que el espacio de soluciones es no acotado al menos en una dirección.

El método simplex se utiliza mayormente para problemas lineales en los que intervienen múltiples variables, los cuales no pueden ser resueltos de manera gráfica pues se haría demasiado complejo. Para ello, este método hace uso de la propiedad de que la solución óptima de un problema de Programación Lineal se encuentra en un vértice o frontera del dominio de puntos factibles (esto último en casos muy especiales), por lo cual, la búsqueda secuencial del algoritmo se basa en la evaluación progresiva de estos vértices hasta encontrar el óptimo. Cabe destacar que, para aplicar el Método Simplex a un modelo lineal, este debe estar en un formato especial conocido como formato estándar.

Para la solución de un problema de programación lineal usando el método SIMPLEX el planteamiento inicial (desigualdades) toma el nombre de forma canónica y una vez transformadas las inecuaciones a igualdades se denomina forma estándar.

Procedimiento

Metodología para obtener el modelo

Aunque existen varias técnicas para lograr el modelo matemático de cada problema en particular, se recomienda la siguiente para llegar al propósito.

- Analizar el problema de decisión.- Describir la estructura de los valores que el modelo debe calcular, junto con las limitaciones y el objeto esencial.
- Describir las variables de decisión.- Valores o respuestas que optimizan la función objetiva y que se calcularán mediante la solución del modelo matemático.
- Establecer la función objetiva.- Esto es, construir el modelo que cuantifica el objetivo del problema y definir el tipo de optimización.
- Establecer las limitaciones.- Determinar aquellos ítems (recursos, subprocesos) que resultan ser limitantes en el proceso para el que se elabora el modelo y construir las expresiones que los cuantifican. (RINCÓN ABRIL, 2001)

Cronología de la solución

Definir el objetivo

Consiste en definir un criterio de optimización el cual puede ser maximización o minimización dependiendo del problema que se desee resolver, el mismo que es una función lineal de las diferentes actividades del problema.

Definir las variables de decisión

Son las incógnitas del problema básicamente consisten en los niveles de todas las actividades que pueden llevarse a cabo en el problema a formular, estas pueden ser de tantos tipos diferentes como sea necesario, e incluir tantos subíndices como sea requerido.

Definir las restricciones

Son los diferentes requisitos que debe cumplir cualquier solución para que se pueda llevar a cabo. En cierta manera son las limitantes en los valores de los niveles de las diferentes actividades (variables). Las restricciones más comunes son de seis tipos, las cuales se listan a continuación.

Restricciones

Capacidad

Limitan el valor de las variables debido a la disponibilidad de los recursos tales como horas-hombre, horas-máquina, materiales e insumos, espacio, etc.

Mercado

Surgen de los valores máximos y mínimos en las ventas o el uso del producto o actividad a realizar.

Entradas

Son limitantes debido a la escasa disponibilidad de los recursos a utilizar entre otras materias primas, mano de obra, capital, etc.

Calidad

Son las restricciones que limitan las mezclas de ingredientes, definiendo usualmente la calidad de los artículos a manufacturar.

Balance de material

Estas son las restricciones que definen las salidas de un proceso en función de las cantidades de recursos utilizados, tomando en cuenta generalmente cierto porcentaje de merma o desperdicio.

Internas

Son las que definen a una variable dada, en la formulación interna del problema, un ejemplo tipo es el de inventario.

Procedimiento para maximización

- Plantear el problema de programación lineal en su forma estándar es decir función objetivo, restricciones y condición de no negatividad.
- Transformar las desigualdades en igualdades utilizando para ello las variables de holgura.
- Generar un tablero inicial.

- Evaluar si el tablero inicial corresponde o no la solución óptima observando la fila $C_j - Z_j$ en la cual todos los valores deben ser cero o negativos.
- Si no lo son, determinar la variable entrante (la de mayor valor en la fila $C_j - Z_j$) y la variable saliente (en la columna Θ_j la de menor valor positivo).
- Se continúa con el proceso iterativo hasta encontrar un tablero en el que todos los valores de $C_j - Z_j$ sean cero o negativos.

Procedimiento para minimización (big m)

- Plantear el problema de programación lineal en su forma estándar es decir función objetivo, restricciones y condición de no negatividad.
- Transformar las desigualdades en igualdades utilizando para ello las variables de exceso (equivale a las variables de holgura en el caso de maximización) y artificiales en la medida que corresponda.
- Generar un tablero inicial.
- Evaluar si el tablero inicial corresponde o no la solución óptima observando la fila $C_i - Z_j$. Todos los valores deben ser cero o positivos.
- Si no lo son, determinar la variable entrante (la más negativa en la fila $C_i - Z_j$) y la variable saliente (la de menor valor positivo en la columna Θ_j).
- Se continúa con el proceso iterativo hasta encontrar un tablero en el que todos los valores de $C_i - Z_j$ sean cero o positivos.

Ejercicio de aplicación del método big m

Al aplicar este procedimiento se debe tener muy en cuenta una situación bastante especial que de seguro se presentará.

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\text{F.O. Min } Z = 25X_1 + 30X_2$$

$$\text{S.a.} \quad 20X_1 + 15X_2 \geq 100$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 15$$

$$X_i \geq 0$$

Siendo las desigualdades del tipo $\geq$, debemos restarle al lado izquierdo lo que se conoce como variable de exceso (equivale a la variable de holgura en el proceso de maximización) con lo cual las restricciones cambian a:

$$20X_1 + 15X_2 - X_3 - 0X_4 = 100$$

$$2X_1 + 3X_2 - 0X_3 - X_4 = 15$$

Aquí se nos presenta el siguiente problema. Si en ambas ecuaciones hacemos $X_1 = 0$ y $X_2 = 0$, el resultado a obtener es $X_3 = -100$ y $X_4 = -15$ lo cual va en contra de la condición de no negatividad.

Para eliminar este inconveniente, la solución es agregar a cada restricción una variable artificial en la siguiente forma:

$$20X_1 + 15X_2 - X_3 - 0X_4 + X_5 + 0X_6 = 100$$

$$2X_1 + 3X_2 - 0X_3 - X_4 + 0X_5 + X_6 = 15$$

Estas variables artificiales (X_5 y X_6) deberán ser agregadas a la F.O. pero con un coeficiente por demás grande de tal forma que el mismo

proceso de minimización se encargue de sacarlas del proceso de análisis precisamente por tener un coeficiente de elevado valor.

Con esta explicación, el modelo a optimizar del ejemplo del inicio queda así:

$$\text{F.O. Min } Z = 25X_1 + 30X_2 + 0X_3 + 0X_4 + MX_5 + MX_6$$

$$\text{S.a.} \quad 20X_1 + 15X_2 - X_3 - 0X_4 + X_5 + 0X_6 = 100$$

$$2X_1 + 3X_2 - 0X_3 - X_4 + 0X_5 + X_6 = 15$$

$$X_i \geq 0$$

Tratándose de dos variables como lo es el presente ejemplo, el problema puede ser resuelto tanto por el método gráfico como por el método simplex.

Como se ha establecido, en el tablero inicial, la primera columna contiene las variables artificiales. El cuerpo exceptuando la última columna se completa con los coeficientes de las restricciones. A continuación se aplica el procedimiento ya conocido.

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		
BASE	C _i	25	30	0	0	M	M	b _i	Θ _j
X ₅	M	20	15	-1	0	1	0	100	5
X ₆	M	2	3	0	-1	0	1	15	7,5
Z _j		22M	18M	-M	-M	M	M		
C _i - Z _j		25-22M	30-18M	M	M	0	0		

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		
BASE	C _i	25	30	0	0	M	M	b _i	Θ _j
X ₁	25	1	0,75	-0,05	0	0,05	0	5	6,67
X ₆	M	0	1,5	0,1	-1	-0,1	1	5	3,33
Z _j		25	18.75+1.5M	-1.25+0.1M	-M	1.25-0.1M	M		
C _i - Z _j		0	11.25-1.5M	1.25-0.1M	M	1.1M-1.25	0		

Observando la fila C_i-Z_j en ambos tableros podemos ver que el primero tiene dos valores negativos (X_1 y X_2) lo cual nos obliga a un segundo tablero.

Por su parte en el segundo tablero notamos así mismo dos valores negativos (X_2 y X_3) y esto nos lleva a un tercer tablero.

En ambos casos de los valores negativos se tomará el más negativo y esa será la variable a entrar. La columna recibe el nombre de “columna pivote”.

La variable a salir la encontramos en la columna Θ_j y será aquella que tenga el menor valor positivo. En el primer tablero será X_5 y en el segundo X_6 . Corresponde a la llamada “fila pivote”. El punto de encuentro de ambas (fila y columna) se llama “número pivote”.

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
BASE	C_i	25	30	0	0	M	M	b_i	Θ_j
X_1	25	1	0	-0,1	0,5	0,1	-0,5	2,6	
X_2	30	0	1	0,067	-0,67	-0,067	0,67	3,33	
Z_j		25	30	-0,49	-7,6	0,49	7,6		
$C_i - Z_j$		0	0	0,49	7,6	M-0,49	M-7,6		

La fila pivote de un tablero cualquiera es dividida por el número pivote obteniendo de esta manera la primera fila del nuevo tablero. La ubicación de esta fila en el nuevo tablero corresponderá al mismo sitio que ocupa en el tablero anterior.

Al observar este último tablero vemos que en la fila C_i-Z_j todos los valores son cero o positivos lo cual nos indica que hemos llegado al óptimo. La solución final será producir 2,6 unidades en la máquina A

y 3,3 unidades en la máquina B. Bajo este esquema, el costo total será US\$164,9.

A manera de verificación, debemos probar que las restricciones se cumplen en su totalidad y para ello procedemos de la siguiente manera:
 $20 * (2,6) + 15 * (3,33) = 101,95$ este valor es mayor que 100 tal como indica la restricción.

$2 * (2,6) + 3 * (3,33) = 15,19$ este valor es mayor que el 15 indicado por la restricción.

En conclusión, ambas restricciones se cumplen a cabalidad.

Ejercicio de aplicación

Productos varios

Como se había indicado, el modelo matemático del ejercicio mostrado en la pag. # 12 incluidas las restricciones y la condición de no negatividad quedan definidos así:

$$\text{F.O. Max. } 15X_1 + 11X_2$$

$$\text{S.A. } 7X_1 + 3X_2 \leq 21$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$4.5X_1 + 4X_2 \leq 18$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

Solución

Pasando de la forma canónica a la forma estándar, el modelo se convierte en:

$$\text{F.O. Max. } 15X_1 + 11X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$$

$$\text{S.A. } 7X_1 + 3X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 = 21$$

$$2X_1 + 3X_2 + 0X_3 + X_4 + 0X_5 = 12$$

$$4.5X_1 + 4X_2 + 0X_3 + 0X_4 + X_5 = 18$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

En base a lo enunciado en el modelo matemático se obtiene el primer tablero en los siguientes términos:

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
BASE	Ci	15	11	0	0	0	b _i	Θ _j
X ₃	0	7	3	1	0	0	21	3
X ₄	0	2	3	0	1	0	12	6
X ₅	0	4,5	4	0	0	1	18	4
Z _j		0	0	0	0	0		
Ci - Z _j		15	11	0	0	0		

Elaborado por: los autores

Por simple observación determinamos que la variable a entrar es X₁ y la variable a salir es la X₃ y en consecuencia el número pivote es el 7.

Veamos ahora como llegamos al segundo tablero:

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
BASE	Ci	15	11	0	0	0	b _i	Θ _j
X ₁	15	1	0,43	0,143	0	0	3	6,98
X ₄	0	0	2,14	-0,29	1	0	6	2,8
X ₅	0	0	2,07	-0,64	0	1	4,5	2,2
Z _j		15	6,45	2,14	0	0		
Ci - Z _j		0	4,55	-2,14	0	0		

Elaborado por: los autores

El tercer tablero queda de la siguiente forma:

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
BASE	Ci	15	11	0	0	0	b _i	Θ _j
X ₁	15	1	0	0,27	0	-0,21	2,07	
X ₄	0	0	0	0,37	1	-1,03	1,36	
X ₂	11	0	1	-0,31	0	0,48	2,17	
Z _j		15	11	0,64	0	2,13		
Ci - Z _j		0	0	-0,64	0	-2,13		

Elaborado por: los autores

Este último tablero nos evidencia que todos los valores de $C_i - Z_j$ son cero o negativos y por tanto hemos llegado al tablero óptimo. En consecuencia, la combinación óptima es $X_1 = 2.07$ y $X_2 = 2.17$.

La utilidad máxima será:

$$Z = 15 * (2,07) + 11 * (2,17) = 54,92$$

Ejercicio de aplicación

Productos alimenticios

Se requiere fabricar dos tipos de alimento A y B que en conjunto reúnan por lo menos 20 g de calorías y 30 g de proteínas. El producto A deberá contener 2 g de calorías y 1 g de proteína mientras que el producto B deberá contener 3 y 5 g de calorías y proteínas respectivamente como composición mínima. Se conoce que elaborar el producto A tiene un costo unitario de 3 unidades monetarias y el producto B 4. ¿Cuál será la combinación óptima de productos para la cual el costo total de producción sea el mínimo?

Solución

El presente ejercicio corresponde a una tarea de minimización y por tanto aplicaremos el método de Big M.

Iniciamos el proceso de solución representando por X_1 la cantidad a producir de A y por X_2 la cantidad a producir de B.

El siguiente cuadro resume las limitantes de los recursos a ser utilizados:

	A	B	Requer. Min.
Calorías	2	3	20
Proteínas	1	5	30
Costo	3	4	

Con ambas consideraciones, el modelo a optimizar queda como sigue:

$$\text{F.O. Min. } 3X_1 + 4X_2$$

$$\text{S.A. } 2X_1 + 3X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 5X_2 \geq 30$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

El proceso de solución comienza restando las variables de exceso para convertir las inecuaciones en ecuaciones y sumando las variables artificiales con lo cual se garantiza el cumplimiento de la condición de no negatividad.

Con estas consideraciones, el modelo a optimizar queda como sigue:

$$\text{F.O. Min. } 3X_1 + 4X_2 + 0X_3 + 0X_4 + MX_5 + MX_6$$

$$\text{S.A. } 2X_1 + 3X_2 - X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 = 20$$

$$X_1 + 5X_2 + 0X_3 - X_4 + 0X_5 + X_6 = 30$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

Este será el modelo que nos servirá de base para la aplicación del algoritmo de simplex.

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		
BASE	C _i	3	4	0	0	M	M	b _i	Θ _j
X ₅	M	2	3	-1	0	1	0	20	6,67
X ₆	M	1	5	0	-1	0	1	30	6
Z _j		3M	8M	-M	-M	M	M		
C _i - Z _j		3-3M	4-8M	M	M	0	0		

Elaborado por: los autores

El método del big M nos dice que hemos llegado al tablero óptimo siempre y cuando en la fila $C_i - Z_j$ todos los valores sean cero o positivos. Este no es el caso dado que siendo M un número muy grande, las columnas correspondientes a X_1 y X_2 tendrán sus valores de $C_i - Z_j$ negativos.

Surgen entonces las preguntas ¿Cuál variable entra? y ¿cuál variable sale?

La variable a entrar será aquella que tenga el valor más negativo que en este caso corresponde a X_2 . A esta columna la llamaremos “columna pivote”. El siguiente paso es dividir cada valor de b_i para el número correspondiente en la columna pivote y los valores obtenidos se registran en la columna θ_j . De estos valores tomamos el menor positivo y esa será la variable a salir que en este caso es X_6 . Esta se constituye en la llamada “fila pivote”.

La pregunta obligada es ¿Cómo llegamos de este al nuevo tablero?.

Para responder a esta pregunta, se debe localizar el punto de intersección de la fila con la columna pivote (en este caso corresponde al 5), ese punto constituye el llamado “número pivote”. Para el nuevo tablero, en la columna “BASE” en lugar de X_6 (variable saliente) colocaremos X_2 (variable entrante). Dividimos toda la fila X_6 (se incluye b_i) para el número pivote y obtenemos los valores de la fila X_2 del nuevo tablero. Corresponde ahora determinar los valores para la fila X_5 para lo cual procedemos de la siguiente forma:

Del tablero anterior (en este caso inicial) copiamos la fila X5 y le restamos la fila calculada en el nuevo tablero multiplicada por el número que le corresponde en la columna pivote. La resultante será la correspondiente a X5 en el nuevo tablero. El siguiente cuadro resume lo manifestado.

	2	3	-1	0	1	0	20
(-3)	<u>-0,6</u>	<u>-3</u>	<u>0</u>	<u>0,6</u>	<u>0</u>	<u>-0,6</u>	<u>-18</u>
	1,4	0	-1	0,6	1	-0,6	2

Este será el procedimiento a aplicar en todo momento para pasar de un tablero cualquiera al siguiente.

La regla nos dice que la variable a entrar es la más negativa de la fila $C_j - Z_j$. En este caso es X2 (Columna pivote). Contrariamente, la variable que sale es aquella que en la columna Θ_j tenga el menor valor positivo. En este caso X6 (fila pivote). El número pivote será el punto de corte de la fila y la columna pivote.

Con estas consideraciones, el nuevo tablero será:

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		
BASE	Ci	3	4	0	0	M	M	bi	Θ_j
X ₅	M	1,4	0	-1	0,6	1	-0,6	2	1,4
X ₂	4	0,2	1	0	-0,2	0	0,2	6	30
Z _j		1.4M+0.8	4	-M	0.6M-0.8	M	-0.6M+0.8		
Ci - Z _j		2.2-1.4M	0	M	0.8-0.6M	0	1.6M-0.8		

Elaborado por: los autores

Haciendo un análisis similar al tablero inicial vemos que aún no se ha llegado al óptimo. La columna con el $C_i - Z_j$ más negativo corresponde a X1 y por tanto será la nueva variable a entrar. Así mismo, la fila

con el menor valor positivo corresponde a X_5 y por tanto esa será la variable a salir. El número pivote siempre será el punto de corte entre la columna y la fila pivote.

Pasamos entonces al siguiente tablero:

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
BASE	C_i	3	4	0	0	M	M	b_i	Θ_j
X_1	3	1	0	-0,71	0,43	0,71	-0,43	1,43	3,32
X_2	4	0	1	0,14	-0,29	-0,14	0,29	5,71	-19,69
Z_j		3	4	-1,57	0,13	1,57	-0,13		
$C_i - Z_j$		0	0	1,57	-0,13	M-1,57	M+0,13		

Elaborado por: los autores

Como se puede ver, en este último tablero la columna correspondiente a X_4 indica un valor negativo por tanto se debe continuar con el proceso iterativo. Para pasar al siguiente tablero vemos que la variable a entrar es la X_4 mientras que la variable a salir es la X_1 .

El siguiente tablero queda de la siguiente forma:

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
BASE	C_i	3	4	0	0	M	M	b_i	Θ_j
X_4	0	2,3	0	-1,65	1	1,65	-1	3,3	
X_2	4	0,67	1	-0,34	0	0,34	0	6,667	
Z_j		2,68	4	-1,36	0	1,36	0		
$C_i - Z_j$		0,32	0	1,36	0	M-1,36	M		

Elaborado por: los autores

Como se puede apreciar, la fila $C_i - Z_j$ tiene todos sus valores cero o positivos lo cual nos dice que hemos llegado al tablero óptimo y por tanto nada que hagamos lo mejorará.

La solución final será producir únicamente 6.67 unidades del producto B con lo cual el costo total será de:

$$3X_1 + 4X_2$$

$$3(0) + 4(6.67) = 26.68 \text{ unidades monetarias.}$$

Al verificar el cumplimiento de las restricciones vemos que ambas se cumplen a cabalidad.

$$2X_1 + 3X_2 \geq 20 \quad \rightarrow \quad 2(0) + 3(6.67) = 20.1$$

$$X_1 + 5X_2 \geq 30 \quad \rightarrow \quad (0) + 5(6.67) = 33.35$$

Ejercicio de aplicación

Empresa farmacéutica

La empresa elabora tres tipos de productos A, B y C ricos en calcio, proteínas y hierro.

El producto A requiere como mínimo 3 g de calcio; 2 g de proteínas; 4 g de hierro y su costo de elaboración es US\$14. El producto B requiere como mínimo 6 g de calcio; 5 g de proteínas; 7 g de hierro y su costo de elaboración es US\$19. El producto C requiere como mínimo 4 g de calcio; 8 g de proteínas; 6 g de hierro y su costo de elaboración es US\$16.

La combinación mínima de los elementos es: calcio 61 g; proteínas 82 g; hierro 95 g. Determine la combinación óptima a elaborar para que el costo total sea un mínimo.

Solución

	A	B	C	Requer. Min.
Calcio	3	6	4	61
Proteínas	2	5	8	82
Hierro	4	7	6	95
Costo	14	19	16	

Designaremos por X_1, X_2 y X_3 las cantidades a producir de cada producto. En función de esto, el modelo a minimizar queda así:

$$\text{F.O. Min } Z = 14X_1 + 19X_2 + 16X_3$$

$$\text{S.a. } 3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \geq 61$$

$$2X_1 + 5X_2 + 8X_3 \geq 82$$

$$4X_1 + 7X_2 + 6X_3 \geq 95$$

$$X_1; X_2; X_3 \geq 0$$

Realizando el proceso de conversión de inecuaciones a ecuaciones es decir incorporando las variables de exceso y artificiales tenemos:

$$\text{F.O. Min } Z = 14X_1 + 19X_2 + 16X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + MX_7 + MX_8 + MX_9$$

$$\text{S.a. } 3X_1 + 6X_2 + 4X_3 - X_4 + 0X_5 + 0X_6 + X_7 + 0X_8 + 0X_9 = 61$$

$$2X_1 + 5X_2 + 8X_3 + 0X_4 - X_5 + 0X_6 + 0X_7 + X_8 + 0X_9 = 82$$

$$4X_1 + 7X_2 + 6X_3 + 0X_4 + 0X_5 - X_6 + 0X_7 + 0X_8 + X_9 = 95$$

$$X_1; X_2; X_3 \geq 0$$

Procedemos ahora a elaborar el primer tablero y tenemos:

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9		
BASE	Ci	14	19	16	0	0	0	M	M	M	bi	θj
X_7	M	3	6	4	-1	0	0	1	0	0	61	15,25
X_8	M	2	5	8	0	-1	0	0	1	0	82	10,25
X_9	M	4	7	6	0	0	-1	0	0	1	95	15,83
Z_j		9M	18M	18M	-M	-M	-M	M	M	M		
$C_i - Z_j$		14-9M	19-18M	16-18M	M	M	M	0	0	0		

Observando la última fila notamos que existen tres elementos negativos lo que nos obliga a desarrollar un segundo tablero. La variable que entra es la X3 y la que sale es la X8.

	3	6	4	-1	0	0	1	0	0	61
(-4)	-1	-2,5	-4	0	0,5	0	0	-0,5	0	-41
	2	3,5	0	-1	0,5	0	1	-0,5	0	20
	4	7	6	0	0	-1	0	0	1	95
(-6)	-1,5	-3,75	-6	0	0,75	0	0	-0,75	0	-61,5
	2,5	3,25	0	0	0,75	-1	0	-0,75	1	33,5

		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9		
BASE	Ci	14	19	16	0	0	0	M	M	M	bi	Θj
X7	M	2	3,5	0	-1	0,5	0	1	-0,5	0	20	5,71
X3	16	0,25	0,625	1	0	-0,125	0	0	0,125	0	10,25	16,4
X9	M	2,5	3,25	0	0	0,75	-1	0	-0,75	1	33,5	10,3
Zj		4,5M+4	6,75M+10	16	-M	1,25M-2	-M	M	2-1,25M	M		
Ci - Zj		10-4,5M	9-6,75M	0	M	2-1,25M	M	0	2,25M-2	0		

Vemos que la tabla 2 mantiene la presencia de dos elementos negativos y por tanto debemos elaborar un tercer tablero.

(-0,625)	0,25	0,625	1	0	-0,125	0	0	0,125	0	10,25
	-0,36	-0,625	0	0,18	-0,09	0	-0,18	0,09	0	-3,6
	-0,11	0	1	0,18	-0,215	0	-0,18	0,215	0	6,65
(-3,25)	2,5	3,25	0	0	0,75	-1	0	-0,75	1	33,5
	-1,85	-3,25	0	0,94	-0,46	0	-0,94	0,46	0	-18,5
	0,65	0	0	0,94	0,29	-1	-0,94	-0,29	1	15

		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9		
BASE	Ci	14	19	16	0	0	0	M	M	M	bi	Θj
X2	19	0,57	1	0	-0,29	0,14	0	0,29	-0,14	0	5,71	-19,66
X3	16	-0,11	0	1	0,18	-0,212	0	-0,18	0,212	0	6,68	37,11
X9	M	0,65	0	0	0,94	0,29	-1	-0,94	-0,29	1	15	15,96
Zj		9,07+0,65M	19	16	0,91M-2,52	0,3M-0,78	-M	2,52-0,91M	0,78-0,3M	M		
Ci - Zj		4,93-0,65M	0	0	2,52-0,91M	0,78-0,3M	M	0,09M-2,52	0,7M+0,78	0		

(0,29)	0,57	1	0	-0,29	0,14	0	0,29	-0,14	0	5,7
	0,2	0	0	0,29	0,09	-0,31	-0,29	-0,09	0,31	4,6
	0,77	1	0	0	0,23	-0,31	0	-0,23	0,31	10,3
(-0,18)	-0,11	0	1	0,18	-0,215	0	-0,18	0,213	0	6,65
	-0,12	0	0	-0,18	-0,06	0,19	0,18	0,06	-0,19	-2,87
	-0,23	0	1	0	-0,275	0,19	0	0,27	-0,19	3,8

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉		
BASE	C _i	14	19	16	0	0	0	M	M	M	b _i	θ _j
X ₂	19	0,77	1	0	0	0,23	-0,31	0	-0,23	0,31	10,13	
X ₃	16	-0,23	0	1	0	-0,275	0,19	0	0,27	-0,19	3,8	
X ₄	0	0,69	0	0	1	0,31	-1,06	-1	-0,31	1,06	15,96	
Z _j		10,95	19	16	0	-0,03	-2,85	0	-0,05	2,85		
C _i - Z _j		3,05	0	0	0	0,03	2,85	M	M+0,05	M-2,85		

La última fila de este tablero nos dice que hemos llegado al óptimo dado que todos sus elementos son cero o positivos.

La respuesta es entonces $X_1 = 0$; $X_2 = 10,3$; $X_3 = 3,8$

Al reemplazar estos valores vemos que las tres restricciones se cumplen a cabalidad.

Ejercicio de aplicación

Taller industrial

Un taller mecánico industrial dispone de dos máquinas diferentes A y B con las cuales puede elaborar un determinado producto.

La máquina A puede producir 20 lb/h y la máquina B 15 lb/h. Se requieren 2 H-h por cada hora de operación de la máquina A mientras que en la máquina B se requieren 3.

En total se deben utilizar al menos 15 H-h como tiempo normal. El costo de operación de una hora de máquina es de US\$25 para la A y US\$30 para la B. Ambas máquinas deben elaborar en conjunto al menos 100 libras de producto. Determine la combinación óptima (cantidad a producir por máquina) que minimice el costo total.

Modelo canónico:

$$\text{F. O. Min. } Z = 25X_1 + 30X_2$$

$$\text{S.a. } 20X_1 + 15X_2 \geq 100$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 15$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

Modelo estándar:

$$\text{F. O. Min. } Z = 25X_1 + 30X_2 + 0X_3 + 0X_4 + MX_5 + MX_6$$

$$\text{S.a. } 20X_1 + 15X_2 - X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 = 100$$

$$2X_1 + 3X_2 + 0X_3 - X_4 + 0X_5 + X_6 = 15$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

Tablero inicial

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		
BASE	Ci	25	30	0	0	M	M	bi	Θ _j
X ₅	M	20	15	-1	0	1	0	100	5
X ₆	M	2	3	0	-1	0	1	15	7,5
Z _j		22M	18M	-M	-M	M	M		
Ci - Z _j		25-22M	30-18M	M	M	0	0		

Elaborado por: los autores

No corresponde al óptimo. Variable entrante X₁; variable saliente X₅.

Número pivote 20 (cruce de fila con columna pivote).

Segundo tablero

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		
BASE	Ci	25	30	0	0	M	M	bi	Θ _j
X ₁	25	1	0,75	-0,05	0	0,05	0	5	6,67
X ₆	M	0	1,5	0,1	-1	-0,1	1	5	3,33
Z _j		25	18.75+1.5M	-1.25+0.1M	-M	1.25-0.1M	M		
Ci - Z _j		0	11.25-1.5M	1.25-0.1M	M	1.1M-1.25	0		

Elaborado por: los autores

No corresponde al tablero óptimo. La variable entrante es X2. La variable saliente es X6. El número pivote es el 1.5.

Tercer tablero

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		
BASE	Ci	25	30	0	0	M	M	b _i	Θ _j
X ₁	25	1	0	-0,1	0,5	0,1	-0,5	2,6	
X ₂	30	0	1	0,067	-0,67	-0,067	0,67	3,33	
Z _j		25	30	-0,49	-7,6	0,49	7,6		
Ci - Z _j		0	0	0,49	7,6	M-0,49	M-7,6		

Podemos apreciar que en la fila Ci-Z_j todos los valores son cero o positivos lo cual nos dice que hemos llegado al óptimo. La solución final es producir 2.6 unidades en la máquina A y 3.33 unidades en la máquina B.

Bajo este esquema, el costo total de producir es de 164.9. Ambas restricciones quedan cubiertas a satisfacción.

Como podemos ver, se han resuelto los primeros ejercicios tanto por el método gráfico como aplicando el método simplex y los resultados obtenidos son los mismos.

El método del algoritmo de simplex se diferencia del método gráfico en que aquí si podemos resolver problemas con dos o más variables lo cual lo comprobaremos en el siguiente ejercicio.

Productos de madera S.A.

La empresa “Productos de madera S.A.” fabrica tres tipos de puertas: la económica, la normal y la de lujo. La económica requiere 6

unidades de materia prima; 8 unidades de mano de obra y 3 unidades de tiempo máquina. La normal por su parte requiere 9 unidades de materia prima; 11 unidades de mano de obra y 4 unidades de tiempo máquina. Finalmente, la de lujo requiere 8 unidades de materia prima; 16 unidades de mano de obra y 10 unidades de tiempo máquina. La disponibilidad de recursos es de 1.650 unidades de materia prima; 1.920 unidades de mano de obra y 1.180 unidades de tiempo máquina. La utilidad proporcionada por cada puerta es 900; 1.500 y 2.200 um respectivamente. Se pide determinar la combinación óptima de producción de tal forma que la utilidad total generada sea la máxima.

Solución

Resumamos en un cuadro los datos proporcionados por el ejercicio:

	ECONOM.	NORMAL	LUJO	BENEFICIO
M. P.	6	9	8	1.650
M. O.	8	11	16	1.920
H. – Maq.	3	4	10	1.180
Utilidad	900	1.500	2.200	

A continuación, definimos el modelo estándar normal a maximizar: ajustado.

$$\text{F.O. Max. } Z = 900X_1 + 1.500X_2 + 2.200X_3$$

$$\text{S.a. } 6X_1 + 9X_2 + 8X_3 \leq 1.650$$

$$8X_1 + 11X_2 + 16X_3 \leq 1.920$$

$$3X_1 + 4X_2 + 10X_3 \leq 1.180$$

$$X_1; X_2; X_3 \geq 0$$

A efectos de iniciar la aplicación del simplex se procede a reajustar el modelo con lo cual tenemos lo siguiente:

$$\text{F.O. Max. } Z = 900X_1 + 1.500X_2 + 2.200X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$$

$$\text{S.a. } 6X_1 + 9X_2 + 8X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 1.650$$

$$8X_1 + 11X_2 + 16X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 = 1.920$$

$$3X_1 + 4X_2 + 10X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 = 1.180$$

$$X_1; X_2; X_3 \geq 0$$

El proceso de solución queda como sigue:

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		
BASE	Ci	900	1500	2200	0	0	0	bi	Θ _j
X ₄	0	6	9	8	1	0	0	1650	206,25
X ₅	0	8	11	16	0	1	0	1920	120
X ₆	0	3	4	10	0	0	1	1180	118
Z _j		0	0	0	0	0	0		
Ci - Z _j		900	1500	2200	0	0	0		

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		
BASE	Ci	900	1500	2200	0	0	0	bi	Θ _j
X ₄	0	3,6	5,8	0	1	0	-0,8	706	121,7
X ₅	0	3,2	4,6	0	0	1	-1,6	32	6,9
X ₃	2200	0,3	0,4	1	0	0	0,1	118	295
Z _j		660	880	2200	0	0	220		
Ci - Z _j		240	620	0	0	0	-220		

Observando la fila Ci - Z_j vemos que aún no hemos llegado a la solución óptima (no todos son cero o negativos). La variable a entrar es la X₂ mientras que la variable a salir es la X₅ y por tanto el número pivote es el 4,6.

El tercer tablero nos dice lo siguiente:

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		
BASE	Ci	900	1500	2200	0	0	0	bi	Θ _j
X ₄	0	-0,46	0	0	1	-1,28	1,23	665,6	
X ₂	1500	0,7	1	0	0	0,22	-0,35	6,96	
X ₃	2200	0,02	0	1	0	-0,088	0,24	115,22	
Z _j		1094	1500	2200	0	136,4	3		
Ci - Z _j		-194	0	0	0	-136,4	-3		

Como puede verse, en la fila Ci–Zj todos los valores son cero o negativos, esto significa que se ha llegado a la solución óptima la cual dice que se deben producir siete unidades de X2 y 115 unidades de X3.

La utilidad máxima es de 263.500 y las tres restricciones están plenamente cubiertas.

Manteles de mesa

Una determinada industria fabrica manteles de mesa en dos tipos: redondo y rectangular. Cada uno consume 2 y 3 m² de tela respectivamente. El cosido a mano lleva 1 hora para los rectangulares y dos para los redondos. Los manteles rectangulares deben llevar cuatro esquineros de refuerzo. Semanalmente se pueden conseguir 600 m² de tela y 600 esquineros. La empresa dispone de 500 horas para corte y costura. La utilidad es de US\$8 para los redondos y US\$10 para los rectangulares. ¿Cuál será la combinación óptima de producción que maximice la utilidad?

Modelo canónico

$$\text{F.O. Max. } Z = 8X_1 + 10X_2$$

$$\text{S.a. } 2X_1 + 3X_2 \leq 600$$

$$2X_1 + X_2 \leq 500$$

$$4X_2 \leq 600$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

Modelo estándar

$$\text{F.O. Max. } Z = 8X_1 + 10X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$$

$$\text{S.a. } 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 = 600$$

$$2X_1 + X_2 + 0X_3 + X_4 + 0X_5 = 500$$

$$0X_1 + 4X_2 + 0X_3 + 0X_4 = 600$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

Primer tablero

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
BASE	C _i	8	10	0	0	0	b _i	Θ _j
X ₃	0	2	3	1	0	0	600	200
X ₄	0	2	1	0	1	0	500	500
X ₅	0	0	4	0	0	1	600	150
Z _j		0	0	0	0	0		
C _i - Z _j		8	10	0	0	0		

Elaborado por: los autores

Como se puede apreciar, no es la solución óptima. El número pivote es el 4 que corresponde al cruce de la fila pivote (X₅) con la columna pivote (X₂).

Segundo tablero

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
BASE	C _i	8	10	0	0	0	b _i	Θ _j
X ₃	0	2	3	1	0	0	600	200
X ₄	0	2	1	0	1	0	500	500
X ₅	0	0	4	0	0	1	600	150
Z _j		0	0	0	0	0		
C _i - Z _j		8	10	0	0	0		

Elaborado por: los autores

El número pivote para este tablero es el 2. Es decir que la variable entrante es X₁ y la variable saliente X₃.

Tercer tablero

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
BASE	C _i	8	10	0	0	0	b _i	Θ _j
X ₁	8	1	0	0,5	0	-0,375	75	-200
X ₄	0	0	0	-1	1	0,5	200	400
X ₂	10	0	1	0	0	0,25	150	600
Z _j		8	10	4	0	-0,5		
C _i - Z _j		0	0	-4	0	0,5		

Elaborado por: los autores

Aún no se llega al óptimo. El número pivote es el 0.5 siendo la variable a entrar X5 y la variable a salir X4.

Cuarto tablero

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
BASE	C _i	8	10	0	0	0	b _i	Θ _j
X ₁	8	1	0	-0,25	0,75	0	225	
X ₅	0	0	0	-2	2	1	400	
X ₂	10	0	1	0,5	-0,5	0	50	
Z _j		8	10	3	1	0		
C _i - Z _j		0	0	-3	-1	0		

Elaborado por: los autores

La fila C_i-Z_j tiene todos sus valores en cero o negativos, por tanto, se ha llegado a la solución óptima.

La solución es producir 225 unidades de X₁ y 50 unidades de X₂. En base a ello, la utilidad máxima a alcanzar es 2.300 y las tres restricciones han sido cumplidas en su totalidad.

Granja agrícola

Una granja agrícola desea criar conejos y pollos para lo cual disponen de 180 horas por mes. En su bodega solo pueden almacenar un máximo de 1000 kilos de alimento y sabemos que un conejo requiere 20 kilos

al mes y un pollo 10. Un conejo requiere 3 horas mensuales de cuidado y un pollo 2. El conejo da un beneficio de UM500 y el pollo UM300.

Determine la combinación de elementos que optimice el beneficio.

Solución

Sea X_1 = # conejos

X_2 = # de pollos

F.O. Max. $Z = 500 X_1 + 300X_2$

Sa $20X_1 + 10X_2 \leq 1000$

$3X_1 + 2X_2 \leq 180$

$X_j \geq 0$

Llevándolo al modelo estándar tenemos:

F.O. Max. $Z = 500 X_1 + 300X_2 + 0X_3 + 0X_4$

Sa $20X_1 + 10X_2 + X_3 + 0X_4 = 1000$

$3X_1 + 2X_2 + 0X_3 + X_4 = 180$

$X_j \geq 0$

		X_1	X_2	X_3	X_4		
BASE	C_i	500	300	0	0	b_i	Θ_j
X_3	0	20	10	1	0	1000	50
X_4	0	3	2	0	1	180	60
Z_j		0	0	0	0		
$C_i - Z_j$		500	300	0	0		

		X_1	X_2	X_3	X_4		
BASE	C_i	500	300	0	0	b_i	Θ_j
X_1	0	1	0,5	0,05	0	50	100
X_4	0	0	0,5	0,15	1	30	60
Z_j		500	250	25	0		
$C_i - Z_j$		0	50	-25	0		

	3	2	0	1	180
(-3)	<u>-3</u>	<u>-1,5</u>	<u>-0,15</u>	<u>0</u>	<u>-150</u>
	0	0,5	0,15	1	30

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄		
BASE	Ci	500	300	0	0	bi	Θj
X ₁	0	1	0	0,2	-1	20	
X ₂	0	0	1	-0,3	2	60	
Z _j		500	300	10	100		
Ci - Z _j		0	0	-10	-100		

	1	0,5	0,05	0	50
(-0,5)	<u>0</u>	<u>-0,5</u>	<u>0,15</u>	<u>-1</u>	<u>-30</u>
	1	0	0,2	-1	20

La solución es $X_1 = 20$

$X_2 = 60$

Con estos valores se da cumplimiento a las restricciones.

La utilidad máxima será:

$$Z = (500 * 20) + (300 * 60) = 28.000$$

Carpintería

Un fabricante produce sillas y mesas para lo cual requiere las áreas de montaje y pintura. Producir una silla requiere una hora de montaje y dos de pintura. La mesa en cambio requiere tres y una hora en su orden. La sección de montaje solo puede trabajar nueve horas al día mientras que la de pintura ocho. El beneficio de cada mesa es el doble de la silla. Determine el número de mesas y sillas a producir para maximizar el beneficio.

Solución

Sea X_1 el número a producir de sillas.

Sea X_2 el número a producir de mesas.

$$\text{F.O. Max. } Z = X_1 + 2X_2$$

$$\text{S.a. } X_1 + 3X_2 \leq 9$$

$$2X_1 + X_2 \leq 8$$

$$X_j \geq 0$$

Estandarizando el modelo tenemos:

$$\text{F.O. Max. } Z = X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X_4$$

$$\text{S.a. } X_1 + 3X_2 + X_3 + 0X_4 = 9$$

$$2X_1 + X_2 + 0X_3 + X_4 = 8$$

$$X_j \geq 0$$

		X_1	X_2	X_3	X_4		
BASE	C_i	1	2	0	0	b_i	Θ_j
X_3	0	1	3	1	0	9	3
X_4	0	2	1	0	1	8	8
Z_j		0	0	0	0		
$C_i - Z_j$		1	2	0	0		

		X_1	X_2	X_3	X_4		
BASE	C_i	1	2	0	0	b_i	Θ_j
X_2	2	0,33	1	0,33	0	3	9
X_4	0	1,67	0	-0,33	1	5	3
Z_j		0,66	2	0,66	0		
$C_i - Z_j$		0,34	0	-0,66	0		

		X_1	X_2	X_3	X_4		
BASE	C_i	1	2	0	0	b_i	Θ_j
X_2	2	0	1	0,4	-0,2	2	
X_1	1	1	0	-0,2	0,6	3	
Z_j		1	2	0,6	0,2		
$C_i - Z_j$		0	0	-0,6	-0,2		

La solución nos recomienda fabricar 3 sillas (X1) y 2 mesas (X2). La utilidad máxima será de US\$7.

Fabricante de ropa

Un fabricante de ropas recibe un pedido abierto por pantalones y chaquetas de un prestigioso almacén de la localidad.

El fabricante dispone de 750 m de tejido de algodón y 1000 m de tejido de poliéster. Cada pantalón requiere 1 m de tejido de algodón y 2 m de tejido de poliéster. Cada chaqueta requiere 1,5 m de tejido de algodón y 1 m de tejido de poliéster. El precio unitario de venta es de US\$50 para cada pantalón y US\$40 para cada chaqueta. Determine la combinación apropiada que maximice el ingreso por ventas.

Solución

Sea X1 la variable que representa el número de pantalones a producir.

Sea X2 la variable que representa el número de chaquetas a producir.

$$\text{F.O. Min.} \quad Z = 50X_1 + 40X_2$$

$$\text{S.a.} \quad X_1 + 1,5X_2 \leq 750$$

$$2X_1 + X_2 \leq 1000$$

$$X_j \geq 0$$

Incorporando las variables de holgura tendremos:

$$\text{F.O. Min.} \quad Z = 50X_1 + 40X_2 + 0X_3 + 0X_4$$

$$\text{S.a.} \quad X_1 + 1,5X_2 + X_3 + 0X_4 = 750$$

$$2X_1 + X_2 + 0X_3 + X_4 = 1000$$

$$X_j \geq 0$$

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄		
BASE	C _i	50	40	0	0	b _i	Θ _j
X ₃	0	1	1,5	1	0	750	750
X ₄	0	2	1	0	1	1000	500
Z _j		0	0	0	0		
C _i - Z _j		50	40	0	0		

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄		
BASE	C _i	50	40	0	0	b _i	Θ _j
X ₃	0	0	1	1	-0,5	250	250
X ₁	50	1	0,5	0	0,5	500	1000
Z _j		50	25	0	25		
C _i - Z _j		0	15	0	-25		

	1	1,5	1	0	750
(-1)	<u>-1</u>	<u>-0,5</u>	<u>0</u>	<u>-0,5</u>	<u>-500</u>
	0	1	1	-0,5	250

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄		
BASE	C _i	50	40	0	0	b _i	Θ _j
X ₂	40	0	1	1	-0,5	250	
X ₁	50	1	0	-0,5	0,75	375	
Z _j		50	40	15	37,5		
C _i - Z _j		0	0	-15	-37,5		

La solución es fabricar 375 pantalones y 250 chaquetas.

Teoría de la dualidad

¿En qué consiste la teoría de la dualidad?

Cada problema de programación lineal tiene un segundo problema asociado con él. Uno se denomina primal y el otro dual. Los 2 poseen propiedades muy relacionadas, de tal manera que la solución óptima a un problema proporciona información completa sobre la solución óptima para el otro.

Si el primal tiene más ecuaciones que variables, es frecuentemente más fácil obtener la solución del dual ya que menor número de iteraciones son requeridas. Además, si el primal tiene solución, el dual tendrá solución. Una vez que el problema dual es formulado, el procedimiento de solución es exactamente el mismo que para cualquier problema de programación lineal.

¿Para qué sirve la dualidad?

Las relaciones entre el primal y el dual se utilizan para reducir el esfuerzo de cómputo en ciertos problemas y para obtener información adicional sobre las variaciones en la solución óptima debidas a ciertos cambios en los coeficientes y en la formulación del problema. Esto se conoce como análisis de sensibilidad o post-optimalidad.

Ejercicios de aplicación

Ejercicio #1

A partir del modelo primal indicado, obtenga el modelo dual.

$$\text{Max. } Z = -5X_1 - 35X_2 - 20X_3$$

$$\text{S.a.} \quad X_1 - X_2 - X_3 \leq -2$$

$$-X_1 - 3X_2 \leq -3$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

Solución

$$\text{Min. } W = -2Y_1 - 3Y_2$$

$$\text{S.a.} \quad Y_1 - Y_2 \geq -5$$

$$-Y_1 - 3Y_2 \geq -35$$

$$-Y_1 \geq -20$$

$$Y_1; Y_2 \geq 0$$

Ejercicio #2

Utilizando el modelo dual, determine los valores de X_1 y X_2 en el siguiente modelo primal:

$$\text{Min.} \quad Z = 2000 X_1 + 1000 X_2$$

$$\text{s.a.} \quad 3X_1 + X_2 \geq 40$$

$$2X_1 + 2X_2 \geq 60$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

Solución

Determinamos primero el modelo dual:

$$\text{Max.} \quad W = 40 Y_1 + 60 Y_2$$

$$\text{s.a.} \quad 3Y_1 + 2Y_2 \leq 2000$$

$$Y_1 + 2Y_2 \leq 1000$$

$$Y_1; Y_2 \geq 0$$

Resolveremos el modelo dual aplicando el método gráfico (en vista de que solo intervienen dos variables) para con ello llegar a determinar los valores de X_1 y X_2 .

Primero convertimos las desigualdades en igualdades.

$$3Y_1 + 2Y_2 - 2000 = 0 \quad (1)$$

$$Y_1 + 2Y_2 - 1000 = 0 \quad (2)$$

Para la ecuación (1) tenemos que:

$$Y_1 = \frac{2000 - 2Y_2}{3}$$

$$Y_2 = \frac{2000 - 3Y_1}{2}$$

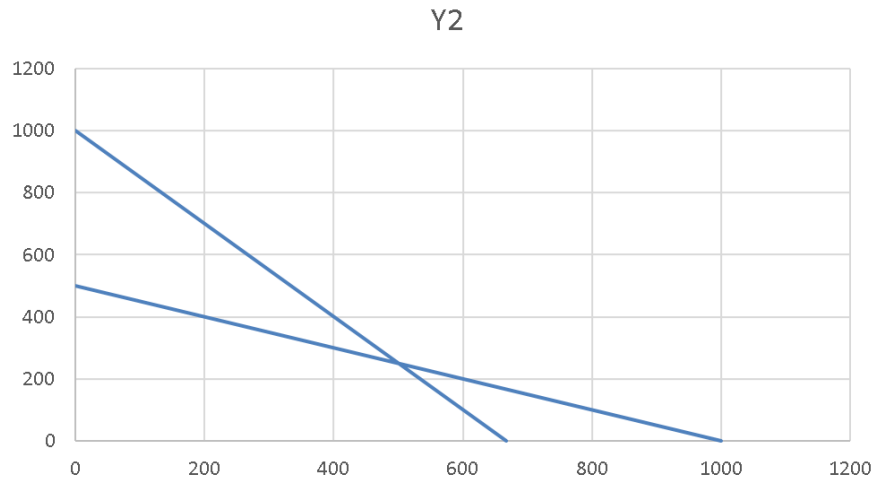
Mientras que para la ecuación (2) tenemos que:

$$Y_1 = 1000 - 2Y_2$$

$$Y_2 = \frac{1000 - Y_1}{2}$$

Gráficamente nos queda lo siguiente:

			<u>Y1</u>	<u>Y2</u>
F.O. Max W =	40Y1 + 60Y2	3Y1 + 2Y2 = 2000	0	1000
	3Y1 + 2Y2 = 2000		666,67	0
	Y1 + 2Y2 = 1000	Y1 + 2Y2 = 1000	0	500
			1000	0



Vemos que las rectas se cortan en el punto Y1 = 500 y Y2 = 250

Maximizando la función objetivo tenemos:

$$W = 40(500) + 600 (250) = 20000 + 15000 = 35000$$

¿Cómo llegar a determinar los valores de X1 y X2?

Si conocemos el primal podemos establecer las siguientes ecuaciones:

$$(3X_1 + X_2 - 40) Y_1 = 0 \quad (1)$$

$$(2X_1 + 2X_2 - 60) Y_2 = 0 \quad (2)$$

Reemplazamos en ambas ecuaciones los valores de Y_1 y Y_2 que ya son conocidos y por tanto nos queda lo siguiente:

$$(3X_1 + X_2 - 40) Y_1 = 0$$

$$(3X_1 + X_2 - 40) 500 = 0$$

$$1500X_1 + 500X_2 - 20000 = 0 \quad (3)$$

$$(2X_1 + 2X_2 - 60) Y_2 = 0$$

$$(2X_1 + 2X_2 - 60) 250 = 0$$

$$500X_1 + 500X_2 - 15000 = 0 \quad (4)$$

Resolvemos ahora el sistema formado por estas dos nuevas ecuaciones y tenemos:

$$1500X_1 + 500X_2 = 20000$$

$$500X_1 + 500X_2 = 15000$$

Aplicando el método de reducción encontramos que:

$$X_2 = 25$$

Reemplazando este valor en cualquiera de las dos ecuaciones tenemos que $X_1 = 5$.

Por tanto, la función objetivo será: $2000(5) + 1000(25) = 35000$.

A manera de verificación, resolvamos el primal por el método gráfico y los valores de X_1 y X_2 resultantes deben ser los mismos obtenidos con el análisis de dualidad.

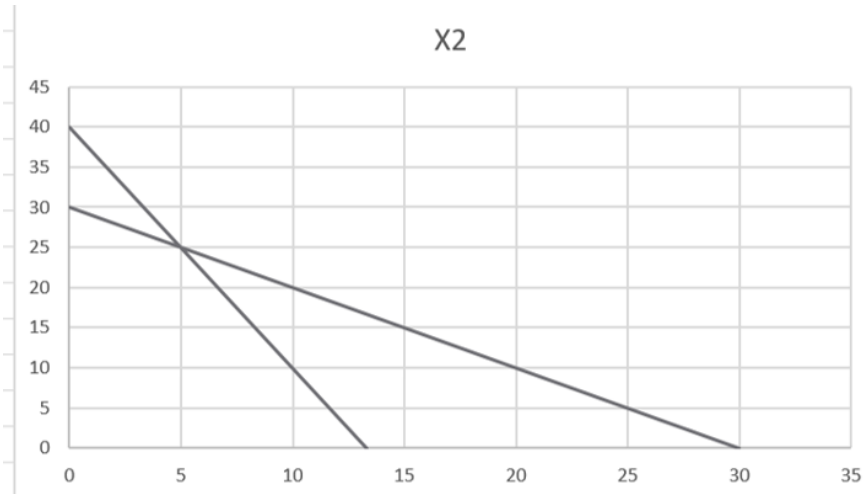
$$\text{F.O. Min.} \quad Z = 2000 X_1 + 1000X_2$$

$$\text{s.a.} \quad 3X_1 + X_2 \geq 40 \quad (1)$$

$$2X_1 + 2X_2 \geq 60 \quad (2)$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

Aplicando el método gráfico tenemos:



Observando el punto de corte encontramos que efectivamente $X_1 = 5$ y $X_2 = 25$.

Ejercicio # 3

Un taller de mecánica industrial dispone de 350 m de lámina y 360 m de ángulo para la fabricación de puertas y ventanas que aportan una utilidad unitaria de 70 y 50 UM respectivamente.

Una puerta requiere 7 m de lámina y 9 m de ángulo mientras que una ventana requiere 5 y 9 m respectivamente.

Determine la combinación óptima a fabricar sabiendo que el área de mercadeo confirmó que como máximo se venderán 40 puertas.

Haciendo uso del dual, determine los valores de X_1 y X_2 .

Solución

Resumiendo:

	Puertas (X ₁)	Ventanas (X ₂)	Disponible
Láminas	7	5	350
Ángulos	9	9	360
Utilidad	70	50	

El cuadro de resumen nos permite definir el siguiente modelo matemático a optimizar:

$$\text{F.O. Max.} \quad Z = 70X_1 + 50X_2$$

$$\text{Sa.} \quad 7X_1 + 5X_2 \leq 350$$

$$9X_1 + 9X_2 \leq 360$$

$$X_{ij} \geq 0$$

Observando desde la óptica dual, este modelo se convierte en:

$$\text{F.O. Min.} \quad W = 350Y_1 + 360Y_2$$

$$\text{Sa.} \quad 7Y_1 + 9Y_2 \geq 70$$

$$5Y_1 + 9Y_2 \geq 50$$

$$X_{ij} \geq 0$$

$$7Y_1 + 9Y_2 = 70 \quad (1) \text{ Láminas}$$

$$5Y_1 + 9Y_2 = 50 \quad (2) \text{ Ángulos}$$

Para la ecuación (1) tenemos que:

$$Y_1 = \frac{70 - 9Y_2}{7}$$

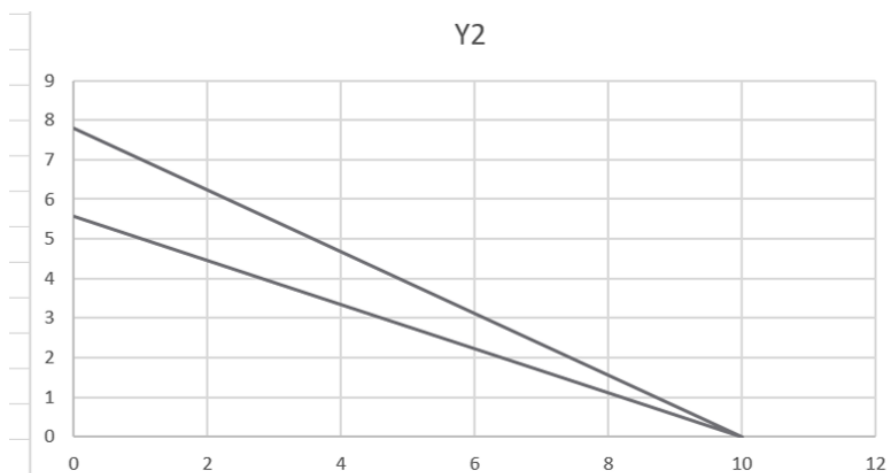
$$Y_2 = \frac{70 - 7Y_1}{9}$$

Mientras que para la ecuación (2) tenemos que:

$$Y_1 = \frac{50 - 9Y_2}{5}$$

$$Y_2 = \frac{50 - 5Y_1}{9}$$

A continuación, elaboramos el gráfico correspondiente:



Tratándose de un caso de minimización, la solución estará entre los puntos (0;7,7) y (10;0) y será aquella que genere el menor costo.

Procedemos de la siguiente forma:

$$W1 = 350 (0) + 360 (7,7) = 2.800$$

$$W2 = 350 (10) + 360 (0) = 3.500$$

Queda claro entonces que la solución es el punto $Y1 = 0$ y $Y2 = 7,7$ dado que genera el menor costo.

A efectos de determinar los valores de $X1$ y $X2$ y conocidos los valores de $Y1$ y $Y2$, nos apoyamos en el modelo primal para llegar a

las siguientes ecuaciones de ecuaciones:

$$(7X_1 + 5X_2 - 350) Y_1 = 0$$

$$(9X_1 + 9X_2 - 360) Y_2 = 0$$

Sabemos que $Y_1 = 0$ y $Y_2 = 7,7$ con lo cual:

$$(7X_1 + 5X_2 - 350) 0 = 0$$

$$(9X_1 + 9X_2 - 360) 7,7 = 0$$

La primera ecuación se convierte en cero mientras que la segunda adquiere la siguiente forma:

$$9(7,7) (X_1) + 9(7,7) (X_2) - 360(7,7) = 0$$

De antemano sabemos que $X_1 = 40$ lo cual nos lleva a:

$$9(7,7) (40) + 9(7,7) (X_2) - 360(7,7) = 0$$

Resolviendo la ecuación tenemos que $X_2 = 0$

Por tanto, la solución final es: $X_1 = 40$ y $X_2 = 0$

Resolvamos ahora el ejercicio a partir del primal:

$$\text{F.O. Max. } Z = 70X_1 + 50X_2$$

$$\text{Sa. } 7X_1 + 5X_2 \leq 350$$

$$9X_1 + 9X_2 \leq 360$$

$$X_{ij} \geq 0$$

Resolvamos ahora el ejercicio a partir del modelo primal:

$$\text{F.O. Max. } Z = 70X_1 + 50X_2$$

$$\text{Sa. } 7X_1 + 5X_2 \leq 350$$

$$9X_1 + 9X_2 \leq 360$$

$$X_{ij} \geq 0$$

Convertimos las inecuaciones en ecuaciones y despejando cada variable tenemos:

$$7X_1 + 5X_2 = 350 \quad (1)$$

$$9X_1 + 9X_2 = 360 \quad (2)$$

Para la ecuación (1) tenemos que:

$$X_1 = \frac{350 - 5X_2}{7}$$

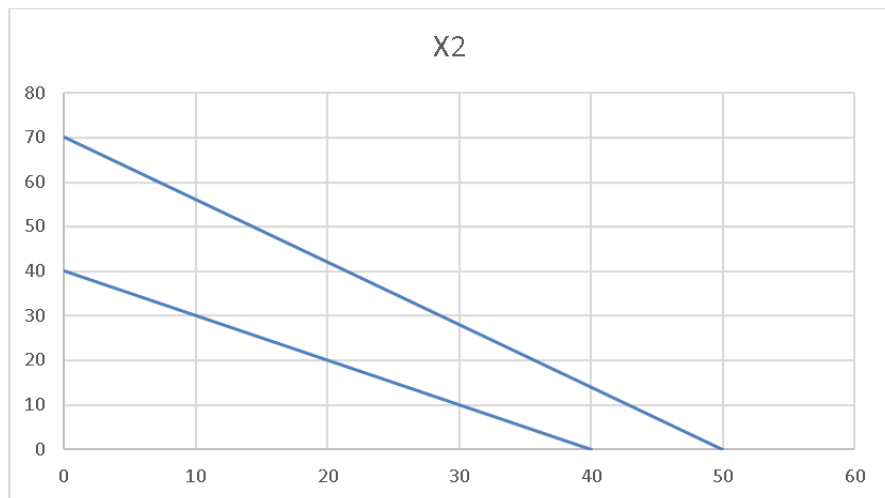
$$X_2 = \frac{350 - 7X_1}{5}$$

Mientras que para la ecuación (2) tenemos que:

$$X_1 = \frac{360 - 9X_2}{9}$$

$$X_2 = \frac{360 - 9X_1}{9}$$

Estas coordenadas nos conducen al siguiente gráfico:



Podemos observar que, tratándose de un caso de maximización, la solución al problema estará entre los puntos (40;0) y (0; 40).

Considerando $X_1 = 40$ vemos que se genera un punto de corte entre las rectas $X_1 = 40$ y $9X_1 + 9X_2 = 360$.

Solucionando el sistema de ecuaciones, encontramos que $X_1 = 40$ y $X_2 = 0$.

Vemos entonces que la respuesta coincide con el resultado obtenido al resolver el ejercicio aplicando el método dual.

Ejercicio #4

El siguiente modelo representa un problema de maximización.

$$\text{Max.} \quad Z = 45 X_1 + 17X_2 + 55X_3$$

$$\text{S.a.} \quad X_1 + X_2 + X_3 \leq 200$$

$$9X_1 + 8X_2 + 10X_3 \leq 5000$$

$$10X_1 + 7X_2 + 21X_3 \leq 4000$$

$$X_j \geq 0$$

Aplicando el procedimiento antes indicado plantee el modelo dual.

Solución

El problema dual quedará de la siguiente forma:

$$\text{Min.} \quad Z = 200 Y_1 + 5000Y_2 + 4000Y_3$$

$$\text{S.a.} \quad Y_1 + 9Y_2 + 10Y_3 \geq 45$$

$$Y_1 + 8Y_2 + 7Y_3 \geq 17$$

$$Y_1 + 10Y_2 + 21Y_3 \geq 55$$

$$Y_j \geq 0$$

Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad llamado también Análisis de Post-optimización es un estudio que consiste en identificar cual es el efecto que se produce en el valor de la función objetivo cuando se alteran ciertos parámetros del modelo, así tenemos:

- Incremento en la disponibilidad de algún recurso.
- Cambio en alguno de los coeficientes de las restricciones.
- Incorporar al modelo una nueva restricción.
- Eliminar del modelo una o más restricciones.

Con este análisis además se puede determinar la relación entre las unidades incrementadas en uno de los factores mencionados anteriormente y el incremento en la en el valor de la función objetivo.

Es utilizada para tomar en consideración los cambios que pueden ocurrir en los elementos componentes del modelo que consiste en determinar qué tan sensible es la respuesta óptima del método simplex, al cambio de algunos parámetros como las utilidades o los costos unitarios (coeficientes de la función objetivo) o la disponibilidad de los recursos (términos independientes de las restricciones) es decir, por cada unidad que se incremente en uno de los parámetros o factores mencionados con anterioridad, en cuantas unidades se incrementa el valor de la función objetivo. Este análisis se realiza sobre una solución óptima ya determinada.

Veamos con un ejemplo práctico la forma de aplicar todo lo aquí mencionado.

Ejercicio de aplicación: mesas de madera

Un carpintero fabrica dos tipos de mesas de madera (A y B). El tipo A necesita 4 horas de mecanizado primario (fabricación de piezas) y 4 horas de mecanizado secundario (ensamblado y barnizado). El tipo B necesita en el mismo orden 3 y 7 horas respectivamente. Se dispone por día de 40 h - máquina de mecanizado primario y 56 de mecanizado secundario. La venta de una mesa del tipo A reporta un beneficio de US\$70 mientras que la venta de cada mesa del tipo B genera US\$90.

- Determine la combinación óptima que maximice el beneficio.
- Supóngase ahora que la capacidad de mecanizado primario o secundario puede aumentarse indistintamente en 8 horas-máquina. ¿Hacia cuál sistema de mecanizado orientaría usted dicho incremento?

Tiempo de mecanizado (horas)			
Tipo de mesa	Tipo A	Tipo B	Disponibilidad diaria (horas – máquina)
Mecanizado primario	4	3	40
Mecanizado secundario	4	7	56
Beneficio	70	90	

Supóngase ahora que la capacidad de mecanizado primario o secundario (horas-máquina) puede aumentarse en 8 horas-máquina.

En estas condiciones:

- ¿Cómo afecta esta ampliación de capacidad a los beneficios diarios?
- ¿En qué tipo de mecanizado (primario o secundario) es preferible invertir estas 8 horas?

Solución

Resolvamos el ejercicio mediante el método simplex.

$$\text{F.O. Max.} \quad Z = 70X_1 + 90X_2$$

$$\text{S.a.} \quad 4X_1 + 3X_2 \leq 40$$

$$4X_1 + 7X_2 \leq 56$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Tablero inicial

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄		
BASE	C _i	70	90	0	0	b _i	Θ _j
X ₃	0	4	3	1	0	40	13,3
X ₄	0	4	7	0	1	56	8
Z _j		0	0	0	0		
C _i - Z _j		70	90	0	0		

Elaborado por: los autores

Todos los valores de C_i–Z_j son cero o positivos es decir que no hemos llegado al óptimo. Vemos que X₂ es la variable a entrar y X₄ la variable a salir y por tanto el número pivote es el 7.

Segundo tablero

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄		
BASE	C _i	70	90	0	0	b _i	Θ _j
X ₃	0	2,29	0	1	-0,42	16	6,99
X ₂	90	0,57	1	0	0,14	8	14,04
Z _j		51,3	90	0	12,6		
C _i - Z _j		18,7	0	0	-12,6		

Elaborado por: los autores

Entre los valores de $C_i - Z_j$ tenemos uno positivo y por tanto no hemos llegado al óptimo.

X_1 es la variable que entra y X_3 la variable que sale. El número pivote es el 2.29.

Tercer tablero

		X_1	X_2	X_3	X_4		
BASE	C_i	70	90	0	0	b_i	Θ_j
X_1	70	1	0	0,44	-0,18	6,99	
X_2	90	0	1	-0,25	0,24	4,02	
Z_j		70	90	8,3	9		
$C_i - Z_j$		0	0	-8,3	-9		

Elaborado por los autores

Todos los valores de $C_i - Z_j$ son cero o negativos por tanto hemos llegado al óptimo.

La respuesta final redondeada nos dice $X_1 = 7$ y $X_2 = 4$.

El beneficio total maximizado es: $70(7) + 90(4) = 490 + 360 = 850$.

Ahora bien, ante la posibilidad de incrementar la capacidad del mecanizado, debemos realizar un análisis de sensibilidad para decidir dónde invertir ese incremento si en el primario o en el secundario.

Corresponde entonces plantear individualmente los nuevos modelos a optimizar y ver cuál de ellos genera una mejor utilidad.

Ubiquémonos primero en el escenario de incrementar las horas en el mecanizado primario.

El modelo a optimizar será:

$$\text{F.O. Max. } Z = 70X_1 + 90X_2$$

$$\text{S.a. } 4X_1 + 3X_2 \leq 48$$

$$4X_1 + 7X_2 \leq 56$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Resolviendo el modelo por el método del simplex obtenemos como respuesta $X_1 = 10.5$ y $X_2 = 2$.

Esto nos generará una nueva utilidad de US\$915.

Veamos ahora que sucede si invertimos las ocho horas diarias en el mecanizado secundario en lugar del primario.

El modelo a optimizar será:

$$\text{F.O. Max. } Z = 70X_1 + 90X_2$$

$$\text{S.a. } 4X_1 + 3X_2 \leq 40$$

$$4X_1 + 7X_2 \leq 64$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Resolviendo el modelo por el método del simplex obtenemos como respuesta $X_1 = 5.5$ y $X_2 = 6$.

Esto nos generará una nueva utilidad de US\$925.

Dado que el problema consta de solo dos variables, se lo puede resolver aplicando el método gráfico.

Conclusión

De darse el incremento de 8 horas / día, la mejor opción es invertir las en el mecanizado secundario dado que produce una mayor utilidad.

EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE Y LAS ASIGNACIONES

Capítulo 2

EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE Y LAS ASIGNACIONES

El problema del transporte o distribución es un problema especial de redes en programación lineal que se fundamenta en la necesidad de realizar las tareas de distribución desde los diversos orígenes hasta los diferentes destinos cumpliendo a cabalidad las restricciones de oferta y demanda dando como resultado que el costo total de la operación sea el mínimo.

El modelo de transporte se puede definir como una técnica que busca determinar un programa de transporte de productos o mercancías desde los diversos orígenes hasta los diferentes destinos al menor costo posible. (Gonzalez Ariza, 2015, pág. 221)

Podemos afirmar entonces que un problema de transporte surge cuando se necesita un modelo costo-efectividad que permita transportar ciertos bienes desde un lugar de origen hacia un lugar de destino en los cuales los bienes a transportar son requeridos bajo ciertas restricciones en la cantidad que se pueda transportar.

Un modelo de transporte general con m orígenes y n destinos tiene $m + n$ ecuaciones de restricción, una por cada origen y cada destino. Sin embargo, como el modelo de transporte siempre está balanceado (suma de la oferta igual a la suma de la demanda) una de las ecuaciones es redundante, por lo que el modelo se reduce a $m + n - 1$ ecuaciones independientes y $m + n - 1$ variables básicas.

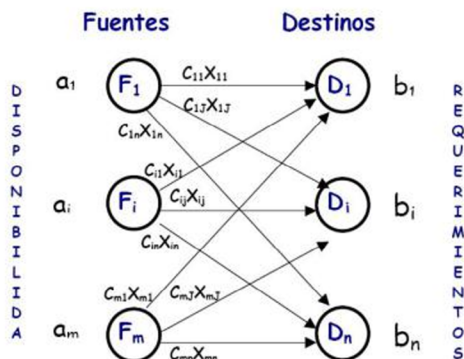
El modelo de transporte debe estar balanceado. Ese balance consiste en agregar una restricción en la que se debe cumplir que la cantidad total ofertada debe ser igual a la cantidad total demandada. (Gonzalez Ariza, 2015, pág. 224)

La estructura especial del problema de transporte permite asegurar una solución básica inicial no artificial siguiendo uno de los tres métodos siguientes:

- Método de la esquina noroeste
- Método del costo mínimo
- Método de aproximación de Vogel

El primer método es de naturaleza “mecánica”, y los dos restantes son heurísticos que buscan una solución inicial de mejor calidad que dé un valor objetivo más pequeño.

Por lo general, el método heurístico Vogel es mejor que el heurístico de costo mínimo. Por otra parte, el método de esquina noroeste implica la cantidad mínima de cálculos. (Baca Urbina, Evaluación Económica de Proyectos, 2006, pág. 188)



Se trata de problemas especiales de programación lineal, pues se deriva de las aplicaciones que se definen para determinar la manera óptima de transportar bienes, más no la producción de los mismos.

Se van a presentar tres casos:

- Demanda = Oferta
- Demanda > Oferta
- Demanda < Oferta

Balanceo del modelo de transporte

Quiere decir que la suma de la oferta debe ser igual que la demanda, aunque esta condición no siempre se cumple, ya que la oferta disponible puede ser insuficiente o excesiva; entonces, se dice que el modelo “no está balanceado”.

No obstante, para poder desarrollar un modelo eficaz, se debe aplicar la restricción de balanceo porque es fundamental al desarrollar la técnica, para balancear con datos ficticios convirtiéndolo a un problema igualando oferta y demanda.

Si la demanda excede a la oferta, se aumenta un origen ficticio y si existe exceso de oferta, se utiliza un destino ficticio para absorber la cantidad excedente.

Cualquiera que sea el caso, siempre se deberá equilibrar el sistema. Conceptualmente equivale a enviar productos desde varios orígenes hacia varios destinos con el mínimo costo total.

La estructura fundamental del problema de transporte según Taha (2012) se ampara en una función objetivo y varias restricciones en función de lo siguiente:

$$\text{F.O. Max (Min) } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

$$\text{Sa: } \sum_{i=1}^m X_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, 3 \dots m \quad (\text{Restricción de oferta})$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, 3 \dots n \quad (\text{Restricción de demanda})$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad \text{para todos los } i \text{ y } j \quad (\text{condición de no negatividad})$$

X_{ij} = Cantidad despachada desde el origen i hasta el destino j .

C_{ij} = Costo de despachar una unidad desde el origen i hasta el destino j .

a_i = Cantidad disponible en cada origen.

b_j = Cantidad requerida desde cada destino.

Métodos de solución

Para la solución del problema de transporte también llamado distribución disponemos de los tres métodos siguientes:

- Esquina Noroeste
- Aproximación de Vogel
- Costo mínimo

Esquina noroeste

El método de la esquina Noroeste es capaz de solucionar problemas de transporte o distribución mediante la consecución de una solución básica factible inicial que satisfaga todas las restricciones existentes sin que esto implique que se alcance el costo óptimo total.

La gran desventaja de este método es que no considera los costos durante el desarrollo iterativo. Su nombre se debe al génesis del algoritmo, el cual se inicia justamente en la celda noroeste.

Procedimiento

Paso 1:

En la celda de la esquina Noroeste se debe asignar la máxima cantidad de unidades posibles, cantidad que se ve restringida ya sea por las restricciones de la oferta o de la demanda.

Paso 2:

Se continúa con un barrido fila por fila de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, colocando en cada celda la cantidad que corresponda en función de la disponibilidad y los requerimientos.

Paso 3:

Una vez terminado el proceso iterativo se procede a calcular el costo total de esta solución básica inicial identificando si se trata de una solución degenerada o no degenerada.

Ejercicio de aplicación

Empacadora de mariscos

Una empresa procesadora de alimentos del mar posee las siguientes plantas industriales distribuidas de la siguiente manera: Guayaquil con capacidad productiva de 40 ton. /mes; Manta con capacidad de 60 ton. /mes y Esmeraldas con capacidad de 100 ton. /mes. La producción total debe ser distribuida entre cuatro ciudades Ambato con un requerimiento de 30 ton / mes; Cuenca con 50 ton / mes; Quito con 65 ton / mes y Tulcán con 55 ton / mes. Los costos por tonelada desde cada planta hacia cada destino son:

	<u>Ambato</u>	<u>Cuenca</u>	<u>Quito</u>	<u>Tulcán</u>
Guayaquil	12	14	10	8
Manta	10	16	8	15
Esmeraldas	14	16	12	20

Determine la combinación óptima de despachos de tal forma que el costo total de distribución sea el mínimo.

Solución

	Ambato	Cuenca	Quito	Tulcán	Total
Guayaquil	12	14	10	8	40
Manta	10	16	8	15	60
Esmeraldas	14	16	12	20	100
Total	30	50	65	55	

Una vez elaborado este primer tablero, lo primero a realizar es la comprobación de que la cantidad ofertada y la cantidad demandada son iguales es decir que el sistema está equilibrado y a continuación asignamos cantidades a cada celda en función del procedimiento arriba descrito. En base a ello, el nuevo tablero es el siguiente:

	Ambato	Cuenca	Quito	Tulcán	Total
Guayaquil	12 30	14 10	10 ---	8 ---	40
Manta	10 ---	16 40	8 20	15 ---	60
Esmeraldas	14 ---	16 ---	12 45	20 55	100
Total	30	50	65	55	

Este nuevo tablero nos muestra la solución básica factible inicial. Su costo total será:

$$CT = (30 \cdot 12) + (10 \cdot 14) + (40 \cdot 16) + (20 \cdot 8) + (45 \cdot 12) + (55 \cdot 20)$$

$$CT = 2.940$$

La solución es de tipo no degenerada (cumple con la condición $m + n - 1 \leq Ca$) debiéndose cumplir con el siguiente programa de despachos:

De Guayaquil a Ambato	30 unidades
De Guayaquil a Cuenca	10
De Manta a Cuenca	40
De Manta a Quito	20
De Esmeraldas a Quito	45
De Esmeraldas a Tulcán	55

Método de aproximación de Vogel

El origen de los modelos de transporte data de 1941 cuando F.L. Hitchcock presentó un estudio titulado “The distribution of a product from several sources to numerous localities” que se considera como la primera contribución importante a la solución de los problemas de transporte. En 1947, T. C. Koopmans presentó su obra “Optimum utilization of the transportation system”, estas dos obras constituyen el pilar fundamental para el desarrollo de los métodos de transporte. Sin embargo, fue William R. Vogel quién comienza a realizar estudios de lo que posteriormente se convirtiera en un modelo de solución y optimización para el problema de transporte.

Este método se basa en el análisis de los costos de transporte y por esta razón es el más utilizado para lograr una asignación inicial. No es complicado y genera muy buenos resultados, probablemente estas sean las razones por las cuales su uso se ha generalizado.

Para Winston (2008), el método de aproximación de Vogel basa su metodología de solución en los siguientes pasos:

Paso # 1

Verificar que oferta y demanda estén equilibradas

Al determinar los volúmenes totales vemos que la oferta es igual a la demanda. Por tanto, el sistema está en equilibrio.

Paso # 2

Encontrar la solución básica factible inicial

Para ello se establece la diferencia (también llamadas penalizaciones) entre los dos costos más bajos para cada fila y columna. De la totalidad se toma el de mayor valor y esa será la fila o columna a considerar. En función de ello ir asignando volúmenes a transportar comenzando con las celdas de costos más bajos hasta que la oferta o demanda se saturen. En este punto corresponde determinar el costo total de la solución básica considerando únicamente las celdas asignadas y los correspondientes costos unitarios.

Optimización de la solución

Paso # 1

Determinar si la solución encontrada es degenerada o no, es decir si cumple con la condición de $m + n - 1$.

Para ello basta simplemente contar los casilleros con volúmenes asignados y verificar si cumple con la condición arriba mencionada. Considere que “m” es el número de filas y “n” el número de columnas. Se dice que una solución básica es degenerada cuando tiene menos variables positivas que el número de restricciones existentes.

En el problema del transporte existen $(m + n - 1)$ restricciones independientes. Si en la solución encontrada, el número de celdas asignadas (rutas) es menor que $(m + n - 1)$, entonces tenemos una solución degenerada.

Paso # 2

Solución no degenerada

Convertir la solución degenerada en una no degenerada agregando el número de ϵ (épsilon) que sean necesarias para hacer cumplir la condición $(m+n-1) \leq C_a$ (celdas asignadas). Esto no es necesario para el caso de una solución no degenerada.

Paso # 3

Cálculo de multiplicadores

Determinar los multiplicadores. El proceso se inicia asumiendo un cero o un 10 a la primera fila o columna (es totalmente arbitrario) para

luego ir calculando los valores para cada una de las celdas en solución. Recomendamos asumir $u = 0$ en la primera fila.

El proceso iterativo habrá culminado cuando en cada una de las celdas que no están en solución cumplen con la condición $v_i + u_j \leq c_{ij}$.

El método de multiplicadores es conocido también como el método de la distribución modificada (MODI). Cabe destacar que si se incrementa el valor de la variable entrante se origina una reacción en cadena que conlleva cambios compensatorios en otras variables básicas en función de no alterar los parámetros de oferta y demanda inicialmente considerados.

A continuación, se presenta el planteo, solución e interpretación de un caso ficticio en el cual el autor explica paso a paso el proceso de solución.

Ejercicio de aplicación

Almidón de maíz modificado

El almidón modificado de maíz es elaborado en 3 plantas diferentes ubicadas en 3 provincias diferentes y requiere ser despachado a 4 clientes localizados en 4 diferentes ciudades dentro del país. Los costos de transporte unitario por tonelada desde cada origen a cada destino y los volúmenes de oferta y demanda en cientos de toneladas/año son los siguientes:

	Dest. # 1	Dest. # 2	Dest. # 3	Dest. # 4	Total, Oferta
Fab. # 1	10	0	20	11	15
Fab. # 2	12	7	9	20	25
Fab. # 3	0	14	16	18	5
Total, Demanda	5	15	15	10	

Se pide determinar los volúmenes óptimos a despachar desde cada fábrica hacia cada destino en función de un costo total mínimo.

Solución

Se comienza por enunciar el problema en los siguientes términos:

“Transportar al menor costo total posible la totalidad de los ítems producidos desde los “m” orígenes hacia los “n” destinos en función de las capacidades de producción de cada origen y los requerimientos de cada destino”.

Se verifica las cantidades ofertadas y demandadas, vemos que están en equilibrio y por tanto pasamos directamente al proceso de asignaciones.

El primer tablero queda de la siguiente forma:

	D1	D2	D3	D4	Total	<u>1</u>	<u>2</u>
O1	10 ---	0 15	20 ---	11 ---	15	10	11
O2	12 ---	7 ---	9 15	20 10	25	2	2
O3	0 5	14 ---	16 ---	18 ---	5	14	---
T.	5	15	15	10			
1	10	7	7	7			
2	---	7	11	9			

335
 $6 \leq 4$ +2
 Degenerada

Elaborado por: los autores

Corresponde ahora convertir la solución degenerada en una no degenerada. Para esto debemos recordar que el número de celdas en solución debe ser igual al número de filas más el número de columnas menos uno. De ser menor se agregará ξ en cada celda vacía en el número que sea necesario. Para el presente ejemplo tenemos que $3 + 4 - 1 = 6$ sin embargo el número de celdas en solución es solamente 4. Esto quiere decir que en dos celdas vacías (seleccionadas al azar) se tiene que agregar ξ . En base a esto tendremos el siguiente tablero:

		5	0	2	13	
		D1	D2	D3	D4	Total
0	O1	10 5 ---	0 15 -	20 2 ---	11 13 +	15
7	O2	12 ξ ---	7 ξ +	9 15 -	20 10 -	25
-5	O3	0 5 ---	14 -5 ---	16 -3 ---	18 8 ---	5
	T.	5	15	15	10	

Análisis para redist.
Agregar 2 ξ

Elaborado por: los autores

Como podemos apreciar, en la fila O2 (columnas D1 y D2) se han agregado las épsilon necesarias y ahora si se cumple la condición $m + n - 1 \leq Ca$. Por tanto, en el mismo tablero se ha realizado la prueba de optimalidad (aplicando el método MODI) asumiendo para la fila O1 el valor de cero. Seguidamente aplicamos $u + v = c$ y obtenemos los valores restantes. Esto se aplica únicamente a cada celda asignada.

Una vez realizado procedemos a calcular los multiplicadores en cada una de las celdas no asignadas y verificamos cuál o cuáles son mayores

que los costos unitarios asignados en cada celda. De todos elegimos la celda que tenga el menor costo e iniciamos el trazado del nuevo ciclo, pero manteniendo en todo momento el balance en función del equilibrio entre oferta y demanda.

Veamos cómo queda el nuevo tablero cumpliendo la condición $m + n - 1$ y aplicando el sistema MODI.

		5	0	2	11	
		D1	D2	D3	D4	Total
0	O1	10 5 ---	0 5	20 2 ---	11 10	15
	O2	12 ξ ---	7 10	9 15	20 18 ---	25
	O3	0 5	14 -5 ---	16 -3 ---	18 6 ---	5
T.		5	15	15	10	

Tabla redistribuida.

CT = 315

$6 \leq 6$

Solución óptima

En este caso vemos que el costo total es de 315 y podemos ver que ninguno de los multiplicadores de las celdas no asignadas supera al costo de transporte unitario. Esto nos indica que hemos llegado a la solución óptima.

Método del costo mínimo

El método del costo mínimo fue desarrollado con el objetivo de resolver problemas de transporte o distribución, arrojando mejores resultados que métodos como el de la esquina noroeste, dado que su objetivo es asignar de entrada la mayor cantidad posible a las rutas de menor costo.

Por lo general determina una mejor solución inicial al concentrarse en las rutas más económicas. Asigna lo más posible a la celda con el costo unitario mínimo (los empates se rompen arbitrariamente). Luego se tacha la fila o columna satisfecha y se ajustan las cantidades de oferta y demanda como corresponda. (Taha, 2004, pág. 189)

Procedimiento

Paso 1

De la matriz se elige la celda con el menor costo (en caso de haber dos o más celdas con costo igual se elige una en forma arbitraria) y se le asigna la mayor cantidad de unidades posible, cantidad que se ve restringida ya sea por las restricciones de oferta o de demanda. En este mismo paso se procede a ajustar la oferta y demanda de la fila y columna afectada, restándole la cantidad asignada a la celda.

Paso 2

En cada etapa se asignará la mayor cantidad posible a la celda que le sigue con menor costo y así se prosigue hasta llegar al final de la matriz.

Paso 3

Se procede al cálculo del costo total.

Ejercicio de aplicación

Empacadora de mariscos

Vamos a tomar el mismo ejercicio de la esquina noroeste lo cual aprovechamos para dimensionar las diferencias entre los dos métodos.

El proceso de solución comienza identificando el casillero con el menor costo unitario de transporte. A ese casillero se le asigna la mayor carga posible en función de la oferta y la demanda. Se continúa el proceso llenando las casillas en orden ascendente del costo de transporte hasta completar el tablero.

	Ambato	Cuenca	Quito	Tulcán	Total
Guayaquil	12 ---	14 ---	10 ---	8 40	40
Manta	10 ---	16 ---	8 60	15 ---	60
Esmeraldas	14 30	16 50	12 5	20 15	100
Total	30	50	65	55	

El costo total de la solución básica factible inicial es:

$$CT = (40 \cdot 8) + (60 \cdot 8) + (30 \cdot 14) + (50 \cdot 16) + (5 \cdot 12) + (15 \cdot 20)$$

$$CT = 2.380$$

Esta solución inicial nos dice que se debe despachar las siguientes cantidades:

De Guayaquil a Tulcán	40 unidades
De Manta a Quito	60
De Esmeraldas a Ambato	30
De Esmeraldas a Cuenca	50
De Esmeraldas a Quito	5
De Esmeraldas a Tulcán	15

Para el mismo ejercicio, con el método de la esquina noroeste obtuvimos para la solución inicial un costo de 2.940 el cual está muy distante del costo obtenido con el método del costo mínimo. Esto se debe a que el método noroeste no considera los costos de transporte unitario para generar la primera solución.

Optimización de la solución

Hasta ahora solo hemos determinado el costo total de la solución básica inicial lo cual no significa que sea el óptimo. Para los tres métodos de solución podemos aplicar el sistema MODI para optimizar los resultados.

Verificar si la solución es de tipo degenerada o no degenerada es decir si se cumple la condición $m + n - 1 \leq Ca$. Esto significa número de filas + número de columnas - 1 menor o igual al número de celdas asignadas.

Para el presente caso tenemos:

$$3 + 4 - 1 \leq 6$$

Esto nos dice que estamos ante una solución no degenerada y por tanto podemos proceder a calcular los multiplicadores. Entendemos por solución no degenerada el hecho de que la solución encontrada tenga $(m + n - 1)$ celdas en solución.

Para cada variable básica X_{ij} de la solución actual, se escribe la ecuación $U_i + V_j = C_{ij}$. Esas ecuaciones proporcionan $m + n - 1$ relaciones con $m + n$ incógnitas.

Los valores de los multiplicadores pueden ser determinados a partir de las ecuaciones suponiendo un valor arbitrario para cualquiera de los multiplicadores (usualmente se establece $U_1=0$) y resolviendo el sistema de ecuaciones para encontrar los multiplicadores desconocidos.

Apliquemos el método de multiplicadores MODI ($u_i + v_j = C_{ij}$) a la solución hallada en el ejercicio de la empacadora de mariscos aplicando el método de la esquina noroeste. Los “ u_i ” corresponden a los orígenes y los “ v_j ” a los destinos.

		12	14	6	14	
		Ambato	Cuenca	Quito	Tulcán	Total
0	Guayaquil	12 30	14 10	10 ---	8 ---	40
2	Manta	10 ---	16 40	8 20	15 ---	60
6	Esmeraldas	14 ---	16 ---	12 45	20 55	100
		30	50	65	55	

$$C_t = (30 \cdot 12) + (10 \cdot 14) + (40 \cdot 16) + (20 \cdot 18) + (45 \cdot 12) + (55 \cdot 12) = 2.940.$$

$3 + 4 - 1 \leq 6$ Significa que se trata de una solución no degenerada.

Basado en esto, procedemos a determinar los multiplicadores ($u + v = c$). Una vez realizado, verificamos si alguno o varios de esos multiplicadores (celdas no asignadas) superan el costo unitario de transporte procediendo a sombrear los que correspondan.

De todos los sombreados seleccionamos el que tenga el menor costo unitario y lo marcamos con un signo $+$. La siguiente deberá ser una celda asignada para poder restar lo que sumamos a la anterior. La marcamos con un signo $-$ (menos). La tercera celda puede ser asignada o no y será marcada con un signo $+$ e indica que debemos sumar lo que se restó en la celda anterior. Finalmente, la cuarta celda será marcada con un signo $-$ (menos) y denota que se le debe restar lo sumado en la celda anterior, por lo tanto, deberá ser una celda asignada.

Todo este procedimiento no es otra cosa que dar cumplimiento al equilibrio que debe haber entre la oferta y la demanda y para ello usamos la herramienta de ciclo de reajuste.

El tablero siguiente demuestra todo lo aquí expresado.

		12	14	6	14	
		Ambato	Cuenca	Quito	Tulcán	Total
0	Guayaquil	12 30 ←	14 10	10 6 ---	8 14 + ---	40
2	Manta	10 14 ---	16 40	8 20	15 16 ---	60
6	Esmeraldas	14 18 +	16 20 ---	12 45 →	20 55 -	100
		30	50	65	55	

En base a estos nuevos multiplicadores se genera el siguiente tablero:

		8	14	6	8	
		Ambato	Cuenca	Quito	Tulcán	Total
0	Guayaquil	12 8 ---	14 10	10 6 ---	8 30	40
2	Manta	10 10 ---	16 40	8 20	15 10 ---	60
6	Esmeraldas	14 30	16 20 ---	12 45	20 25	100
	Total	30	50	65	55	

$$Ct = (10 \cdot 14) + (30 \cdot 8) + (40 \cdot 16) + (20 \cdot 8) + (30 \cdot 14) + (45 \cdot 12) + (25 \cdot 20)$$

$$Ct = 2.640$$

$3 + 4 - 1 \leq 7$ Significa que se trata de una solución no degenerada.

Vemos que solo un multiplicador supera el costo unitario de transporte (se encuentra en la intersección de la fila tres con columna 2). Se

procede igual que en los tableros anteriores incluyendo el trazado del nuevo ciclo con lo cual llegamos al siguiente tablero:

		12	14	10	8	
		Ambato	Cuenca	Quito	Tulcán	Total
0	Guayaquil	12 12 ---	14 14 ---	10 10 ---	8 30	40
2	Manta	10 10 ---	16 40	8 20	15 6 ---	60
2	Esmeraldas	14 30	16 10	12 35	20 25	100
	Total	30	50	65	55	

$$Ct = (10 \cdot 10) + (30 \cdot 8) + (40 \cdot 16) + (20 \cdot 8) + (30 \cdot 14) + (10 \cdot 16) + (35 \cdot 12) + (25 \cdot 20)$$

$$Ct = 2.640$$

$3 + 4 - 1 \leq 8$ Significa que se trata de una solución no degenerada.

Vemos que el costo total se mantiene inalterable. Eso es una primera señal de que estamos en el óptimo. La segunda es que ningún multiplicador supera los costos unitarios de transporte.

En este punto ya podemos decir que la solución óptima al problema planteado es la siguiente:

	Ambato	Cuenca	Quito	Tulcán	Total
Guayaquil	12	14	10 10	8 30	40
Manta	10	16 40	8 20	15	60
Esmeraldas	14 30	16 10	12 35	20 25	100
Total	30	50	65	55	

Selección del método

Por la no inclusión de los costos desde el inicio del análisis, el método de la esquina noroeste es poco utilizado.

El método de Vogel experimentalmente ha demostrado ser el más apropiado y ello se debe a que sí considera los costos de transferencia desde el inicio. Es probable que con este método se llegue al óptimo sin mucho esfuerzo.

El método del costo mínimo se lo recomienda como segunda opción. Después de Vogel es el que requiere menor esfuerzo para llegar a la solución óptima.

Para los tres casos podemos utilizar la misma metodología de optimización como lo es sistema MODI (Modificación de la distribución) o método de multiplicadores. Este proceso de optimización no reviste complejidad alguna.

El problema de asignación

Dos tipos particularmente importantes (y relacionados entre sí) de problemas de programación lineal, son el problema de transporte y el problema de asignación. En el capítulo anterior hemos analizado lo concerniente al tipo I donde de forma amplia y sencilla se enfocan las diferentes metodologías de transporte en función de un costo total mínimo.

El segundo tipo, llamado problema de asignación, incluye aplicaciones tales como asignar personas a tareas. Aunque sus aplicaciones parecen diferir del problema de transporte, se verá que este problema es un caso especial del problema de transporte.

El problema de asignación es un tipo especial de problema de programación lineal en el que los asignados son recursos destinados a la realización de tareas. Por ejemplo, los asignados pueden ser empleados de la empresa a quienes se tiene que dar trabajo. La asignación de personas a trabajos es una aplicación común del problema de asignación. Sin embargo, los asignados no tienen necesariamente que ser personas dado que también pueden ser máquinas, vehículos, plantas a los que se asignan tareas. Para que se ajuste a la definición de problema de transporte se deben cumplir los siguientes enunciados:

- El número de asignados es igual al número de tareas. (este número se denota por “ n ” pudiendo ser máquinas, actividades, etc.).
- Cada asignado se orienta a una sola, tarea, máquina o actividad.
- Cada tarea debe realizarla exactamente un asignado.
- Existe un costo c_{ij} asociado con el asignado i ($i = 1, 2, \dots, n$) que realiza la tarea j ($j = 1, 2, \dots, n$).
- El objetivo es determinar cómo deben hacerse las n asignaciones para minimizar los costos totales.

Cualquier problema que satisface estas suposiciones puede resolverse en forma extremadamente eficiente mediante los algoritmos diseñados especialmente para los problemas de asignación.

Sea Z el costo total, el modelo del problema de asignación es:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Sujeta a:} & \sum_{j=1}^n X_{ij} & \text{para } i = 1, 2, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n X_{ij} & \text{para } j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Observe que la estructura es similar al modelo de transporte. De hecho, el problema de asignación es solo un caso especial de los problemas de transporte, en donde los orígenes son ahora los asignados, y los destinos son las asignaciones o tareas y donde:

Numero de orígenes (m) = número de destinos (n).

Cada recurso $s_i = 1$

Cada demanda $d_j = 1$

En general, la asignación tiene que ver con personas, pero también se utiliza para asignar plantas industriales, vehículos e incluso periodos de tiempo con tareas específicas.

La importancia de presentar y resolver el modelo de asignación radica en que se busca optimizar algún objetivo como:

- Minimizar tiempos de producción.
- Minimizar costos de asignación.
- Minimizar defectos de producción.

Una de las actividades más comunes en los negocios es la asignación de la persona “ideal” para la eficiente realización de una tarea en particular; sin embargo, la manera de realizar esta asignación presenta ciertas dificultades implícitas, por ejemplo, ¿quién es la persona indicada para cada tarea?, ¿es mínimo el costo de esta asignación?, así como ¿qué tipo de argumento soporta la asignación realizada?

Estas preguntas encuentran respuesta en el modelo de asignación y su solución.

Algoritmo general del método húngaro

Una vez definido el problema de asignación, se siguen los siguientes pasos:

- Construir una tabla de $n + 1$ por $n + 1$ filas y columnas. En la primera columna, a partir de la segunda fila, colocar las etiquetas de los candidatos a asignar. En la primera fila, a partir de la segunda columna, colocar las etiquetas de las tareas. Los costos de la asignación i a la tarea j se colocan en la intersección de la fila con la columna correspondiente.
- Identificar el costo menor por fila y restarlo a todos los elementos de la fila correspondiente.
- En la tabla que resulte del punto anterior, identificar el costo menor por columna y restarlo a todos los elementos de la columna correspondiente.
- Verificar si en cada fila y columna se cumple la condición de optimalidad es decir que exista un solo cero en cada fila o columna.

De no darse la condición de optimalidad, se procede a:

- Entrelazar todos los ceros de la tabla con el menor número de líneas verticales y horizontales y verificar si el número de rayas es igual al tamaño de la matriz.
- Si el número de líneas no es igual al número de filas (o columnas), seleccionar el valor menor no rayado y procedemos a restarlo a todos los demás números no cubiertos. Se complementa el procedimiento sumando el mismo número a los valores ubicados en los cortes de las líneas que unen los ceros.
- Los costos cubiertos por una sola línea permanecen iguales.

Ejercicio de aplicación

Asignación de personas

Disponemos de cuatro personas para asignarlas a cuatro tareas diferentes. Cada una de las personas tiene a su haber una puntuación relativa para el desempeño de cada tarea según se muestra en el siguiente cuadro:

	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Persona 1	2	6	3	5
Persona 2	1	2	5	3
Persona 3	4	3	1	5
Persona 4	2	4	1	5

Se pide asignar cada obrero a cada tarea en función de optimizar el rendimiento.

Solución

La tabla arriba mostrada corresponde a la matriz de puntuaciones relativas de cada persona en cada tarea.

A continuación, determinaremos los costos de oportunidad restando el menor valor en cada fila y columna obteniendo los siguientes valores:

	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Persona 1	0	4	1	3
Persona 2	0	1	4	2
Persona 3	3	2	0	4
Persona 4	1	3	0	4

En esta matriz, los valores diferentes de cero son los costos de oportunidad que resultarían de no asignar la persona idónea al puesto más adecuado.

Veamos ahora los costos de oportunidad para cada columna.

	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Persona 1	0	3	1	1
Persona 2	0	0	4	0
Persona 3	3	1	0	2
Persona 4	1	2	0	2

Como se puede apreciar, no se cumple la condición de optimalidad es decir un cero en cada fila y columna por tanto se debe continuar con el siguiente paso el cual consta de dos fases:

Fase # 1

Entrelazar todos los ceros que hay en la matriz última utilizando el menor número de líneas tanto horizontales como verticales. Si

el número de líneas (rayas) es igual al número de filas o columnas (tamaño de la matriz), entonces ya hemos llegado a una solución. La matriz resultante es la siguiente:

	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Persona 1	0	3	1	1
Persona 2	0	0	4	0
Persona 3	3	1	0	2
Persona 4	1	2	0	2

Como podemos ver el número de rayas utilizado fue de tres por tanto no hemos llegado a la solución del problema. En consecuencia, pasamos a la siguiente fase tal como sigue:

Fase # 2

Esta fase consiste en modificar la matriz. El procedimiento se inicia seleccionando en número más pequeño que no esté cruzado por las líneas. Ese número lo sumamos a todos los valores que se encuentran en las intersecciones de las líneas (tablero anterior) y se lo resta a todos los números no cruzados. En la tabla anterior vemos que ese número es el uno y aplicando el procedimiento tenemos:

	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Persona 1	0	2	1	0
Persona 2	1	0	5	0
Persona 3	3	0	0	1
Persona 4	1	1	0	1

En este punto regresamos a aplicar la fase 1 y vemos que para cruzar todos los ceros hemos utilizado cuatro líneas (menos no es posible) y por tanto esta es la solución. A efectos de definir qué persona será asignada a qué tarea procedemos a identificar las columnas que tengan solo un cero.

La columna T1 tiene un solo cero y por tanto la Persona 1 se asigna a la tarea 1. La fila P1 y la columna T1 quedan fuera de consideración y eso nos permite asignar la persona 2 a la tarea 4; la persona 3 a la tarea 2 y finalmente la persona 4 a la tarea 3.

Retomamos ahora el tablero inicial y nos centramos a determinar la eficiencia de la solución alcanzada. La eficiencia en este caso equivale la mayor puntuación relativa obtenida. En el presente caso será: $2 + 3 + 1 + 3 = 9$.

Ejercicios propuestos

Se tienen 4 depósitos para abastecer 4 clientes con el menor recorrido total.

	CL - 1	CL - 2	CL - 3	CL - 4
DEP - 1	230	200	210	240
DEP - 2	190	210	200	200
DEP - 3	200	180	240	220
DEP - 4	220	180	210	230

Determine con cuál depósito se atenderá a cada cliente.

Asignación de vendedores

Se tienen 4 vendedores para ser asignados a 4 destinos con el menor recorrido total.

	D - 1	D - 2	D - 3	D - 4
VEN - 1	13	7	2	1
VEN - 2	5	18	8	6
VEN - 3	8	3	11	15
VEN - 4	4	2	5	3

Determine para cada vendedor el destino que le corresponde.

PUNTO DE EQUILIBRIO Y TEORÍA DE INVENTARIOS

Capítulo 3

PUNTO DE EQUILIBRIO Y TEORÍA DE INVENTARIOS

El punto de equilibrio, también llamado umbral de rentabilidad o punto muerto en términos de contabilidad de costos, es aquel punto de actividad (volumen de ventas) en donde los ingresos son iguales a los egresos, es decir, es el punto de actividad en donde no existe utilidad pero tampoco existe pérdida. (BACA URBINA, 2006, pág. 175)

Hallar el punto de equilibrio es hallar el nivel de actividad en donde los ingresos por ventas son iguales a los costos. En otras palabras, el margen de contribución total cubre la totalidad de los costos fijos eliminando de esa manera la posibilidad de pérdidas.

Podemos decir entonces que el punto de equilibrio constituye un parámetro de medición por demás importante que nos permite tomar decisiones vitales para la empresa.

Procedimiento de cálculo

Definir costos

Lo usual es considerar como costos a todos los desembolsos, incluyendo los gastos de administración y de ventas, pero sin incluir los gastos financieros ni los impuestos. Cuando se trata de un pequeño negocio es preferible considerar como costos a todos los desembolsos de la empresa, incluyendo los gastos financieros y los impuestos.

Clasificación de los costos

Una vez que hemos definido, debemos clasificarlos en Costos Variables y en Costos Fijos:

- **Costos Variables:** son los costos que varían de acuerdo con los cambios en los niveles de actividad, están relacionados con el número de unidades vendidas, volumen de producción o número de servicios realizado; ejemplos de costos variables son los costos incurridos en materia prima, combustible, salario por horas, etc.
- **Costos Fijos:** son costos que no están afectados por las variaciones en los niveles de actividad; ejemplos de costos fijos son los sueldos y salarios, alquileres, la depreciación, los seguros, etc.

Costo variable unitario

En siguiente paso consiste en hallar el Costo Variable Unitario (CVU), el cual se obtiene al dividir los Costos Variables Totales entre el número de unidades producidas y vendidas (Q).

Metodología de cálculo

Cálculo en unidades:

$$Pe = \frac{CF}{(PVU - CVU)}$$

Por definición sabemos que $PVU - CVU = mc$ (margen de contribución).

Entonces podemos decir también:

$$Pe = \frac{CF}{mc}$$

Dónde:

Pe: punto de equilibrio (unidades a vender de tal modo que los ingresos sean iguales a los costos).

CF: costos fijos.

PVU: precio de venta unitario.

CVU: costo variable unitario.

El resultado de la fórmula será en unidades físicas; si queremos hallar el punto de equilibrio en unidades monetarias, simplemente debemos multiplicar el resultado por el precio de venta.

Ingreso en el punto de equilibrio

Podemos también determinarlo mediante el siguiente modelo:

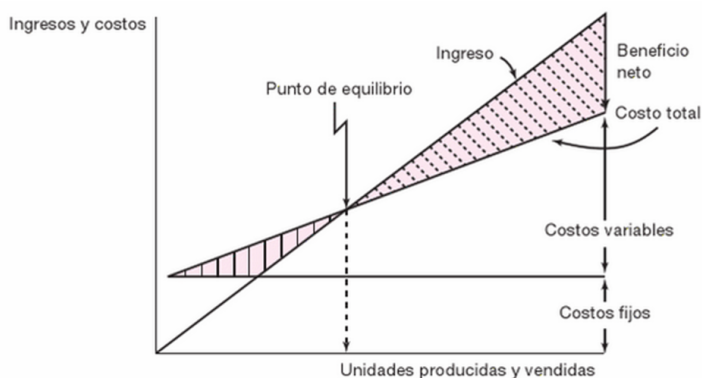
$$Pe = \frac{CF}{1 - \frac{CVU}{PVU}}$$

Otra forma de calcular el ingreso en el punto de equilibrio es multiplicar el punto de equilibrio en unidades por el costo unitario.

Una vez hallado el punto de equilibrio, podemos verificarlo mediante la elaboración de un estado de resultados es decir que al ingreso le restamos los costos variables y el resultado debe ser el valor de los costos fijos.

El que una empresa alcance el punto de equilibrio implica que con sus ventas se están cubriendo tanto los costos fijos como los costos variables. A partir de este punto se dice que una actividad o proyecto es rentable.

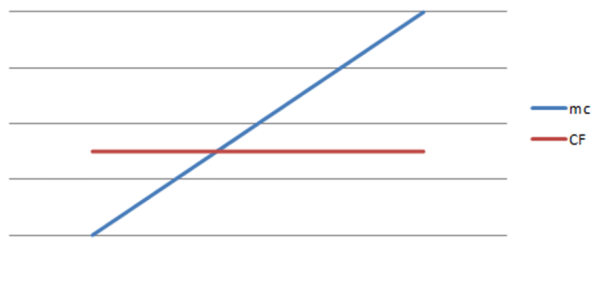
Gráficamente el punto de equilibrio se representa de la siguiente forma:



Si por el contrario, no se logra alcanzar el punto de equilibrio, la empresa está perdiendo dinero, mientras más produzca más pierde. Ante este escenario la lógica nos dice que el negocio debe ser cerrado. Para el empresario, el punto de equilibrio constituye un firme apoyo al momento de la toma de decisiones.

El punto de equilibrio es importante a la hora de querer vender una empresa pues será el que nos diga si el negocio es rentable o no.

El punto de equilibrio también puede ser determinado por métodos gráfico que incluye la curva del margen de contribución, pero solo para determinar el número de unidades.



Como se puede apreciar, por el punto de encuentro de las dos curvas trazamos una perpendicular al eje X y habremos encontrado la cantidad de equilibrio. Cabe repetir, este método no proporciona el costo, si intentamos hacerlo tendríamos que proyectar el punto de corte con una perpendicular al eje Y y obtendríamos el costo fijo.

Ejercicio de aplicación

Comerciante

Un comerciante alquila un local en US\$125 por semana. Su actividad es comprar un determinado ítem en US\$18.5 para venderlo en US\$29.

El comerciante aspira a fijarse un sueldo de US\$250 semanales por lo cual solicita le determinen su punto de equilibrio.

Si el mencionado comerciante aspira a reunir una utilidad de US\$15.000 al final de cada año, ¿En qué medida se modifica el punto de equilibrio?

Solución

$$Pe = \frac{(125*4)+(250*4)}{(29-18.5)} = \frac{500+1000}{10.5} = 142.9 \text{ U.}$$

Considerando la utilidad anual que espera tener, el punto de equilibrio cambia en los siguientes términos:

$$Pe = \frac{(125*4)+(250*4)+15000}{(29-18.5)} = \frac{500+1000+15000}{10.5} = 1.571.4 \text{ u.}$$

Podemos también calcularlo mediante el método de ecuaciones tal como sigue.

Sea Q la cantidad a vender del ítem en el punto de equilibrio, entonces podemos plantear la siguiente ecuación:

$$18.5Q + (500+1000+15000) = 29Q$$

$$10.5Q = 16500$$

$$Q = 16500 / 10,5$$

$$Q = 1.571.4 \text{ u.}$$

Ejercicio de aplicación

Comprar o fabricar

Para fabricar un determinado producto, una empresa tiene por costo fijo la cantidad de US\$100.000 por año y del proceso de producción se desprende que el costo variable unitario de US\$400. El mismo producto podría comprárselo en el mercado a US\$600 por unidad.

¿Qué le conviene más a la empresa: comprarlo o fabricarlo?

Solución

Sea Q la cantidad a vender. Para tener una condición de equilibrio en la cual comprar es igual a fabricar se genera la siguiente ecuación:

$$600Q = 400Q + 100.000$$

Resolviendo tenemos que $Q = 500 \text{ u.}$

La interpretación es la siguiente:

Para valores inferiores a 500 la decisión es comprar.

Para valores superiores a 500 la decisión es fabricar.

Ejercicio de aplicación

Industria automotriz

Un fabricante de autos a diésel ha decidido ingresar al mercado europeo en donde mayoritariamente se da preferencia a los motores a gasolina. Para ofertar el vehículo tienen dos opciones: fabricar o comprar el motor.

Producirlo representa una planta industrial con costos fijos anuales de Um100.000. y un costo variable por fabricación de cada motor de Um3.000. Por el contrario, comprarlo costaría Um4.500.

¿A partir de qué nivel de ventas será rentable producir el motor?

Sea Q el número de motores a utilizar.

$$4500Q = 3000Q + 100000$$

$$1500Q = 100000$$

$$Q = 66.6 \text{ motores.}$$

La interpretación es la siguiente:

Para valores inferiores a 66.6 la decisión es comprar.

Para valores superiores a 66.6 la decisión es fabricar.

Ejercicios de aplicación

Punto de equilibrio – método gráfico

Un comerciante alquila un local en US\$500 por mes. Su actividad es comprar un determinado ítem en US\$7 para comercializarlo en US\$8.

Encontrar el PE en unidades y dinero usando fórmulas determinísticas, modelo de ecuaciones y el método gráfico de la curva del margen de contribución.

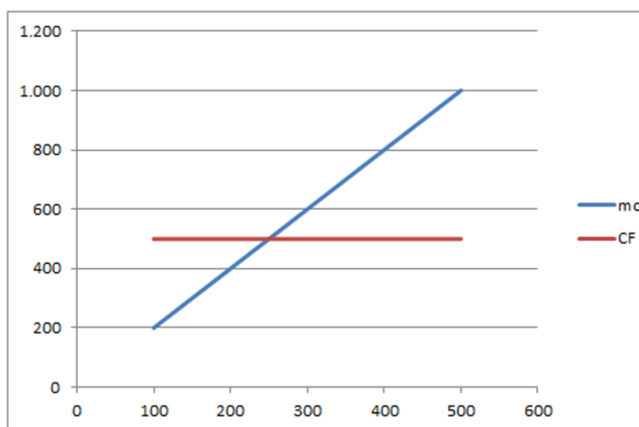
$$PE = \frac{500}{9-7} = 250 \text{ u.}$$

$$\text{Ingreso en el PE} = 250 * 9 = 2.250$$

Sea Q el nivel de ventas en el PE. Sabemos que en el PE el ingreso es igual al egreso, entonces:

$$9Q = 7Q + 500$$

$$Q = 250 \text{ u}$$



Para la graficación hemos utilizado los cuadros mostrados a continuación. El primero nos permite asumir niveles de venta para luego definir los márgenes de contribución por cada nivel de ventas asumido.

El segundo nos permite definir los parámetros que nos permitirán realizar la graficación.

	<u>100</u>	<u>150</u>	<u>200</u>	<u>300</u>
Ingreso	900	1.350	1.800	2.700
Egreso	700	1.050	1.400	2.100
Margen de Cont.	200	300	400	600

<u>Q</u>	<u>mc</u>	<u>CF</u>
100	200	500
150	300	500
200	400	500
250	500	500
300	600	500
500	1.000	500

Ejercicio de aplicación

Camisería

Un almacén de ropa para hombres que se dedicada a la comercialización de camisas promociona un modelo exclusivo a un precio de US\$40, el costo variable de cada camisa es de US\$24, se paga una comisión de ventas por US\$2, y sus gastos fijos (alquiler, salarios, servicios, etc.), ascienden a US\$3 500. ¿Cuál es el punto de equilibrio en unidades de venta y en dólares? y ¿a cuánto ascenderían las utilidades si se vendieran 800 camisas?

Solución

$$Pe = \frac{CF}{(PVU - CVU)} = \frac{3500}{(40 - (24 + 2))} = 250 \text{ u}$$

$$U = (PV * 800) - (CV * 800) - CF$$

$$U = (40 * 800) - (26 * 800) - 3.500 = 32.000 - 20.800 - 3.500 = 7.700$$

Molienda de cacao

El Gerente de Ventas de una fábrica de molinos para cacao acaba de anunciar que el presupuesto de ventas para el próximo año será de 240 unidades a un precio de venta unitario de US\$3.400. Con esta información, el área de operaciones está analizando la situación a efectos de emitir una opinión técnica respecto de la rentabilidad operativa.

Se ha determinado que el costo variable de producción de cada molino es de US\$2.950 y que los costos fijos ascienden a US\$25.000 al año. ¿Es rentable o no?

Solución

$$Pe = \frac{CF}{(PVU - CVU)} = \frac{25.000}{(3.400 - 2.950)} = \frac{25.000}{(40 - (24 + 2))} = 450 \text{ u}$$

Para que la empresa esté en punto de equilibrio requiere un volumen de ventas de 450 u. Como en este caso el presupuesto está fijado en 240 u la solución es rechazar la propuesta a menos que se reajuste la cantidad presupuestada.

Punto de equilibrio para varios productos

A diferencia del análisis precedente, aquí se considera el margen de contribución ponderado con lo cual la fórmula se expresa de la siguiente manera:

$$PE = \frac{CF}{mcp}$$

Donde mcp representa al margen de contribución ponderado.

A través del siguiente ejemplo tendremos una visión mucho más clara del procedimiento a aplicar.

Ejercicio de aplicación para varios productos

En el cuadro se muestra la estructura de ventas de una empresa. Se sabe que los costos fijos ascienden a US\$100.000.

PRODUCTO	PARTICIPACION EN VENTAS (%)	US\$ COSTO VARIABLE (u)	US\$ PRECIO DE VENTA (u)
A	30	250	380
B	20	170	270
C	10	310	450
D	40	30	47.5

Determine la cantidad a vender de cada producto de tal forma que la empresa se ubique en el punto de equilibrio.

<u>MARGEN</u>		
<u>PRODUCTO</u>	<u>CONTRIB.</u>	<u>PONDER.</u>
A	130	39
B	100	20
C	140	14
D	17,5	7
		80

Si ya conocemos el total de costos fijos (US\$100.000) y el margen de contribución ponderado (US\$80) entonces ya podemos calcular el total a vender en el punto de equilibrio.

$$PE = \frac{CF}{mcp} = \frac{100.000}{80} = 1.250 \text{ u.}$$

Veamos ahora como distribuir estas 1.250 u entre los cuatro productos a comercializar. Lo hacemos de la siguiente forma:

<u>PRODUC.</u>	<u>% PARTICIP.</u>	<u>VENTAS P.E.</u>
A	30	375
B	20	250
C	10	125
D	40	500
		1250

Como se puede ver, de esta manera se distribuyen las 1.250 unidades requeridas entre los cuatro productos elaborados.

Una forma de verificar la validez de las cifras es la siguiente:

<u>PRODUCTO</u>	<u>Ventas PE</u>	<u>Precio</u>	<u>Ingreso</u>	<u>Cvu</u>	<u>CVt</u>
A	375	380	142500	250	93750
B	250	270	67500	170	42500
C	125	450	56250	310	38750
D	500	47,5	23750	30	15000
			290000		190000

El total de ingresos es de US\$290.000 mientras que el costo variable total es de US\$190.000 lo que nos indica que la diferencia entre el ingreso y el costo variable es de US\$100.000 exactamente el valor correspondiente al costo fijo. Queda comprobada la validez de los valores calculados.

En la actualidad, la administración de inventarios es uno de los retos más importantes que enfrentan los directivos en cuestión de administración, planificación y control, sobre todo en empresas de manufactura. Aunque técnicamente los inventarios constituyen un activo en el balance general de la compañía, casi todos los ejecutivos

contables o financieros consideran que mantenerlos implica un gasto significativo, y que su misión será siempre minimizarlo.

Los inventarios han existido desde tiempos inmemoriales. Desde la antigüedad se conoce de pueblos que almacenaban grandes cantidades de alimento para satisfacer las necesidades de manera oportuna.

Modelo general de inventario

El problema del inventario tiene que ver con guardar en reserva un artículo para satisfacer las fluctuaciones de la demanda. El exceso de existencias de un artículo aumenta el costo del capital y de almacenamiento, y la escasez de existencias interrumpe la producción y/o las ventas. El resultado es buscar un nivel de inventario que balancee las dos situaciones extremas minimizando una función de costo apropiada. El problema se reduce a controlar el nivel del inventario diseñando una política de inventario que responda a dos preguntas:

¿Cuánto pedir?

¿Cuándo pedir?

La naturaleza del problema de los inventarios (o existencias) consiste en colocar y recibir en forma repetida pedidos (u “órdenes”) de determinados tamaños a intervalos de tiempo establecidos.

La respuesta de estas preguntas se basa en minimizar el siguiente modelo de costo:

Inventario = Compra + Preparación + Almacenamiento + Escasez
(Taha, 2004, pág. 429)

- El costo de compra es el precio por unidad de un artículo de inventario.
- El costo de preparación representa el cargo fijo en que se incurre cuando se coloca un pedido (no importa su tamaño).
- El costo de almacenamiento representa el costo de mantener las existencias. Incluye el interés sobre el capital y el costo del mantenimiento y manejo.
- El costo por escasez (faltante) es la penalización en que se incurre cuando se agotan las existencias. Incluye la pérdida potencial de ingresos, la interrupción de la producción y el costo subjetivo de pérdida de lealtad del cliente. (Lieberman, Introducción a la Investigación de Operaciones, 2010, pág. 776)

Podemos definir el inventario en los siguientes términos:

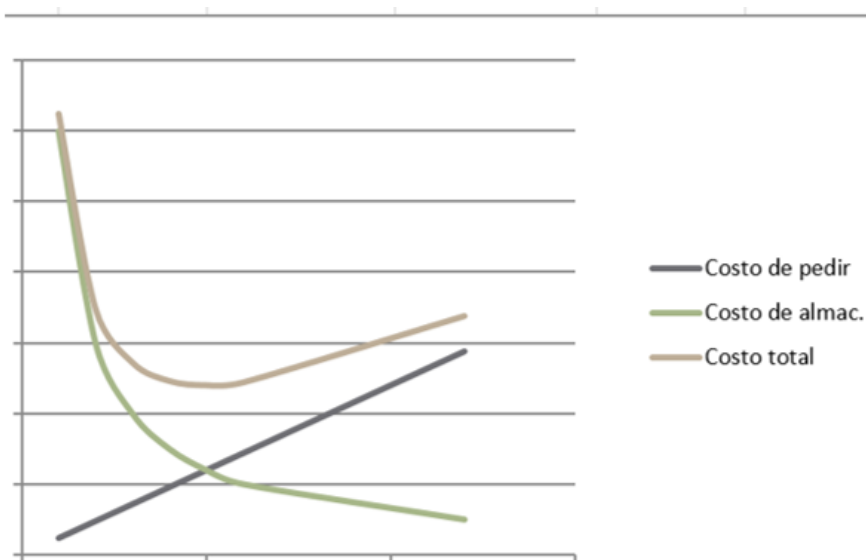
“Conjunto de recursos almacenados en espera de ser utilizados en procesos industriales o comerciales manteniendo en equilibrio los costos inherentes a dicha gestión”.

En el siguiente gráfico se presentan los diferentes factores que intervienen en la correcta administración del inventario tales como costos de almacenamiento y preparación, así como el costo total.

La empresa de manufactura planifica y utiliza su capacidad de almacenaje con anticipación a la demanda. La empresa de servicios promedio no puede darse el lujo sino una vez que la demanda ha sido generada.

Gran parte del inventario representa el uso de la capacidad de la empresa para crear un producto con anticipación a la demanda real por el mismo.

En casi todas las empresas, el inventario es un síntoma de la forma en que se dirige el negocio. En muchos casos suele ser muy costoso. Para una mejor comprensión, en el siguiente gráfico se muestran los diferentes parámetros debidamente identificados.



Tipos de inventarios

Según (Tawfik, 1998, pág. 170) los inventarios se clasifican en:

Inventario de Materia Prima (M.P.)

Constituye el inventario que debe adquirirse en forma eficiente para utilizarlo en el proceso de producción. No tiene un valor agregado por efectos del proceso de producción de la compañía.

La reposición apropiada de materia prima de por si constituye garantía para la continuidad de los procesos productivo y comercial.

Inventario de Productos en Proceso (P.P.)

Representa el inventario que por efectos del proceso productivo ya ha recibido algún valor agregado, pero que todavía debe sufrir un procesamiento adicional antes de poder utilizarlo para atender la demanda de los clientes. Corresponde a materiales en proceso de producción.

Inventario de Productos Terminados (P.T.)

Representan el inventario de aquellos productos que han pasado ya por todo el procesamiento de parte de la empresa. Por lo general dicho inventario se encuentra listo para atender la demanda de los clientes.

En esta fase la materia prima inicial ya recibió la totalidad del valor agregado generado por el proceso de producción. Representa los productos elaborados con los materiales e insumos que ingresaron al proceso.

Por su función se clasifican en:

Inventario de reserva

Es el contingente que se mantiene para garantizar la continuidad de los procesos de manufactura o comercialización.

Inventario en tránsito

Corresponde a los pedidos ya colocados a los diferentes proveedores pero que aún no han sido despachados.

La gestión de inventarios y los costos

Muchos problemas sobre decisiones relativas a los inventarios pueden resolverse con criterios económicos. No obstante, uno de los prerrequisitos más importantes es entender la estructura de costos. Las estructuras del costo del inventario incorporan los siguientes tipos de costo: (Schroeder, 2006, pág. 357)

Costos de inventarios

Cuanto mayor sea el costo promedio de los inventarios mayor será la incidencia en los costos de producción. Por lo general, los costos relacionados con los inventarios comprenden los costos del ítem, costos de colocación de pedido, costos de mantenimiento y costos de agotamiento.

Costo del Ítem

Se refiere al precio de compra del artículo comprado o manufacturado. Para el caso del ítem comprado, a más del precio se deben incluir transporte e impuestos. Es importante se consideren descuentos por volumen de compra. Para el caso de los artículos manufacturados deben incluirse los costos de materia prima, mano de obra, distribución.

Costo de colocación del pedido

Engloba actividades de compra, preparación de especificaciones, documentos y órdenes de compra, seguimiento a los proveedores e inspección de ítems al arribo.

Costos de mantenimiento

Son los gastos generados al mantener los inventarios en el almacén o bodega. Entre los más importantes tenemos alquiler, electricidad, impuestos, pérdidas, obsolescencia, primas de seguro y costos de mano de obra.

Costos de agotamiento

Son todos los gastos que se derivan por la falta de existencias de materia prima o producto terminado, entre otros pueden ser:

- Costo de penalización por falta de material.
- Multas por incumplimiento.
- Costo por pérdida potencial del cliente por no surtir a tiempo el material.
- Implica reducción de cartera por migración de clientes hacia otros proveedores.
- Pérdida de imagen empresarial.

Esto origina que la empresa no pueda satisfacer por completo el pedido de un cliente. Cuando la existencia de un ítem se agota, será necesario esperar la correspondiente reposición del mismo. Con frecuencia, el costo generado por faltantes afecta en mucho la rentabilidad de la empresa. (Chase - Jacobs - Aquilano, 2009, pág. 549)

Modelos de inventarios

Debido a que las políticas de inventarios afectan las ganancias, la elección entre una política y otra depende de su rentabilidad relativa. Algunos de los rubros que determinan esta rentabilidad son: ingresos;

costos de ordenar o fabricar; costos de mantener o almacenar y costos de penalización por faltantes o demanda insatisfecha. Otros costos relevantes incluyen, costos de recuperación, tasas de descuento, etc. (Lieberman, Introducción a la Investigación de Operaciones, 2010, pág. 775)

Básicamente encontramos los siguientes:

Modelos determinísticos

Un factor importante en la formulación de un modelo de inventario es que la demanda (por unidad de tiempo) es que la demanda sea de tipo determinística o probabilística.

Política de inventarios

Es un procedimiento llevado a cabo para auxiliar a los responsables al momento de responder a las dos siguientes preguntas:

¿Cuánto ordenar? ¿Cuándo ordenar?

La respuesta a la primera pregunta determina el lote económico de compra (LEC).

La respuesta a la segunda pregunta depende del tipo de control de inventarios que tengamos.

Si se requiere de una revisión periódica (puede ser semanal, mensual, etc.). el momento de hacer un nuevo pedido coincide con el inicio de cada periodo. De manera alternativa, si el control se basa en una revisión continua los nuevos pedidos se colocan cuando el nivel del inventario desciende a un nivel previamente especificado llamado punto de reorden.

Modelos estáticos del lote económico de compras

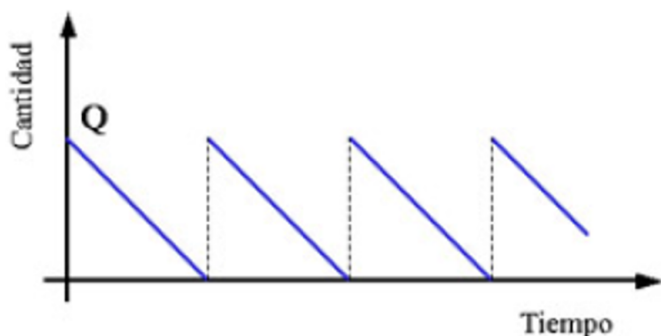
Este modelo calcula la cantidad que debe pedirse o producir minimizando los costos de colocación del pedido y los costos de manejo del inventario.

El modelo LEC se basa en las siguientes hipótesis simplificadas:

- La tasa de demanda del ítem es y será constante
- El ítem se produce o se compra por lotes.
- No existe incertidumbre en la demanda, la oferta o tiempo de entrega.
- No se admite agotamiento de existencias.
- Existen solo dos costos importantes: el costo de colocar un pedido y el costo de mantener el inventario.

(Tawfik, 1998, pág. 178)

La representación gráfica de la administración del inventario se asemeja a una sierra razón por la cual en términos generales se la conoce como “curva dientes de sierra”.



Para efectos de compra, el LEC se calcula con el siguiente modelo:

$$LEC = \sqrt{\frac{2*Da*Cp}{Cu*ta}}$$

Donde:

LEC = Lote Económico de Compras

Da = Demanda anual del ítem

Cp = Costo de pedir (colocar un pedido)

Cu = Costo unitario del ítem

Ta = Tasa de almacenamiento

Para efectos de producción, el LEF se calcula con el siguiente modelo:

$$LEP = \sqrt{\frac{2*Da*Cp}{Cu*ta*(1-\frac{V}{P})}}$$

Donde:

LEP = Lote Económico de Producción

Cp = Costo de preparación del equipo

V = Volumen de ventas

P = Volumen de producción

El lote económico de compras puede ser calculado de forma determinística aplicando el modelo ya conocido. También se lo puede hacer por tabulación o gráficamente.

Sistema de planeación “MRP”

Los insumos necesarios para el proceso de producción o comercialización, por lo general representan un problema conflictivo para las empresas podría decirse que la principal manifestación es la

inversión la misma que depende del nivel de servicio seleccionado.

Muchos autores consideran la actividad de administración de inventarios como una actividad traumática por la manifiesta incertidumbre en la definición de los niveles de inventario a manejar. De estos niveles dependerá una alta o baja tasa de rendimiento de la inversión.

El sistema MRP tiene su fortaleza en distinguir en forma apropiada un inventario de demanda dependiente de uno de demanda independiente. La demanda independiente es aquella que se sujeta a las condiciones del mercado. La dependiente no y por el contrario dependen de la demanda de partes y componentes. (Schroeder, 2006, pág. 391)

La demanda y sus características

Demanda dependiente

Es la que se genera a partir de la demanda independiente de productos finales para el cálculo de todas las materias primas y productos semielaborados que intervienen en su fabricación.

Pueden ser decisiones de elaboración de productos finales tomadas por la propia empresa. En conclusión, demanda dependiente es aquella que se relaciona con la demanda de otro artículo y que no se determina en forma independiente por el mercado. (Schroeder, 2006, pág. 398)

Demanda independiente

Se entiende por demanda independiente aquella que se genera a partir de decisiones ajenas a la empresa, por ejemplo, la demanda de productos terminados acostumbra a ser externa a la empresa en el

sentido en que las decisiones de los clientes no son controlables por la empresa (aunque sí pueden ser influidas). Podemos decir entonces que la demanda independiente es aquella que se ve influenciada por condiciones del mercado que se encuentran fuera del control de las operaciones. (Schroeder, 2006, pág. 398)

A manera de ejemplo explicativo consideremos la demanda del mercado por 1000 autos. Se conoce que cada unidad demanda 5 llantas (incluyendo la unidad de emergencia). Entonces esto generará una demanda de 5.000 llantas. En este caso la demanda de autos es la considerada demanda independiente debido a que proviene de una fuente externa a la empresa fabricante de llantas. El número de llantas a producir se considera dependiente pues está unido al nivel de capacidad interno de la empresa.

El sistema de control ABC

En 1906, Wilfredo Pareto observó que algunos artículos de cualquier grupo constituían la proporción significativa del mismo. Observó también que unos pocos individuos en la economía obtenían la mayoría de los ingresos, También pudo observar que pocos productos conformaban la mayor parte de las ventas de las empresas. Esto es lo que se conoce como la “Ley de los pocos significativos” la misma que es aplicable a la administración de inventarios.

En la administración de inventarios los diferentes artículos se dividen en tres clases A,B y C. La clase A generalmente representa el 20% de los ítems que equivale al 80% de la inversión. Mientras que en el

extremo opuesto la clase C representa el 50% de los ítems que apenas equivalen al 5 % de la inversión. Consecuentemente, en el medio se ubica la clase B con 30% de los ítems y un equivalente al 15% de la inversión. Por lo general este sistema de control se lo conoce como “Análisis ABC” o también “Regla 80 – 20”. (Schroeder, 2006, pág. 375)

Para decidir sobre el grado de control que se presta a los diversos tipos de productos, muchas empresas suelen recurrir al método ABC, que deriva de la famosa ley de Pareto.

Según éste, en muchas situaciones económicas se observa que un pequeño número de elementos (aproximadamente el 20 %) involucra aproximadamente el 80% de la inversión total.

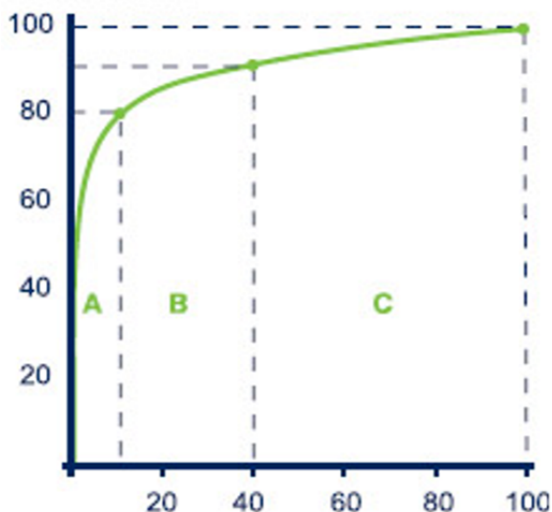
Cada grupo se identifica y está constituido según el siguiente detalle:

Grupo A.- Está formado por un número reducido de artículos, pero que representa un gran porcentaje en cuanto al valor total del stock.

Grupo B.- Suponen un número mayor de artículos con un mayor porcentaje del valor total.

Grupo C.- Representa el mayor número de artículos almacenados, pero sólo representan un mínimo del valor total del stock.

El gráfico mostrado a continuación nos aclara el comportamiento del sistema de control ABC. El eje de las X representa el porcentaje acumulado de ítems mientras que el eje Y representa el porcentaje acumulado de la inversión.



En la práctica (con los datos ordenados de preferencia en forma descendente) podemos tomar la siguiente tabla como modelo para la categorización de los ítems a analizar:

<u>CLASE</u>	<u>% ÍTEMS</u>	<u>% VALOR</u>
A	20	80
B	30	15
C	50	5

Posteriormente se procederá a hacer los ajustes porcentuales según sea requerido.

Ejercicio de aplicación

Criterios de la curva ABC

Efectúe una clasificación ABC de todos los ítems mencionados en la tabla abajo mencionada, los mismos que ya están ordenados en forma descendente.

Item	Cons./ anual (u)	Cons./ anual (US\$)	US\$ Acumulados
1	10.000	180.000	180.000
2	10.000	100.000	280.000
3	10.000	108.000	388.000
4	10.000	62.000	450.000
5	10.000	30.000	480.000
6	1.000	6.600	486.600
7	20.000	6.000	492.600
8	80.000	6.000	498.600
9	20.000	6.000	504.600
10	20.000	6.000	510.600
11	10.000	5.500	516.100
12	100.000	5.000	521.100
13	90.000	4.500	525.600
14	20.000	4.000	529.600
15	10.000	3.000	532.600
16	100	3.000	535.600
17	84.400	2.532	538.132
18	30	2.100	540.232
19	10.000	2.000	542.232
TOTAL		542.232	

Aplicando el modelo original tenemos:

% Items

$$\text{Zona A} = 19 * 0,2 = 3,8 \quad \approx \quad 4$$

$$\text{Zona B} = 19 * 0,3 = 5,7 \quad \approx \quad 6$$

$$\text{Zona C} = 19 * 0,5 = 9,5 \quad \approx \quad 9$$

Aplicando ajustes porcentuales tenemos:

Zona A = $4 / 19 = 0,21 \approx 21$

Zona B = $6 / 19 = 0,316 \approx 32$

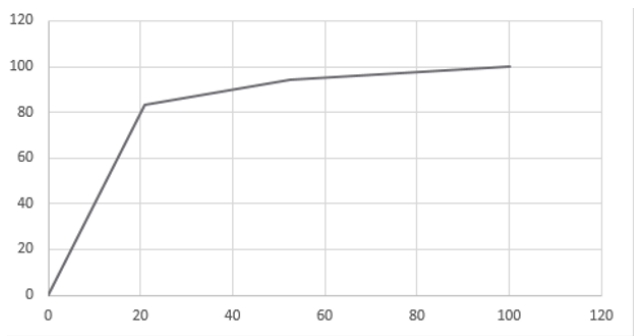
Zona C = $9 / 19 = 0,473 \approx 47$

Igual procedimiento se aplica para el porcentaje de valor.

Zona A = $450.000 / 542.232 = 82,99 \approx 83$

Zona B = $60.600 / 542.232 = 0,112 \approx 11$

Zona C = $31.632 / 542.232 = 0,058 \approx 6$



Lote económico de compras

Carlos González, Gerente de Ventas de “Dentífricos S.A.”, una importante empresa industrial productora principalmente de crema dental localizada a dos horas de Guayaquil estima que las ventas del producto en las dos presentaciones (expresadas en cajas) para el próximo año serán:

	Ene.	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic	Total
200 g	2.100	1.900	2.100	2.000	1.900	2.100	2.000	2.000	2.100	2.000	2.100	1.760	24.060
300 g	1.200	1.100	1.200	800	1.100	1.000	1.200	1.100	1.200	800	1.100	1.000	12.800

Estas proyecciones fueron entregadas a Don Eduardo Vera, Gerente General de la empresa quien luego de revisarlas y aprobarlas las entregó a Jorge Benavides, Gerente de Operaciones para efectuar un análisis de requerimiento de las materias primas e insumos representativos y definir los niveles de inventarios, cantidad y punto de reorden, stock de seguridad, inventario promedio y costos de almacenar y ordenar. Para efectos didácticos, la materia prima a considerar en la presente evaluación es solamente MPL-0001 con 16 % de participación en la fórmula.

La crema dental es envasada en tubos colapsibles de 200 y 300 gramos los mismos que son introducidos en las correspondientes plegadizas para finalmente empacarlas en corrugados de 100 y 70 unidades respectivamente. Los tubos colapsibles son suministrados por una empresa de Quito, las plegadizas y los corrugados son suministrados por empresas de Guayaquil y Durán respectivamente.

Se conoce que el comportamiento del proveedor del ítem en cuanto a entrega de los últimos seis pedidos ha sido el siguiente:

	F.C.P.	F.E.P.	F.E.R.
Pedido # 1	enero 16	enero 19	enero 22
Pedido # 2	enero 25	enero 31	febrero 2
Pedido # 3	feb. 15	feb. 19	feb. 26
Pedido # 4	feb. 26	marzo 2	marzo 5
Pedido # 5	marzo 30	abril 5	abril 6
Pedido # 6	mayo 13	mayo 15	mayo 21

FCP: Fecha de colocación del pedido

FEP: Fecha de entrega prometida

FER: Fecha de entrega real

La empresa labora 24 días al mes y entre enero 16 y mayo 21 se dieron 4 días feriados.

Con esta información, el Gerente de Operaciones desea determinar:

- Consumo mensual del ítem Sorbitol.
- LEC para el ítem MPL - 0001 sabiendo que el costo unitario es de US\$5 el kilo. El costo de tramitar cada pedido es de US\$480 y la tasa de almacenaje anual aplicada por la empresa es del 4 %.
- Punto de reorden, stock de seguridad, inventario promedio.

Conociendo que MPI – 00001 se utiliza al 16 %: ¿Cuántos kilos de crema dental se pueden fabricar con 35.000 kilos de dicha materia prima? ¿Cuál es la cobertura en meses?

Solución

Para poder determinar el consumo mensual del ítem, se debe primero cuantificar el volumen total a producir de cremas dentales.

Una caja de colapsibles de 200 g tiene un peso total de $200 \text{ g} * 100 \text{ t}$. Esto significa un peso de 20.000 g o 20 kilos o 0.02 toneladas por cada caja.

Una caja de colapsibles de 300 g tiene un peso total de $300 \text{ g} * 70 \text{ t}$. Esto significa un peso de 21.000 g o 21 kilos o 0.021 toneladas por cada caja.

El volumen total de crema dental a producir será:

$$V = 24.060 (0.02) + 12.800 (0.021) = 481.28 + 268.8 = 750.08 \text{ toneladas.}$$

La demanda mensual del ítem MPL-0001 será:

$$\frac{750 \cdot 0.16}{12} = 10 \text{ ton / mes.}$$

Lote económico de compras

$$LEC = \sqrt{\frac{2 \cdot 120 \cdot 480}{5000 \cdot 0.04}} = \sqrt{\frac{115.200}{200}} = \sqrt{576} = 24 \text{ tons.}$$

Para determinar el inventario de seguridad nos remitiremos al comportamiento del proveedor en la entrega de los últimos seis pedidos relacionando las fechas de entrega ofrecida y la fecha de entrega real en los siguientes términos:

	F.E.P.	F.E.R.	DIFER.
Pedido # 1	enero 19	enero 22	3
Pedido # 2	enero 31	febrero 2	2
Pedido # 3	feb. 19	feb. 26	7
Pedido # 4	marzo 2	marzo 5	3
Pedido # 5	abril 5	abril 6	1
Pedido # 6	mayo 15	mayo 21	6

Considerando los días feriados esto representa una demora promedio en la entrega de:

$$\frac{(3+2+7+3+1+6)-4}{6} = \frac{22-4}{6} = 3 \text{ días / pedido}$$

El inventario de seguridad será la demora promedio por el consumo diario del ítem es decir:

$$\frac{10}{25} * 3 = 1.2 \text{ tons.}$$

El inventario promedio es:

$$\frac{LEC}{2} + IS = \frac{15}{2} + 1.2 = 8.7 \text{ toneladas.}$$

El punto de reorden se obtiene estableciendo la demora promedio por pedido (fecha de colocación del pedido menos la fecha de entrega real) y sumándole el inventario de seguridad. Es decir:

	F.C.P.	F.E.R.	DIFER.
Pedido # 1	enero 16	enero 22	6
Pedido # 2	enero 25	febrero 2	8
Pedido # 3	feb. 15	feb. 26	11
Pedido # 4	feb. 26	marzo 5	7
Pedido # 5	marzo 30	abril 6	7
Pedido # 6	mayo 13	mayo 21	8

La demora total es de 47 días menos los cuatro de feriado queda un total de 43 días.

El lead time promedio por pedido sin considerar el inventario de seguridad es:

Si a este valor le sumamos los 3 días del inventario de seguridad nos da 10.2 días.

Siendo el consumo diario de 0.4 toneladas significa entonces que el punto de reorden será de $10.2 * 0.4 = 4.08$ toneladas. Esto quiere decir que se deberá colocar una orden por el LEC cada vez que el inventario llegue a 4.08 toneladas.

Con un disponible de 35.000 kilos podemos elaborar:

$$35.000 / 0.16 = 218.750 \text{ kilos de crema dental.}$$

La cobertura será entonces de:

$$(218.750 * 12) / 750.000 = 3.5 \text{ meses de producción.}$$

El mismo ejercicio puede ser resuelto aplicando el método de tabulación. Para este caso se debe tener en cuenta el número de pedidos a realizar por año es decir si se hace un solo pedido la orden será por el total de la demanda que es de 120 toneladas. Si se van a hacer dos pedidos l año, entonces cada será de 60 toneladas y así sucesivamente. Para cada opción se calcularán los costos de almacenaje promedio y costo total de pedir.

Una vez que se haya completado el cuadro, a simple vista y aplicando conceptos relativos al proceso podremos identificar la solución al problema.

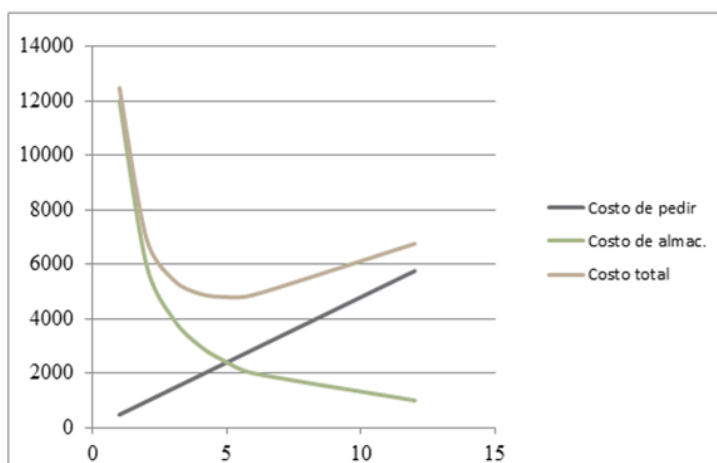
Conceptualmente se define el LEC como aquel punto donde los costos de almacenar y pedir están en equilibrio es decir que son iguales.

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>12</u>
Lote(L)	120	60	40	30	24	20	10
L/2	60	30	20	15	12	10	5
Costo de almacenar	12000	6000	4000	3000	2400	2000	1000
Costo de pedir	480	960	1440	1920	2400	2880	5760
Costo total	12480	6960	5440	4920	4800	4880	6760

En el cuadro podemos apreciar que la opción de compra en la cual los costos de almacenamiento promedio y de pedir son iguales es la que corresponde a cinco pedidos por año (24 toneladas cada uno). Ambos costos son de 2.400.

La solución también la podemos encontrar remitiéndonos a la fila de costos totales. En este caso el criterio es ubicar el costo más bajo.

<u>X</u>	<u>Lote (Tons)</u>	<u>Costo de pedir</u>	<u>Costo de almac.</u>	<u>Costo total</u>
1	120000	480	12000	12480
2	60000	960	6000	6960
3	40000	1440	4000	5440
4	30000	1920	3000	4920
5	24000	2400	2400	4800
6	20000	2880	2000	4880
12	10000	5760	1000	6760



Podemos ver que al proyectar el punto de intersección de las curvas sobre el eje X encontramos el valor de 5. Este se refiere al número de pedidos y por tanto se refiere a $120.000 / 5 = 2.400$ unidades. Si ese mismo punto lo proyectamos hacia el eje Y encontramos el valor de 2.400 que es el costo tanto de pedir como de almacenar.

Finalmente, si el punto de corte lo proyectamos hacia la parte superior hasta topar la curva superior (curva de costo total) y desde este nuevo punto hacemos una proyección al eje de las Y encontraremos el valor correspondiente al costo total que en este caso es de US\$4.800.

Ejercicio de aplicación

Lote económico de producción

En una industria de montaje que labora 280 días al año, el consumo promedio de una determinada pieza es de 500 u / día. La referida pieza es fabricada a un ritmo de 2.000 u / día.

El costo de preparación de máquinas para cada serie es de Ps. 1.600 y el costo de fabricación (materiales, mano de obra y gastos industriales) es de Ps. 18.96 por pieza.

Analizando el costo de tener una pieza en stock (% sobre el costo unitario) durante un año se ha llegado a la siguiente conclusión:

Interés del capital inmovilizado	10%
Gastos de almacenaje y espacios	3%
Seguro y otros	1%
Total	14%

Estadísticamente se ha determinado que el comportamiento en la entrega de lotes anteriores ha sido el siguiente:

Tiempo de Entrega	Frecuencia
7	1
8	3
9	6
10	8
11	6
12	3
13	1

Con la información aquí proporcionada, determine el nivel del lote económico de producción y el punto de reorden.

Solución

$$LEP = \sqrt{\frac{2(500)(280)(1600)}{18.96(0.14)(1 - \frac{500}{2000})}} = 15.001.17 \text{ unidades}$$

Una forma de verificar si el resultado obtenido es correcto es calcular los costos de preparación y almacenamiento. Si estos dos parámetros tienen el mismo valor significa que el LEF es correcto.

Costo de preparar

$$C_p = \frac{Da}{LEF} (C_{pu}) = \frac{(500)(280)}{15.001.17} (1600) = 14.932.17$$

Costo de almacenar

$$C_a = \frac{LEF}{2} (C_u)(ta)(1 - \frac{v}{p})$$

$$C_a = \frac{15.001.17}{2} (18.96)(0.14) \left(1 - \frac{500}{2000}\right) = 14.932.17$$

Punto de reorden

$$PR = \frac{(7*1)+(8*3)+(9*6)+(10*8)+(11*6)+(12*3)+(13*1)}{28}$$

$$PR = \frac{280}{28} = 10 \text{ días}$$

El consumo en estos 10 días será de:

$$10 * 500 = 5.000 \text{ kilos}$$

Por tanto, se deberá colocar una orden de compra por 15.001.17 kilos cada vez que el inventario llegue a 5.000 kilos.

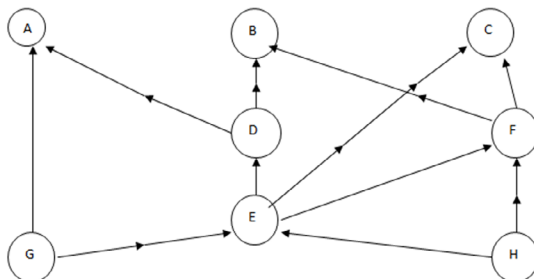
Ejercicio de aplicación

Requerimiento semanal

Un importante cliente requiere los productos A, B y C para ser entregados en las próximas seis semanas según el programa siguiente:

	<u>Sem. 1</u>	<u>Sem. 2</u>	<u>Sem. 3</u>	<u>Sem. 4</u>	<u>Sem. 5</u>	<u>Sem. 6</u>
A	200	150	170	250	200	250
B	100	0	100	0	100	0
C	0	200	0	300	0	250

El gráfico indica los insumos o componentes para la elaboración de cada producto. Las flechas indican las unidades requeridas de cada elemento para elaborar cada producto.



Los niveles de existencias, así como el margen de desperdicio y el tiempo en semanas que se tarda en producir las cantidades requeridas de cada elemento se muestran en el siguiente cuadro.

	<u>D</u>	<u>E</u>	<u>F</u>	<u>G</u>	<u>H</u>
Existencia	700	1.503	400	2.850	2.500
% Desperdicio	5	2	10	2	0
# Semanas	1	1	2	2	1

Determinar las actividades de producción para cada una de las seis semanas. Tenga en cuenta que al final, los inventarios de cada componente deben quedar en cero.

Solución

Demanda "D" (5%) {1}

	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>
Requerimiento de A		400	300	340	500	400	500
Requerimiento de B		200	0	200	0	200	0
Requerimiento de total		600	300	540	500	600	500
Disponible	700	100	--	--	--	--	--
Pedido neto		--	200	540	500	600	500
Pedido real		--	211	568	526	632	526
Programa de producción		211	568	526	632	526	--

Demanda "F" (10%) {2}

Requerimiento de B		200	0	200	0	200	0
Requerimiento de C		0	200	0	300	0	250
Requerimiento de total		200	200	200	300	200	250
Disponible	400	200	--	--	--	--	--
Pedido neto		--	--	200	300	200	250
Pedido real		--	--	222	333	222	278
Programa de producción		222	333	222	278	--	--

Demanda "E" (2%) {1}

Requerimiento de D		211	568	526	632	526	0
Requerimiento de C		0	600	0	900	0	750
Requerimiento de F		222	333	222	278	0	0
Requerimiento de total		433	1.501	748	1.810	526	750
Disponible	1.503	1.070	--	--	--	--	--
Pedido neto		--	431	748	1.810	526	750
Pedido real		--	440	763	1.847	537	765
Programa de producción		440	763	1.847	537	765	--

Demanda "H" (0%) {1}

Requerimiento de F		444	667	444	556	0	0
Requerimiento de E		440	763	1.847	537	765	0
Requerimiento de total		884	1.430	2.291	1.092	765	0
Disponible	2.500	1.616	186	--	--	--	--
Pedido neto		--	--	2.105	1.092	765	--
Pedido real		--	--	2.105	1.092	765	--
Programa de producción		--	2.105	1.092	765	--	--

Demanda "G" (2%) {2}

Requerimiento de A		200	150	170	250	200	250
Requerimiento de E		880	1.527	3.694	1.073	1.531	0
Requerimiento de total		1.080	1.677	3.864	1.323	1.731	250
Disponible	2.850	1.770	94	--	--	--	--
Pedido neto		--	--	3.770	1.323	1.731	250
Pedido real		--	--	3.847	1.350	1.766	255
Programa de producción		3.847	1.350	1.766	255	--	--

El programa maestro de producción queda tal como se muestra a continuación.

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>
D	211	568	526	632	526	--
F	222	333	222	278	--	--
E	440	763	1.847	537	765	--
H	--	2.291	1.092	765	--	--
G	3.847	1.350	1.766	255	--	--

Podemos observar que se cumple a cabalidad la restricción de inventario cero al final de las actividades.

Ejercicio de aplicación***Árbol del producto***

Una fábrica acaba de recibir de un importante cliente un pedido especial por 200 unidades del producto A para ser entregados en un plazo de 7 semanas. Para elaborar cada producto se requieren los elementos B, C,

D y E. Efectuando una revisión al inventario encontramos que se tiene disponible lo siguiente:

Producto A 75 unidades

Elemento B 25 unidades

Elemento C 50

Elemento D 20

Elemento E 0

El tiempo de espera desde colocar un pedido hasta recibir lo solicitado es de:

1 semana para A

1 semana para B;

2 semanas para C;

1 semana para D

3 semanas para E.

En cuanto a pedidos en tránsito se deben considerar las siguientes recepciones programadas:

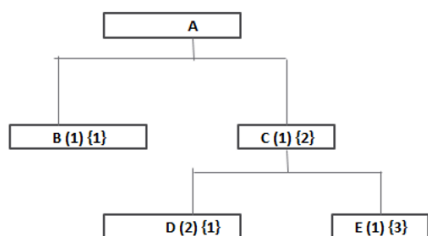
50 unidades del elemento B en la semana 2

20 unidades de D en la semana 2

15 unidades de E en la semana 3

15 unidades de E en la semana 4

El siguiente diagrama nos ayudará a entender el direccionamiento del proceso:



	<u>Dispon.</u>	<u>Recep. Prog.</u>	<u>Lead time</u>
A	75		
B	25	50 /2da	1 semana
C	50		2 semanas
D	20	20 /2da	1 semana
E	0	15 /3ra 15 /4ta	3 semanas

Se solicita al área de Operaciones establezca un programa maestro de producción que recoja la totalidad de las observaciones realizadas a más de considerar que al final del proyecto los inventarios de todos los productos y elementos deben quedar en cero.

Solución

Una forma sencilla de plantear y resolver el problema es la siguiente tabla:

Producto

En la parte superior se ubica el producto requerido por los clientes considerando el volumen requerido y la disponibilidad de inventario. La diferencia de ellos nos dará la cantidad a ordenar y el lead time nos permitirá colocar el pedido con la debida anticipación.

Elementos

Se refiere a las materias primas, materiales e insumos utilizados para la elaboración de los diferentes productos.

Para cada uno de ellos se procederá considerando el requerimiento básico (obtenido en el análisis inicial de productos terminados), disponibilidad física en almacenes, calendario de próximos ingresos

para finalmente colocar un pedido con la debida anticipación tomando en cuenta el lead time.

ITEM	0	1	2	3	4	5	6	7
<u>Producto A</u>								
Demanda								200
Disponible	75							
Rec. Prog.								
Requer.								125
Producción							125	
<u>Elemento B</u>								
Demanda							125	
Disponible	25							
Rec. Prog.			50					
Requer.							50	
Producción						50		
<u>Elemento C</u>								
Demanda							125	
Disponible	50							
Rec. Prog.								
Requer.							75	
Producción					75			
<u>Elemento D</u>								
Demanda					150			
Disponible	20							
Rec. Prog.			20					
Requer.					110			
Producción				110				

Elemento E								
Demanda					75			
Disponible	0							
Rec. Prog.				15	15			
Requer.					45			
Producción		45						

Este es el cuadro de análisis del cual obtenemos el programa maestro de producción: Con este programa de producción estamos asegurando el cumplimiento de la entrega del producto en la semana 7 y además aseguramos que al final de la gestión el inventario de los diferentes ítems será cero. El programa maestro de producción es el siguiente:

ITEM	0	1	2	3	4	5	6	7
------	---	---	---	---	---	---	---	---

Producto A 125
 Elemento B 50
 Elemento C 75
 Elemento E 45

Pinturas para exteriores

Un productor de pinturas para exteriores, tiene una demanda anual de 600 galones por mes. Al momento no existe un programa apropiado de producción por lo cual los costos están variando permanentemente. A efectos de estandarizar los niveles de producción, se pide determinar la SEF sabiendo que preparar la línea tiene un costo de US\$750. La tasa de almacenamiento es del 12% y el costo unitario de US\$18. La planta trabaja 25 días por mes con un ritmo de producción de 50 galones por día.

Solución

Demanda anual = $600 * 12 = 7.200$ gl

Ventas por día = $7.200 / 25 * 12 = 7.200 / 300 = 24$ gl por día

$$LEP = \sqrt{\frac{2(7.200)(750)}{18(0.12)(1 - \frac{24}{50})}} = 3.100 \text{ gl.}$$

$$Ca = \frac{3.100}{2} (18)(0.12) \left(1 - \frac{24}{50}\right) = \text{US\$}1.741,96$$

$$Cp = \frac{7.200}{3.100} (750) = \text{US\$}1.741,96$$

Serie económica de fabricación

La demanda de un determinado artículo es de 20.000 unidades por año.

El costo unitario de preparar la máquina para cada corrida es de US\$20.

La empresa trabaja 250 días al año con lo cual su producción llega a 100 unidades por día. Determine: la serie económica de fabricación y el número de corridas por año sabiendo que el costo de almacenar por unidad es de US\$10.

Solución

$$SEF = \left(\frac{2 * 20000 * 20}{10 \left(1 - \frac{250}{100}\right)} \right)^{0,5} = \left(\frac{2 * 20000 * 20}{10 \left(1 - \frac{80}{100}\right)} \right)^{0,5} = \left(\frac{800000}{2} \right)^{0,5} = 632,45 \text{ u}$$

Corridas por año

$$\frac{20000}{632,45} = 31,6 \text{ corridas}$$

¿Suministro actual o propuesto?

Una empresa se abastece actualmente de cierto producto solicitando una cantidad suficiente para satisfacer la demanda de un mes. La

demanda anual del producto es de 1.500 u. Se estima que cada vez que se hace un pedido se incurre en un costo de US\$20. El costo de almacenamiento por unidad por mes es de US\$2.

Determinar:

Cantidad de pedido óptimo y el tiempo entre pedidos.

Diferencia de costos de inventarios anuales entre la política óptima y la política actual de solicitar el abastecimiento de un mes doce veces al año.

Solución

Costo de pedir = $20 * 12 = \text{US\$}240$

Cantidad de pedido $1.500 / 12 = 125 \text{ u.}$

Costo de almacenar = $125/2 * 2 = \text{US\$}125$

Debido a la política actual, el costo de pedir es casi el doble del costo de almacenar.

Situación propuesta

$$\text{LEC} = \sqrt{\frac{2 * (1.500) * 20}{2}} = \sqrt{30.000} = 173,2 \text{ u.}$$

$$\text{Frecuencia} = \frac{365}{\frac{1.500}{173,2}} = \frac{365}{8,66} = 42,1 \text{ día (un pedido cada 42,1 día)}$$

$$\text{Costo de pedir anual} = \frac{1.500}{173,2} * 20 = 173,2$$

$$\text{Costo de almacenar anual} = \frac{173,2}{2} * 2 = \text{US\$}173,2$$

Conclusión

Al adoptar la propuesta, lo primero que obtenemos es reducir la frecuencia de pedidos pasando de 12 a 8,66 por año con lo cual el costo anual de pedir se reduce a US\$173,2 (el actual es de US\$240) lo que genera una reducción del 27,8 %.

Adicionalmente el costo de almacenar sube de US\$125 a US\$173,2 es decir un incremento del 38,6%. Mirando en global vemos que el costo total de la gestión de inventarios pasa de US\$365 a US\$346,4 lo que significa un ahorro del 5,1 % lo cual torna interesante la propuesta.

Mecanizado industrial

Una empresa de mecanizado industrial compra 8.000 u de un ítem cada año a un costo unitario de US\$19. El costo de elaborar cada orden es de US\$ 30 y el costo de tener unidades en inventario es de US\$3. Determine el LEC; el costo total anual; el punto de reorden y el número de pedidos a realizar si el tiempo de espera es de dos semanas.

Solución

$$\text{LEC} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8.000 \cdot 30}{3}} = 400 \text{ u}$$

El costo total anual de administrar el inventario será:

Costo de pedir:

$$(8.000 / 400) \cdot 30 = \text{US\$ } 600$$

Costo de almacenar

$$(400 / 2) \cdot 10 \cdot (3/10) = \text{US\$ } 600$$

Por tanto, el costo total será $600 + 600 = \text{US\$}1.200$

El número de pedidos a realizar es:

$$8000 / 400 = 20 \text{ pedidos}$$

El punto de reorden será:

$$\text{PR} = (\text{Da} / 52) * \text{LT}$$

$$\text{PR} = (8.000 / 52) * 2 = 307.7 \text{ u}$$

Esto significa que debemos colocar una orden de compra por 400 unidades cada vez que el inventario llegue a 307.7 u.

Comercializadora de llantas

La demanda anual de llantas de una determinada empresa es de 5000 unidades laborando 250 días / año. El costo de emitir una orden de compra es de US\$40. Si sabemos que el costo unitario por llanta es de US\$80 y la tasa de almacenamiento del 25 %, determine el lote económico de compras, número de pedidos al año, inventario de seguridad conociendo que el lead time promedio por pedido es de cuatro días.

$$\text{LEC} = \sqrt{\frac{2 * 5.000 * 40}{80 * 0,25}} = 141,4 \text{ u.}$$

$$\# \text{ pedidos} / \text{año} = \frac{5.000}{141,4} = 35,36 \text{ pedidos}$$

$$\text{Consumo diario} = \frac{5.000}{250} = 20 \text{ u} / \text{día}$$

Inventario de seguridad

= Consumo diario * lead time

$$20 * 4 = 80 \text{ unidades.}$$

La solución nos dice que hay que colocar un pedido cada vez que el nivel del inventario llegue a 80 unidades. En este caso, el inventario de seguridad actúa como punto de reorden.

METODOLOGÍA PERT – CPM

Capítulo 4

METODOLOGÍA PERT – CPM

El método PERT (Project Evaluation and Review Techniques) es un algoritmo basado en la teoría de redes diseñado para facilitar la planificación de proyectos. El resultado final de la aplicación de este algoritmo será un cronograma para el proyecto, en el cual se podrá conocer la duración total del mismo, y la clasificación de las actividades según su criticidad.

De otro lado, “Cabe definir un proyecto como una serie de trabajos relacionados que, por lo general, se dirigen hacia un producto mayor y cuyo desempeño requiere de un periodo considerable. La administración de proyectos se puede definir como la planeación, la dirección y el control de recursos (personas, equipamiento y materiales) para poder sujetarse a las limitantes técnicas, de costo y de tiempo del proyecto”. (Chase - Jacobs - Aquilano, 2009, pág. 59)

Las actividades del proyecto

Admitiendo que la ejecución de un proyecto se puede subdividir planeas, programar y controlar entonces podemos decir que las técnicas PERT y CPM resultan de mucha utilidad en una gran variedad de proyectos tales como:

- Investigación y desarrollo de nuevos productos
- Construcción de plantas, edificios, carreteras, ensamble de plantas, etc.
- Diseño e instalación de sistemas.
- Diseño y montaje de plantas industriales.
- Proyectos que requieran una adecuada planificación.

Diferencias entre PERT y CPM

Se puede decir que la diferencia fundamental es que el PERT es de tipo probabilístico dado que considera tres estimativos de tiempo: optimista, más probable y pesimista.

Por el contrario, el CPM es de tipo determinístico es decir considera que el tiempo de ejecución de las actividades es conocido con certeza. En ambos casos, el tiempo esperado de finalización del proyecto es la suma de todos los tiempos esperados de las actividades que forman la ruta crítica.

En primer lugar, se deben identificar todas las actividades que intervienen en el proyecto, definir sus interrelaciones, reglas de precedencia y los tiempos estimados para el desarrollo de las actividades.

El PERT asume tres estimaciones de tiempo por cada actividad: pesimista; más probable y pesimista.

Tiempo optimista

Tiempo de ocurrencia de la actividad en términos de perfección. Podría decirse que corresponde al mínimo tiempo en que una actividad de esas características haya sido ejecutada.

Tiempo más probable

Tiempo transcurrido cuando la actividad se desarrolla en condiciones normales. En la práctica podemos decir que es el tiempo que se registra con mayor frecuencia.

Tiempo pesimista

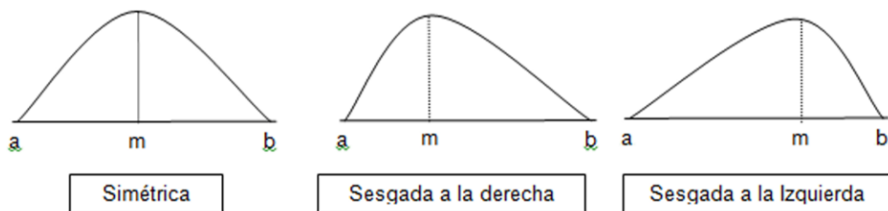
Tiempo de desarrollo de una actividad de manera deficiente o cuando se materializan los riesgos de ejecución de la actividad.

Tiempo esperado

A efectos de establecer la ruta crítica de un determinado proyecto se acude al tiempo promedio también conocido como tiempo estimado o tiempo esperado. En base a estos tres tiempos se obtiene el tiempo esperado o media que servirá para programar la red de actividades y obtener la ruta crítica. Para obtenerlo hacemos uso de la siguiente fórmula:

$$te = \frac{a + 4m + b}{6}$$

Se supone que la duración de cada actividad sigue una distribución beta con un solo punto modal en “m” y sus puntos extremos “a y b”



Adicional al tiempo esperado deberá calcularse la varianza de cada actividad. Esto nos permitirá determinar el grado de incertidumbre de un proyecto. El modelo a utilizar es el siguiente:

$$(\sigma)^2 = \left(\frac{(b-a)}{6}\right)^2$$

A más de ordenar y priorizar las actividades de un proyecto, el PERT tiene en cuenta la incertidumbre en los plazos de realización. Tan es así que nos permite determinar la probabilidad de que una actividad se cumpla en un tiempo previsto para lo cual es determinante un análisis de su distribución estadística y para ello nos valemos del siguiente modelo:

$$Z = \frac{TS - TE}{\sqrt{\Sigma \sigma^2}}$$

$\Sigma \sigma^2$ Equivale a la sumatoria de las varianzas sobre la ruta crítica hasta el evento que estamos considerando.

¿Qué significa «ruta crítica»?

De acuerdo con la “Guía para la dirección de proyectos (PMBOOK Guide), se define como “La secuencia de actividades programadas que determina la duración del proyecto”.

Para finalizar un proyecto, debemos realizar todas las actividades que lo componen. Algunas actividades pueden hacerse en simultáneo, sin embargo, otras deben hacerse siguiendo un orden determinado. Por ejemplo, si voy a construir una casa, primero debo construir las paredes antes de pintarlas. De todas las secuencias de actividades que forman el proyecto, la secuencia que tiene mayor duración será la ruta crítica y determina el tiempo total del proyecto.

Es importante calcularla porque si existe una demora en alguna de las actividades que componen la ruta crítica, todo el proyecto se retrasará; es por ello que los gerentes tienen especial cuidado en que

las actividades que la forman, se desarrollen según lo planificado. Un proyecto puede tener varias rutas críticas.

Ejercicio de aplicación

Un determinado proceso está formado por 11 actividades: A, B, C, D, E, F, G, H, I y sus tiempos de duración son en su orden: 10 – 3 – 10 – 5 – 11 – 2 – 6 – 11 – 8 – 4 – 2.

Entre ellas existen las siguientes relaciones de precedencia:

- Las actividades A, B y C pueden comenzar simultáneamente sin responder a ningún requisito de precedencia.
- La actividad D necesita que se hayan terminado las actividades B y J.
- Solo cuando se haya terminado A podrán iniciar J y H.
- E iniciará una vez terminadas B y J.
- I comenzará tan pronto se termine H.
- Una vez terminada C podrá comenzar F.
- Para iniciar K se requiere estén terminadas E, F y G.
- G y I comenzarán al terminar D.
- G requiere para comenzar que esté terminada H.

Con la información proporcionada se requiere:

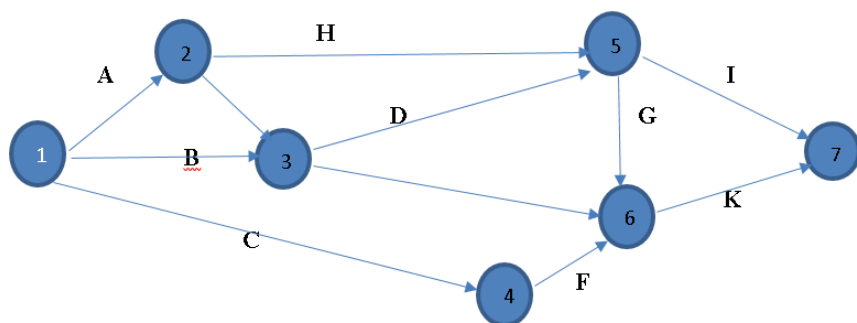
- Dibujar la red y numerar los eventos
- Determinar la ruta crítica
- Calcular la duración del proyecto.

Solución

El cuadro de actividades precedentes y posteriores (tal como se muestra a continuación) es se suma importancia para el trazado de la red. El cuadro referido ha sido elaborado acatando una a una las relaciones de precedencia y en función de ello, la red que tal como sigue:

Cuadro de relación de precedencia

ACTIVIDAD	PRECEDENCIA	POSTERIOR
A		J - H
B		D - E
C		F
D	B - J	G - I
E	B - J	K
F	C	K
G	D - H	K
H	A	I - G
I	D - H	
J	A	D - E
K	E - F - G	



Una vez que hemos trazado la red, procedemos a determinar los valores de TE; TL y finalmente H.

	<u>TE</u>	<u>TL</u>	<u>H</u>
1	0	0	0
2	10	10	0
3	14	16	2
4	10	25	15
5	21	21	0
6	27	27	0
7	29	29	0

La ruta crítica será la resultante de unir todos los nodos cuya holgura sea igual a cero. En este caso: 1 – 2 – 5 – 6 - 7.

La duración del proyecto será: $10 + 11 + 6 + 2 = 29$ semanas.

Ejercicio de aplicación

Control de inventarios

Un restaurant de comidas rápidas desea innovar su mecanismo de control adquiriendo un computador que le permita llevar la contabilidad y simultáneamente realizar el control de inventarios.

Al respecto, una empresa consultora presenta una oferta la cual contempla la realización de nueve actividades cuyos tiempos son:

TIEMPOS DE EJECUCIÓN

Actividad	Descripción	Optimista	Más Probable	Pesimista
A	Selección del Modelo	4	6	8
B	Sistema Entrada/ Salida	5	7	15
C	Diseño del sistema	4	8	12
D	Montaje	15	20	25
E	Programas	10	18	26
F	Rutinas Entrada/ Salida	8	9	16
G	Base de datos	4	8	12
H	Instalación	1	2	3
I	Pruebas	6	7	8

El Gerente del restaurant solicita:

- Ruta crítica
- Tiempo de ejecución del proyecto.
- Probabilidad de ejecutar el proyecto en 55 días.

Solución

En primer lugar, debemos los tiempos esperados (t_e) a partir de los tiempos probabilísticos (a , m , b) de la siguiente manera:

Para el caso de “ t_e ”:

$$t_e = \frac{(a + 4m + b)}{6}$$

a = tiempo optimista

m = tiempo más probable

b = tiempo pesimista

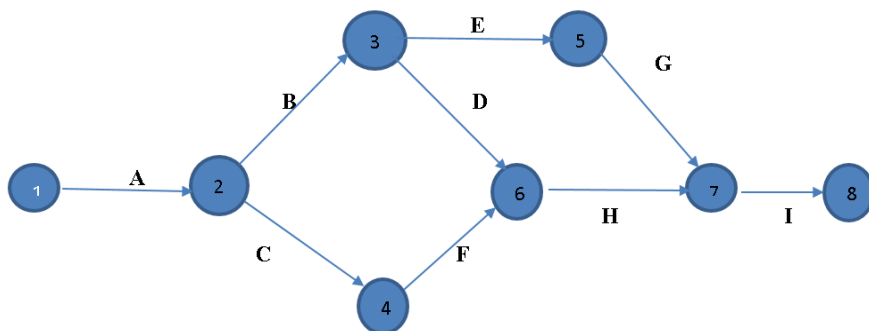
Para el caso de la varianza (Var)

$$VAR = \left(\frac{b-a}{6} \right)^2$$

Aplicando las fórmulas para cada nodo tenemos:

		TIEMPOS CONSIDERADOS				
	ACTIVIDAD	OPTIMISTA	MAS PROBABLE	PESIMISTA	te	Varianza
A	Selec. Modelo	4	6	8	6	0,444
B	Sist. Ent. / Sal.	5	7	15	8	2,778
C	Diseño	4	8	12	8	1,778
D	Montaje	15	20	25	20	2,778
E	Programas	10	18	26	18	7,111
F	Rutinas E / S	8	9	16	10	1,778
G	Base de Datos	4	8	12	8	1,778
H	Instalación	1	2	3	2	0,111
I	Pruebas	6	7	8	7	0,111

La red para este ejemplo sería la siguiente:



Procedemos ahora a determinar los TE; TL y H según los procedimientos antes mencionados y tenemos:

NODO	TE	TL	H
1	0	0	0
2	6	6	0
3	14	14	0
4	14	28	14
5	32	32	0
6	34	38	4
7	40	40	0
8	47	47	0

La ruta crítica estará formada por la unión de los nodos cuya holgura es igual a cero. En el ejemplo analizado será: 1 – 2 – 3 – 5 – 7 – 8.

La longitud del recorrido es: $6 + 8 + 18 + 8 + 7 = 47$ días.

La varianza de la ruta crítica es: $0,44 + 2,778 + 7,111 + 1,778 + 0,111 = 12,222$.

La probabilidad de terminar el proyecto en 55 días o menos es:

$$Z = P(E \leq 55) = \frac{X - \bar{X}}{\sqrt{Var}} = \frac{55 - 47}{\sqrt{12,22}} = 2,2883$$

Conociendo el valor de Z, buscamos en las tablas de áreas bajo la curva normal el valor que le corresponde y encontramos que es 0,98894.

Esto significa que la probabilidad buscada es el 98,89 %.

Ejercicio de aplicación

A efectos de una mejor explicación tomemos el siguiente ejemplo y determinemos la probabilidad de reducir la duración del evento 6 en un día.

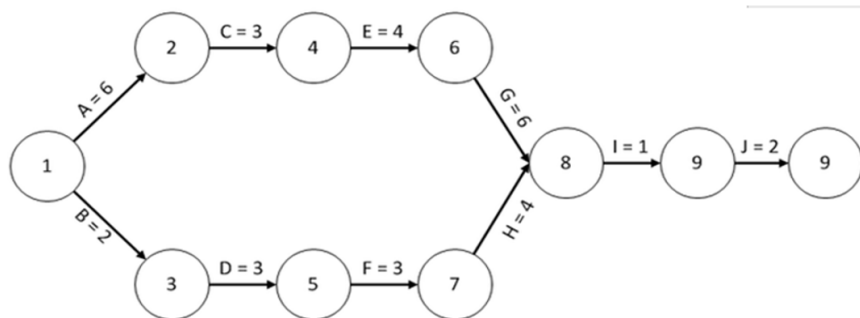
<u>Actividad</u>	<u>TIEMPO</u>			<u>Actividad Precedente</u>
	<u>Optimista</u>	<u>Más probable</u>	<u>Pesimista</u>	
A	3	5,5	11	
B	1	1,5	5	
C	1,5	3	4,5	A
D	1,2	3,2	4	B
E	2	3,5	8	C
F	1,8	2,8	5	D
G	3	6,5	7	E
H	2	4,2	5,2	F
I	0,5	0,8	2,3	G - H
J	0,8	2,1	2,8	I

Solución

Lo primero que haremos es determinar en base a los tiempos probabilísticos proporcionados los tiempos esperados y la varianza para cada actividad.

<u>Actividad</u>	<u>TIEMPO</u>			<u>Actividad Precedente</u>	<u>te</u>	<u>σ^2</u>
	<u>Optimista</u>	<u>Más probable</u>	<u>Pesimista</u>			
A	3	5,5	11		6	1,78
B	1	1,5	5		2	0,44
C	1,5	3	4,5	A	3	0,25
D	1,2	3,2	4	B	3	0,22
E	2	3,5	8	C	4	1
F	1,8	2,8	5	D	3	0,28
G	3	6,5	7	E	6	0,44
H	2	4,2	5,2	F	4	0,28
I	0,5	0,8	2,3	G - H	1	0,09
J	0,8	2,1	2,8	I	2	0,11

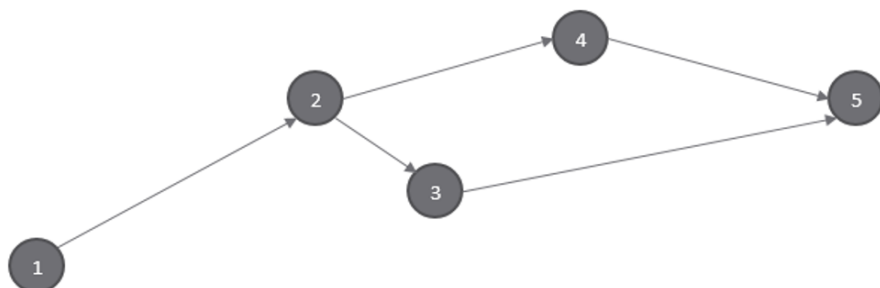
Con la información aquí proporcionada, hemos podido levantar el siguiente gráfico:



Cálculo de la red

La actividad siguiente es calcular para cada nodo los valores de TE (tiempo temprano), TL (tiempo tardío) y las correspondientes holguras. Procedimiento para cálculo de TE (Tiempo lo más pronto posible para completar un evento).

Se inicia en el evento inicial asumiendo $TE = 0$ y de ahí en más al TE de cada evento se le suma la duración de cada actividad (te) considerada y tendremos el nuevo TE. Es importante tener presente que de haber varias opciones de camino se optará por aquella que tenga el mayor valor. Veamos el siguiente ejemplo ilustrativo:



<u>Actividad</u>	<u>te</u>
1 - 2	5,83
2 - 3	7
2 - 4	2
3 - 5	3,83
4 - 5	12,17

Iniciamos el procedimiento definiendo $TE = 0$ para el evento 1. Para el resto de eventos tenemos:

Evento 2

$$0 + 5,83 = 5,83$$

Evento 3

$$5,83 + 7 = 12,83$$

Evento 4

$$5,83 + 2 = 7,83$$

Evento 5

En este caso encontramos dos vías para llegar al evento 5. Para determinar el valor de TE debemos evaluar ambas y de ellas tomamos la de mayor valor.

Partiendo del evento 3:

$$12,83 + 3,83 = 16,66$$

Partiendo del evento 4:

$$7,83 + 12,17 = 20,00$$

Entonces el TE para el evento 5 es 20,00.

La característica principal para el cálculo del TE es que va del evento inicial hacia el evento final. Vemos que el proceso sigue el sentido de las flechas.

Procedimiento para cálculo de TL (Tiempo lo más tardío posible para completar un evento)

Se inicia en el evento final otorgando el mismo valor de TE es decir 20,00. De ahí en más al TL de cada evento se le resta la duración de cada actividad (te) considerada y tendremos el nuevo TL. Es importante tener presente que de haber varias opciones de camino se optará por aquella que tenga el menor valor. Tomemos el mismo ejemplo de TE:

$$\text{TL de 5} = 20,00$$

$$\text{TL de 4} = 20,00 - 12,17 = 7,83$$

$$\text{TL de 3} = 20,17 - 3,83 = 16,17$$

TL de 2 pasando por evento 4

$$7,83 - 2 = 5,83$$

TL de 2 pasando por evento 3

$$16,17 - 7 = 9,17$$

Para este caso el TL es el menor o sea 5,83.

La característica principal para el cálculo del TL es que va del evento final hacia el evento inicial. Vemos que el proceso se desplaza en contra flecha.

Ejercicio de aplicación

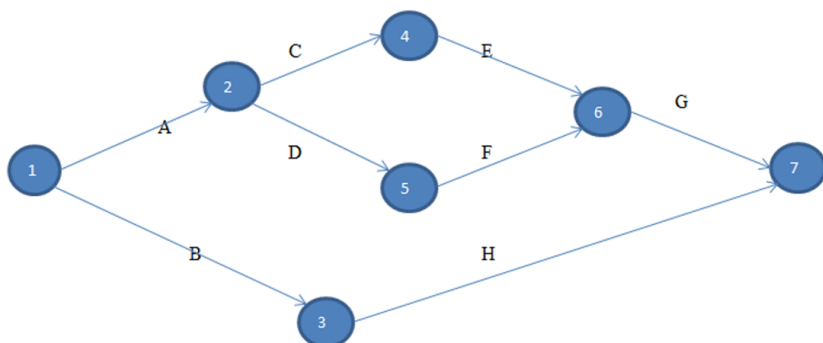
Proyecto

El siguiente cuadro muestra los tiempos optimistas, normal (más probable) y pesimista (incluye además el cálculo de los tiempos esperados para cada actividad), asignados a un proyecto específico. Se pide resolver el proyecto determinando los tiempos más temprano y más tardío, así como las holguras para cada evento además de la duración total del proyecto.

<u>Actividad</u>	<u>Precedencia</u>	<u>Optim.</u>	<u>Normal</u>	<u>Pesimista</u>	<u>te</u>
A		4	6	8	6
B		6	8	13	8,5
C	A	2	2	2	2
D	A	2	4	9	4,5
E	C	10	12	17	12,5
F	D	5	6	7	6
G	E	2	3	4	3
H	B	11	12	13	12

Solución

Para realizar el trazado de la red, debemos tener en cuenta el orden de precedencia de las diferentes actividades.



A continuación, calculamos los valores correspondientes a los tiempos más temprano y más tardío, así como las holguras.

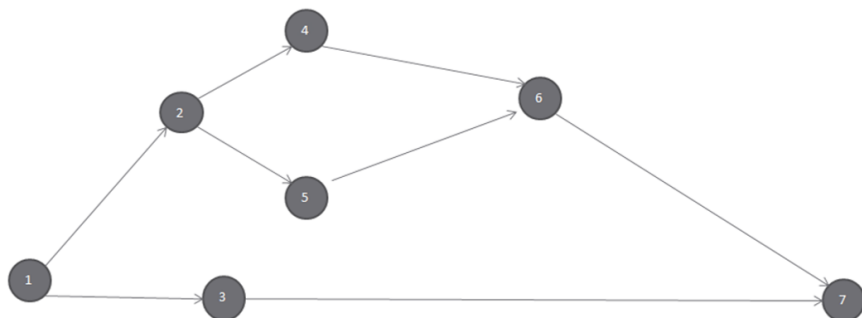
<u>Actividad</u>	<u>Precedencia</u>	<u>Inicio</u>	<u>Fin</u>	<u>te</u>	<u>TE</u>	<u>TL</u>	<u>H</u>
A		1	2	6	0	0	0
B		1	3	8,5	8,5	11,5	3
C	A	2	4	2	8	8	0
D	A	2	5	4,5	10,5	14,5	4
E	C	4	6	12,5	20,5	20,5	0
F	D	5	6	6	10,5	20,5	10
G	E	6	7	3	23,5	23,5	0
H	B	3	7	12	8,5	23,5	15

La ruta crítica está formada por las actividades A – C – E – G y la duración total es de 23,5 días.

Cálculo de la duración del proyecto

La siguiente tabla y el gráfico adjunto representan un determinado proyecto a ser resuelto aplicando las reglas del PERT.

<u>Actividad</u>	<u>a</u>	<u>m</u>	<u>b</u>
1 a 2	4	6	7
1 a 3	6	7	8
2 a 4	2	2	2
2 a 5	2	4	5
3 a 7	11	12	13
4 a 6	10	12	15
5 a 6	5	6	7
6 a 7	2	3	5



Se pide determinar la duración del proyecto, así como la probabilidad de terminarlo en un día menos de lo calculado.

Solución

Primeramente, debemos calcular los tiempos esperados y la varianza para cada actividad, lo cual lo mostramos en el siguiente cuadro:

<u>Actividad</u>	<u>TIEMPO</u>				
	<u>Optimista</u>	<u>Más probable</u>	<u>Pesimista</u>	<u>te</u>	<u>σ^2</u>
1 a 2	4	6	7	5,83	0,25
1 a 3	6	7	8	7	0,11
2 a 4	2	2	2	2	0
2 a 5	2	4	5	3,83	0,25
3 a 7	10	12	15	12,17	0,69
4 a 6	5	6	7	6	0,11
5 a 6	2	3	5	3,17	0,25
6 a 7	11	12	13	12	0,11

El siguiente paso es resolver la red es decir calcular los TE; TL y holguras para cada evento. Lo cual ya realizado se muestra en el siguiente cuadro:

<u>Actividad</u>	<u>te</u>	<u>σ^2</u>	<u>Nodo</u>	<u>LE</u>	<u>LT</u>	<u>H</u>
1 a 2	5,83	0,25	1	0	0	0
1 a 3	7	0,11				
2 a 4	2	0	2	5,83	5,83	0
2 a 5	3,83	0,25				
3 a 7	12,17	0,69	3	7	11,17	4,17
4 a 6	6	0,11	4	7,83	7,83	0
5 a 6	3,17	0,25	5	9,66	14	4,34
6 a 7	12	0,11	6	20	20	0
			7	23,17	23,17	0

En base a este cuadro, podemos decir que la ruta crítica es:

1 – 2 – 4 – 6 – 7

La duración total es de 23,17 días.

Veamos ahora la probabilidad de terminar el proyecto en 22,00 días.

Primero calculamos la varianza de la ruta crítica.

$$0,25 + 0 + 0,1 \quad 1 + 0,11 = 0,47$$

Calculemos ahora el valor de Z

$$Z = \frac{22,00 - 23,17}{\sqrt{0,47}} = \frac{-1,17}{0,685} = -1,708$$

Con este valor ya calculado nos valemos la tabla 1(A) del anexo y vemos que la probabilidad buscada es $1 - 0,04363 = 0,95637$ es decir 95,64%.

RENTABILIDAD DE LAS INVERSIONES

Capítulo 5

RENTABILIDAD DE LAS INVERSIONES

Introducción

Para formar una empresa debe realizarse una inversión. El capital para esta inversión puede provenir de personas naturales, empresa, bancos o una combinación de ellas.

Cualquiera que sea la fuente siempre habrá de por medio una utilidad o una rentabilidad producida por el capital invertido la cual es medida a través de una tasa o porcentaje. ¿Cómo definir esa tasa de crecimiento? Una metodología común pero errada ha sido la de considerar como referencia la tasa máxima que ofrecen los bancos en una inversión a plazo fijo. Decimos errada debido a que desde el instante en que la tasa de inflación (en caso de haberla) supera esa referencia, la inversión empieza a generar pérdidas. Vemos entonces que la tasa bancaria queda descartada desde esta óptica.

Si tomamos como referencia la tasa de inflación, vemos que ésta permite mantener el dinero constante (el poder adquisitivo del dinero se mantiene invariable). Desde ésta óptica podemos asegurar que lo aconsejable para generar una referencia es tomar la tasa de inflación más un premio al riesgo. Entonces hemos determinado la Tasa Mínima Aceptable de Rendimiento (TMAR).

En este caso, lo que hemos llamado “premio al riesgo” en realidad viene a ser una tasa de crecimiento real del dinero invertido. En términos reales, tratándose de una economía considerada normal, este valor oscila entre 10 y 15%.

En el caso de que el capital destinado a inversiones provenga de varias fuentes, la metodología de cálculo sería la siguiente:

Supongamos que para llevar a efecto un proyecto se requieren US\$200.000 el mismo que es aportado por inversionistas 50%; otras empresas 25% y un bando local el 25 % restante. Asumamos adicionalmente que la tasa de inflación es del 60% y que los niveles de premio al riesgo son del 10% para inversionistas; 12% para otras empresas y que el banco opera con una tasa de interés del 35%.

<u>APORTANTE</u>	<u>%APORTACION</u>	<u>TMAR</u>	<u>TASA PONDERADA</u>
Inversionista	50	70	35
Otras empresas	25	72	18
Banco	25	35	8,75
TMAR Global			61,75 %

La TMAR Global corresponde a la tasa mínima que debe generar el proyecto a efectos de pagar a los inversionistas, otras empresas y banca los valores correspondientes a la TMAR de cada uno de ellos.

Metodología

El presente artículo enfocará de manera directa y práctica dos métodos: el VAN (Valor Actual Neto) y la TIR (Tasa Interna de Retorno). Casi la totalidad de autores coinciden en que cualquiera de los dos o ambos son suficiente evidencia para determinar si un proyecto debe ser aceptado o no y que además ante la posibilidad de dudas el método dirimente será el VAN. En la práctica puede darse el caso de que se produzcan pérdidas en uno o varios periodos. Ante este caso se recomienda no

usar la TIR como herramienta de decisión y por el contrario usar el VAN. (Baca Urbina, Evaluación Económica de Proyectos, 2006, pág. 225)

Para una evaluación apropiada se debe tomar en consideración la incidencia del factor inflación. El valor del dinero en el tiempo (en inglés, Time Value of Money, abreviado usualmente como TVM) es un concepto económico basado en la premisa de que un inversor prefiere recibir un pago hoy, en lugar de recibirlo a futuro.

A manera de ejemplo consideremos un documento que vence dentro de un año por un valor de US\$1.000. A medida que transcurre el tiempo, su valor será menor que el de hoy. En otras palabras, mientras más nos alejamos de “hoy” su valor se irá reduciendo sistemáticamente en función de una tasa llamada “costo del dinero” también conocido como “valor tiempo del dinero”. (Sistema Nacional de Inversiones Públicas, 2007, pág. 26)

Valor actual neto

Es el valor monetario que resulta de restar la suma de los flujos descontados a la inversión inicial. (Baca Urbina, Evaluación Económica de Proyectos, 2006, pág. 219)

$$VAN = -P + \frac{FNE_1}{(1+t)^1} + \frac{FNE_2}{(1+t)^2} + \frac{FNE_3}{(1+t)^3} + \dots + \frac{FNE_n + VS}{(1+t)^n}$$

P = Inversión Inicial

t = tasa de descuento

FNE = Flujo Neto de Efectivo

VS = Valor de Salvamento

Resulta de mucha importancia que al hacer este cálculo de tenga en cuenta lo siguiente: cuando se hacen cálculos para llevar en forma equivalente dinero del presente al futuro se utiliza una tasa de interés o crecimiento “ i ”. Cuando por el contrario se quiere traer cantidades futuras al presente se usa una tasa de descuento “ t ” y a los flujos obtenidos se les denomina “flujos descontados”. Tanto la tasa de interés como la tasa de descuento no son otra cosa que la tasa mínima aceptable de rendimiento conocida como TMAR la cual finalmente es definida por quien realiza la evaluación. (Baca Urbina, Evaluación Económica de Proyectos, 2006, pág. 223)

El método del Valor Actual Neto (VAN) permite interpretar fácilmente su resultado en términos monetarios. Supone una reinversión de todas las ganancias anuales y los criterios de decisión a aplicar a efectos de tomar una decisión son:

$VAN \geq 0$ acepte el proyecto.

$VAN \leq 0$ rechace el proyecto.

$VAN = 0$ la decisión queda al criterio del analista. (García Padilla, 2015, pág. 361)

Para la aplicación de estos criterios, lo primero que se debe realizar es la definición de la TMAR la misma que responde a los riesgos que conlleva la inversión.

Un segundo criterio es que para comparar de manera adecuada se deben trasladar los flujos netos anuales de todo el horizonte de tiempo

al instante cero. Esto es lo que se conoce como valor presente. (Baca Urbina, Ingeniería Financiera, 2016, pág. 51)

Los empresarios suelen comparar diferentes alternativas para comprobar si un proyecto le conviene o no. Normalmente la alternativa con el VAN más alto suele ser la mejor para la entidad; pero no siempre tiene que ser así. Hay ocasiones en las que una empresa elige un proyecto con un VAN más bajo debido a diversas razones como podrían ser la imagen que le aportará a la empresa su participación en beneficio de la comunidad, por motivos estratégicos u otros motivos que en ese momento interesen a dicha entidad en función de aportes a la sociedad.

Es importante señalar que a medida que se incrementa la TMAR el valor del VAN tiende a disminuir hasta volverse cero o negativo. Es aquí donde surge la necesidad de efectuar una correcta apreciación de la TMAR caso contrario un proyecto bueno puede ser rechazado un proyecto malo puede ser aceptado.

Tasa interna de retorno (TIR)

En términos generales es la tasa que hace que el VAN sea igual a cero. También podemos decir que es la tasa que iguala la suma de los flujos descontados a la inversión inicial. (Baca Urbina, Evaluación Económica de Proyectos, 2006, pág. 221)

Es muy importante tener presente que el primer criterio para tomar la decisión de aceptar o rechazar un proyecto no es el cálculo en sí, sino que es justamente la correcta determinación de la tasa mínima

aceptable de rendimiento (TMAR) dado que la misma está estructurada tomando en consideración el riesgo que conlleva la inversión. (Baca Urbina, Ingeniería Financiera, 2016, pág. 54)

El criterio a aplicar para tomar la decisión en función de la TIR es:

Si $TIR \geq TMAR$ acepte el proyecto.

Si $TIR \leq TMAR$ rechace el proyecto.

Las críticas a este método parten en primer lugar de la dificultad del cálculo de la T.I.R. (haciéndose generalmente por iteración), aunque las hojas de cálculo y las calculadoras modernas (llamadas financieras) han solucionado esta dificultad.

Pero la más importante crítica del método (y principal defecto) es la inconsistencia matemática de este método cuando en un proyecto de inversión hay que efectuar otros desembolsos (además de la inversión inicial), durante la vida útil del mismo, ya sea debido a pérdidas del proyecto, o inversiones adicionales.

Otra definición también acertada dice: “Es la máxima tasa que un inversionista puede aceptar como tasa de interés para el pago de un crédito sabiendo que tanto capital como interés serán cubiertos con los ingresos propios generados por el mismo proyecto”. (Chain, 2012, pág. 273)

$$P = \frac{FNE_1}{(1+t)^1} + \frac{FNE_2}{(1+t)^2} + \frac{FNE_3}{(1+t)^3} + \dots + \frac{FNE_n + VS}{(1+t)^n}$$

t = tasa que permite que ambos miembros de la ecuación sean iguales y por tanto corresponde a la TIR buscada.

Conceptualmente la TMAR es la tasa mínima que un proyecto debe generar como TIR para ser aceptado. Por debajo de la TMAR, el proyecto deberá ser rechazado. (Chaín Sapag, 2008, pág. 273)

Adición del valor de salvamento

Para efectos de evaluación, por lo general se considera un periodo de 5 años como vida útil del proyecto al cabo de los cuales los activos de la empresa se venderían generando un ingreso adicional y final llamado valor de salvamento o valor residual. Al término de ese periodo se hace un corte artificial del tiempo con fines de evaluación.

Una vez hecho el corte artificial, ya no se consideran más ingresos, la planta deja de operar y se venden todos los activos. No hacer esta consideración implicaría cortar abruptamente la vida del proyecto y dejar abandonada la planta con todos sus activos. (Baca Urbina, Evaluación Económica de Proyectos, 2006, pág. 225)

Inflación

La inflación es el aumento generalizado y sostenido de los precios de bienes y servicios. Para medir el crecimiento de la inflación se utilizan índices, que reflejan el crecimiento porcentual de una canasta de bienes ponderada. La inflación deteriora el poder adquisitivo del dinero a través del tiempo y en consecuencia tiende a sobre valorar los activos monetarios. En términos reales, las cifras de un estudio de factibilidad se determinan en el instante cero es decir antes de realizar la inversión lo que significa que las cifras de ingresos y egresos ya se verían afectados por la inflación al final del primer año. (Baca Urbina, Evaluación Económica de Proyectos, 2006, pág. 227)

Tipos de inflación

Se conocen tres tipos:

Inflación por demanda. Se da en los casos en que la demanda es superior a la oferta.

Inflación por costos. Incremento en precios de materia prima. Si son importadas produce la llamada “inflación importada”.

Inflación estructural. Se da principalmente en economías monopólicas u oligopólicas.

Devaluación

La devaluación es la pérdida del valor nominal de una moneda corriente frente a otras monedas extranjeras. Werner Ketelhohn en su libro “Inversiones Estratégicas” (pag. 242) nos presenta un ejemplo muy práctico con el cual deja totalmente explicado los efectos de la devaluación.

“Supongamos que una empresa industrial importa materia prima de un país desarrollado del cual obtiene crédito a largo plazo con un interés del 4% anual. Debido a un comportamiento errático de la economía, el país importador se ve obligado a devaluar su moneda durante tres años seguidos a razón de 10; 7 y 12% cada año. Veamos ahora cual será el efecto que se dará sobre la tasa del 4 % inicialmente pactada”.

El análisis lo podemos hacer año a año aplicando la siguiente fórmula:

$$i = r(1 + d) + d$$

i = tasa de interés afectada por la devaluación.

r = tasa de interés inicialmente pactada.

d = índice de devaluación anual.

Basándonos en el texto del ejercicio, al final del año 1, el 4% inicial se convertirá en:

$$i = 0,04(1 + 0,1) + 0,1 = 0,144$$

Esto significa que el 4% de inicio del primer año se convirtió en 14,4% a finales del mismo año.

A finales del año 2 tendremos:

$$i = 0,144(1 + 0,07) + 0,07 = 0,224$$

Esto significa que el 14,4% de inicio del segundo año se convirtió en 22,4% a finales del mismo año.

A finales del año 3 tendremos:

$$i = 0,224(1 + 0,12) + 0,12 = 0,371$$

Esto significa que el 22,4% de inicio del tercer año se convirtió en 37,1% a finales del mismo año.

Podemos resumir entonces que el 4% de interés pactado inicialmente se convirtió al final del tercer año en 37,1%. Esto nos revela muy claramente los enormes riesgos de contratar créditos con países con moneda fuerte, más aún si se contrata a un largo plazo.

En conclusión, con frecuencia los empresarios se ven obligados a considerar el efecto que una devaluación tendrá sobre los resultados económicos y financieros de un proyecto. Es importante entonces considerar cuál será el rumbo y en ese sentido encontramos las siguientes opciones: proyectos para exportar parte de su producción; proyectos para importar parte de la materia prima a requerir y proyectos que tienen un porcentaje de la inversión cubierto con deuda en moneda extranjera. (Ketelhohn, 1986, pág. 242)

Cuando se produce la devaluación de una moneda, por lo general se afectan las tasas de interés. Producto de la devaluación, las tasas de interés deberán ser reajustadas y por tanto también genera inflación.

Ejercicios de aplicación

El eterno dilema: ¿comprar o alquilar?

El jefe de bodegas ha solicitado a la Gerencia de Operaciones la compra de un montacargas con lo cual espera optimizar la gestión del área. En la actualidad, en la medida que es necesario, se procede a contratar los servicios a diferentes agencias del medio. En varias ocasiones de ha intentado decidir sobre la compra de un montacargas, pero los resultados no han sido satisfactorios.

Haciendo averiguaciones, se pudo determinar que el equipo apropiado tiene un costo de US\$45.000 y tiene una vida útil de 10 años al final de los cuales su valor de salvamento será 10% de su costo original.

El costo de operación, mantenimiento reparaciones y otros se estima en US\$3.500 por año, con una actividad de 2.500 horas por año. La gerencia de plano descarta la posibilidad de cederlo en alquiler.

Las actividades propias del montacargas se resumen a lo siguiente:

Recepción de materia prima:	2 horas / semana
Transferencia de producto terminado a la bodega:	1 hora / semana
Despacho de productos terminados:	3 horas / semana

Adicional a estas, en la actualidad no se consideran otras actividades para el montacargas, el mismo que es alquilado a una empresa vecina a razón de US\$10 por hora.

Buscando alternativas, encontramos que en el mercado existen empresas que alquilan dichos equipos a razón de US\$8.5 con todos los costos de operación por cuenta de quien alquila.

Considerando que la empresa aplica una tasa de descuento del 12%, usted como Gerente de Operaciones, ¿Qué decisión tomaría?

Solución

$$\text{Costo de capital} = \frac{45.000 * 0.12 * (1 + 0.12)^{10}}{(1 + 0.12)^{10} - 1} = \text{US\$}7.964.1$$

$$\text{Costo de operación} = \text{US\$}3.500$$

$$\text{Costo anual equivalente (CAE)} = 7.964.1 + 3.500 = \text{US\$}11.464.1$$

$$\text{CAE por hora} = \frac{11.464.1}{2000} = \text{US\$}5.7$$

En vista de que los costos por hora de alquiler son mayores, se recomienda comprar el montacargas.

Manutención

“Embalajes Modernos” es una empresa de metalmecánica fundada en Guayaquil alrededor del año 1975 y destinada a trabajar en la fabricación de accesorios industriales. Uno de los productos a fabricar cubre el 60 % del mercado. En el área destinada a este ítem hay una sección con seis máquinas semiautomáticas iguales que son atendidas por tres obreros por turno de trabajo. Debido a los actuales niveles de costos, se origina un punto de equilibrio demasiado alto. El Gerente de Operaciones, en su afán de lograr un punto de equilibrio alcanzable ha solicitado al ingeniero de planta realice un estudio integral del proceso que apunte de manera directa a bajar sustancialmente dicho rubro.

La tarea de análisis se da de inmediato y lo primero en determinar es la asignación de máquinas por operario y un detalle de tareas a realizar y en ese orden de cosas se ha determinado que cada obrero atiende dos máquinas siendo sus ocupaciones principales: alimentar las máquinas; evacuar los productos ya terminados (actualmente se utiliza un montacargas) y vigilar el correcto funcionamiento de las diversas partes de las máquinas.

Luego de realizar un estudio de métodos de trabajo de manutención (alimentación y evacuación de máquinas) se ha llegado a la conclusión que añadiendo un cargador automático a cada máquina y dotando al grupo de las seis máquinas de un polipasto para elevar los lotes de piezas fabricadas, es posible que cada obrero lleve tres máquinas con lo que la plantilla se reduciría a dos obreros por turno.

El presupuesto (incluidos los gastos de instalación) para las mejoras propuestas es el siguiente:

Cargador automático:	US\$8.500 por máquina
Polipasto:	US\$25.000 para todo el grupo.

La vida útil tanto de los mecanismos de alimentación como del polipasto se estima en cinco años con valor residual de US\$475 y US\$2.500 respectivamente. El costo variable de producción de cada unidad es de US\$2.75 y el costo total anual de mantenimiento (cargadores y polipasto) se estima en US\$600 por año. En la actualidad se trabaja a tres turnos. El costo de un obrero por año es de US\$20.000 (incluye beneficios sociales) y la producción anual de la sección se estima en 850.000 piezas.

Analice el nivel de variación del punto de equilibrio en función de las variantes presentadas con la implementación de la automatización propuesta y determine:

- Ahorro por pieza que se obtendría con el nuevo sistema de manutención.
- Reducción porcentual del punto de equilibrio.
- Decisión a tomar sobre el nuevo sistema.

Solución

De ser viable la propuesta, encontramos de entrada que el número de obreros se reduce de tres a dos por turno. Si se trabaja a tres turnos la reducción de personal será de nueve a seis obreros con lo que se genera el siguiente ahorro:

$$(9 - 6) * 20.000 = \text{US\$}60.000$$

De este ahorro debemos deducir los costos operativos anuales en los siguientes términos:

$$\text{Cargador automático} = \frac{(8.500 - 500) * 6}{5} = \text{US\$}9.600$$

$$\text{Polipasto} = \frac{25.000 - 2.500}{5} = 4.500$$

$$\text{Mantenimiento} = 600$$

$$\text{Total, costos operativos anuales} = \text{US\$}14.700$$

$$\text{Ahorro neto anual} = 60.000 - 14.700 = \text{US\$}45.300$$

Ahorro por pieza

$$\frac{45.300}{850.000} = \text{US\$}0.0533$$

En función del costo variable de producción unitario, equivale a:

$$\frac{0.0533}{2.75} * 100 = 1.94\%$$

Rentabilidad de la inversión

$$\text{RI} = \frac{\text{Ahorro neto anual}}{\text{Inversión}} * 100 = \frac{45.300}{(8.500 * 6) + 25.000} * 100 = 59.6\%$$

Periodo de amortización

$$\frac{\text{Inversión}}{\text{Ahorro neto anual}} = \frac{76.000}{45.300} = 1.68 \text{ años}$$

Plataforma para transporte de carga

Una empresa dispone de una plataforma de transporte antigua y en mal estado y tiene ante sí las siguientes opciones:

- Efectuar una reparación total.
- Venderla y trabajar con equipo alquilado.

- Venderla y comprar una unidad nueva.

Para el caso de la reparación total, el costo sería de US\$20.000 y se garantiza tres años más de vida útil al final de los cuales la unidad podría venderse en US\$5.000. Operar el vehículo representa:

Combustible	US\$8.000 por año
Lubricantes	750
Reparaciones	1.000
Gastos varios	350

El sueldo del conductor es de US\$750 por mes incluyendo las prestaciones sociales. La unidad desplaza 2.000 cajas y hace 4 recorridos por día. Su eficiencia actual es del 30% y se espera elevarla al 50% con la reparación.

Dado el estado de vetustez, el equipo debe trabajar 250 días al año. El seguro tiene un costo de US\$2.600 anuales y los costos de matrícula y revisión ascienden a US\$1.000 por año.

Para el caso de alquilar la plataforma, la capacidad será también de 3.000 cajas con una eficiencia del 65% y su costo por recorrido es de US\$150. Operará durante 275 días por año. Su nivel de confiabilidad es bajo.

Para el caso de comprar una plataforma nueva, su costo es de US\$300.000 y la plataforma vieja se vendería en US\$50.000. La capacidad de transporte a aplicar es de 3.000 cajas con cuatro recorridos por día. Su vida útil está estimada en 12 años durante los

cuales tendrá un rendimiento promedio del 85% operando 275 días al año. Sus costos operativos serán:

Combustible	US\$6.500
Lubricantes	500
Reparaciones	500
Gastos varios	250

El sueldo del conductor es de US\$750 por mes incluyendo las prestaciones sociales. El seguro tiene un costo de US\$3.250 anuales y los costos de matrícula y revisión ascienden a US\$1.200 por año. El valor de salvamento se estima en US\$30.000. El costo del dinero se estima en el 18%.

Efectúe el análisis correspondiente y mediante un informe técnico recomiende la alternativa a ser implementada.

Solución

El ejercicio será resuelto considerando por separado cada una de las diferentes alternativas. Al final y previo a un análisis comparativo se tomará la decisión más adecuada.

Se enfocará primero la alternativa de reparación, luego la de alquiler y finalmente la de compra.

Alternativa de reparación

$$\text{Costo de amortización} = C * \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 20.000 \frac{0.18(1+0.18)^3}{(1+0.18)^3 - 1} = \text{US\$9.197.51}$$

Crédito por valor de salvamento

$$Cr = 5000 * \frac{0.18}{(1+0.18)^3 - 1} = 5.000 * \frac{0.2957}{0.6430} = \text{US\$}1.399.62$$

Los costos operativos de la alternativa son:

Conductor = $750 * 12 =$	US\$9.000
Combustible =	US\$8.000
Lubricates =	US\$ 750
Gastos de reparación =	US\$1.000
Seguros e impuestos =	US\$3.600
Otros =	US\$ 350
Total, costos operativos	US\$22.700

Costo anual equivalente

$$9.197.5 - 1.399.62 + 22.700 = \text{US\$}30.497.82$$

Número de cajas movilizadas por año

$$250 \frac{\text{días}}{\text{año}} * 0.5 * 4 \frac{\text{viajes}}{\text{día}} * 2.000 \frac{\text{cajas}}{\text{viaje}} = 1'000.000 \frac{\text{cajas}}{\text{año}}$$

Costo por caja movilizada

$$\frac{30.497.82}{1'000.000} = 0.0305 \frac{\text{US\$}}{\text{caja}} = 3.05 \frac{\text{Ctvs}}{\text{caja}}$$

Alternativa de alquiler

Cajas movilizadas por año:

$$275 \frac{\text{días}}{\text{año}} * 0.65 * 4 \frac{\text{viajes}}{\text{día}} * 3.000 \frac{\text{cajas}}{\text{viaje}} = 2'145.000 \frac{\text{cajas}}{\text{año}}$$

Número de viajes a realizar por año

$$\frac{2'145.000}{3.000} \frac{\text{cajas}}{\frac{\text{cajas}}{\text{viaje}}} = 715 \text{ viajes}$$

$$\text{Costo total} = 715 \text{ viajes} * 150 \frac{\text{US\$}}{\text{viaje}} = \text{US\$}107.250$$

Costo por caja movilizada

$$\frac{107.250}{2'145.000} = 0.05 \frac{\text{US\$}}{\text{caja}} = 5 \frac{\text{ctvs}}{\text{caja}}$$

Alternativa de compra

$$\begin{aligned} \text{Costo de amortización} &= C * \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = (300.000 - 50.000) \left(\frac{0.18(1+0.18)^{12}}{((1+0.18)^{12}) - 1} \right) = \\ &= 250.000 \left(\frac{1,3118}{6,2878} \right) = \text{US\$}52.150 \end{aligned}$$

Crédito por valor de salvamento

$$\text{Cr} = 30000 * \frac{0.18}{((1+0.18)^{12}) - 1} = 30.000 * \frac{0.2957}{0.6430} = \text{US\$}858$$

Costos de operación

Conductor	US\$9.000
Combustible	US\$6.500
Lubricantes	US\$ 500
Reparaciones	US\$ 500
Seguro e impuestos	US\$4.450
Total, costos operativos	US\$20.950

Costo anual equivalente

$$52.150 - 858 + 20.950 = \text{US\$}72.242$$

Número de cajas movilizadas por año

$$275 \frac{\text{días}}{\text{año}} * 0.85 * 4 \frac{\text{viajes}}{\text{día}} * 3.000 \frac{\text{cajas}}{\text{viaje}} = 2'805.000 \frac{\text{cajas}}{\text{año}}$$

Costo por caja movilizada

$$\frac{72.242}{2'805.000} = 0.026 \frac{US\$}{caja} = 2.6 \frac{Ctvs}{caja}$$

Resumiendo, el análisis de costos tenemos:

<u>Alternativa</u>	<u>Ctvs. / caja</u>
Reparación	3,05
Alquiler	5,00
Compra	2,60

En base a esto, la decisión a tomar es acoger la opción de compra.

Análisis de casos propuestos

Plásticos industriales Ecuatorianos S.A. (Pliesa)

Alternativa	Ctvs. / caja
Reparación	3,05
Alquiler	5,00
Compra	2,60

En base a esto, la decisión a tomar es acoger la opción de compra.

Análisis de casos propuestos

Plásticos Industriales Ecuatorianos S.A. (Pliesa)

Se trata de una empresa nacional dedicada a la producción de polietileno de alta densidad, el cual es utilizado como materia por diferentes industrias.

PLIESA fue fundada en la década de los 60 por un grupo de empresarios guayaquileños que decidieron producir localmente la mencionada materia prima que en esa época era importada desde USA.

Las actividades se iniciaron con buenos resultados a tal punto que en el lapso de cinco años llegaron a captar el 70 % del mercado nacional con lo cual prácticamente imponían sus condiciones. Con el pasar de los años, a causa por un lado de los graves problemas del país en materia económica y por otro a la llegada de empresas extranjeras que ofrecían el mismo producto a precios más bajos, la empresa fue perdiendo rentabilidad viéndose abocada a reducir sistemáticamente el precio de venta del producto a fin de no debilitar su presencia en el mercado. Debido a la fuerte competencia, el precio de venta por kilo del producto se fue reduciendo sistemáticamente hasta ubicarse en UM34 con un nivel de ventas de 60.000 kilos por mes.

La estructura de costos mensuales actual es la siguiente:

Materiales	UM1'312.000
Mano de obra (4 obreros por turno)	225.000
Gastos generales de producción	200.000
Energía	120.000
Gastos de mantenimiento	50.000
Gastos de amortización	25.000

Para la gerencia la única vía para mejorar las utilidades es reducir los costos que con la instalación actual ya están ajustados al mínimo. Incrementar el precio de venta resulta imposible si consideramos la enorme presión de la competencia.

Ante esta situación, la gerencia de operaciones industriales ha decidido reemplazar la máquina actual por una moderna y la opción más viable es una que ya ha sido probada con excelentes resultados en varios países vecinos.

Las principales características de esta maquinaria son:

Costo instalado	UM5'000.000
Consumo de energía (para 60.000 Kg/mes)	115.000
Valor residual esperado	500.000
Mantenimiento (promedio mes)	35.000
Vida útil	7 años.
Ahorro de materiales	5 %
Mano de obra requerida	3 por turno
Capacidad de producción estimada	100.000 Kg/mes
Gastos generales de producción	200.000

La máquina actual fue adquirida hace 10 años a un costo de UM2'000.000 y existe una oferta de compra por UM700.000.

A efectos de tomar una decisión, el Gerente de Operaciones solicita a la Facultad de Ciencias de la Ingeniería un análisis detallado de la situación determinando:

- Rentabilidad de la inversión actual y propuesta.
- Comportamiento del punto de equilibrio.
- Conclusiones.

Solución

La situación actual de la empresa es la siguiente:

	<u>UM</u>	<u>Tipo</u>	
Materiales	1'312.000	Variable	
Energía	120.000	Variable	CV = UM1'435.000
Amortización	25.000	Fijo	
Mantenimiento	50.000	Fijo	
Mano de Obra	225.000	Fijo	
Gastos generales de producción	200.000	Fijo	CF = UM500.000

El costo total será entonces UM1'932.000

Rentabilidad

Ingreso = 60.000 * 34 = UM2'040.000 por mes

Utilidad Bruta = 2'040.000 – 1'932.000 = UM108.000 por mes

$$R = \frac{108.000}{1'932.000} * 100 = 5.6 \%$$

Punto de equilibrio

$$PE = \frac{CF}{PV - CV} = \frac{500.000}{34 - \frac{1'432.000}{60.000}} = \frac{500.000}{34 - 23.87} = 49.358 \text{ u.}$$

Análisis de la situación propuesta

Costos variables

Materiales	1'312.000 – 5% =	UM1'246.400
Energía		115.000
Total		UM1'361.400

Costos fijos

Amortización	$\frac{5'000.000}{7*12} =$	UM59.523.8
Mantenimiento		35.000
Mano de obra	$\frac{225.000}{4} * 3 =$	168.750
Gastos gen, prod.		200.000
Total		UM463.273.8
Costo Total de producción		UM1'824.673.8

Rentabilidad de la propuesta

Ingreso = 60.000 * 34 =	UM2.040.000
Costo total =	1'824.673.8
Utilidad bruta =	UM 215.326.2

$$\text{Rentabilidad} = \frac{215.326.2CF}{1'673.8} * 100 = 11.8 \%$$

$$PE = \frac{463.273.8}{34 - \frac{1'361.400}{60.000}} = \frac{463.273.8}{34 - 22.7} = 40.997.7 \text{ u}$$

Variación del punto de equilibrio

$$\frac{40.997.4 - 49.358}{49.358} * 100 = - 16,94 \%$$

Conclusiones

Luego de realizar el análisis y optar por la mejor alternativa en términos de costos, y considerando que el punto de equilibrio se reduce en un 16.94 % (así lo dice el signo negativo), podemos concluir que en términos absolutos el proyecto es rentable.

Pero en términos relativos nos encontramos que esa rentabilidad puede ser real pero en el costo plazo. La empresa debe considerar que esta acción de seguro causará una reacción por parte de la competencia la misma que con toda seguridad tratará de sacarla del mercado.

Se recomienda buscar otras alternativas que sean sostenibles en el tiempo.

Ejercicio de aplicación

Análisis de inversión

Francisco Guerrero, Gerente General de Quinasa, reconocida empresa dedicada a la producción y comercialización de productos químicos orientados a las industrias de fármacos y alimentos desea evaluar la conveniencia o no de invertir US\$5.935 para incursionar en la comercialización de un producto de consumo masivo con un volumen inicial anual de 105 toneladas año. Se estima que el tamaño del mercado es de 650 toneladas por año de las cuales el 30 % es importado. El precio de ventas del mencionado producto es de US\$252.4 cada tonelada.

El costo de producción anual es de US\$22.329; los gastos de ventas por año suman US\$844; la depreciación anual es de US\$453. Anualmente la empresa paga por concepto de impuesto un total de 47.36% que incluyen el 15% de utilidades de trabajadores.

La vida útil del proyecto se considera de 5 años al final de los cuales el valor de salvamento será de US\$3.129. La tasa mínima aceptable de rendimiento a considerar es del 15%.

A la vista de esta información, el Sr. Guerrero solicita al Gerente de Operaciones hacer el análisis y la correspondiente evaluación económica para los siguientes escenarios:

VAN y TIR con inflación cero

VAN y TIR con una inflación del 20% anual.

Adicionalmente solicita se le entregue un informe técnico que incluya conclusiones y recomendaciones.

Solución

Análisis sin inflación

	<u>HORIZONTE DE TIEMPO</u>					
	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>
Inversión Inicial	5935					
Ingreso		26.502,00	26.502,00	26.502,00	26.502,00	26.502,00
Costo de Producción		22.329,00	22.329,00	22.329,00	22.329,00	22.329,00
Depreciación		453,00	453,00	453,00	453,00	453,00
Costo de Ventas		<u>844,00</u>	<u>844,00</u>	<u>844,00</u>	<u>844,00</u>	<u>844,00</u>
Utilidad Antes / Impuestos		2.876,00	2.876,00	2.876,00	2.876,00	2.876,00
Impuestos (47.36%)		1.362,07	1.362,07	1.362,07	1.362,07	1.362,07
Utilidad Despues / Impuestos		1.513,93	1.513,93	1.513,93	1.513,93	1.513,93
Depreciación		453,00	453,00	453,00	453,00	453,00
Valor de Salvamento						3.129,00
F.N.E.	-5935	1.966,93	1.966,93	1.966,93	1.966,93	5.095,93

$$VAN = -5.935 + \frac{1.966.93}{(1+0.15)^1} + \frac{1.966.93}{(1+0.15)^2} + \frac{1.966.93}{(1+0.15)^3} + \frac{1.966.93}{(1+0.15)^4} + \frac{1.966.93+3.129}{(1+0.15)^5}$$

Resolviendo la ecuación encontramos: VAN = 2.214.35

Otra forma de realizar el cálculo es desde el punto de vista de una anualidad. Desde esa arista tenemos:

$$VAN = -5.935 + 1.967 \left(\frac{(1 + 0.15)^5 - 1}{0.15(1 + 0.15)^5} \right) + \frac{3.129}{(1 + 0.15)^5}$$

$$VAN = \text{US\$}2.214,35$$

Visto desde los dos ángulos, el proyecto debe aceptarse debido a que el VAN calculado es positivo.

Usando una calculadora financiera (se lo puede hacer también por el método de iteraciones) determinamos: $TIR = 27.67 \%$.

El proyecto debe ser aceptado en vista de que la TIR calculada es mayor que la TMAR. Podemos apreciar que el análisis de la TIR ratifica lo expresado en el análisis del VAN y por ende el proyecto debe ser aceptado.

Una alternativa de cálculo para la TIR es el método de interpolación cuyo procedimiento consiste en asumir dos valores para i uno que origine un VAN positivo y otro que genere un VAN negativo, es decir que el uno estará sobre el eje X y el otro por debajo. El modelo matemático que nos permite realizar el proceso de interpolación es el siguiente:

$$TIR = i_1 + (i_2 - i_1) \left(\frac{VAN_1}{VAN_1 - VAN_2} \right)$$

i = tasas de interés asumidas

VAN = Valor Actual Neto derivado de la i asumidas.

Metodología de aplicación

En primer lugar, vamos a asumir una tasa de interés del 20%.

$$VAN = -5.935 + \frac{1.966.93}{(1+0.2)^1} + \frac{1.966.93}{(1+0.2)^2} + \frac{1.966.93}{(1+0.2)^3} + \frac{1.966.93}{(1+0.2)^4} + \frac{1.966.93+3.129}{(1+0.2)^5}$$

$$VAN = -5935 + 1639,11 + 1365,92 + 1138,27 + 948,56 + 2047,96 =$$

Tenemos ya el Van positivo.

Asumamos ahora una tasa de interés del 30%

$$VAN = -5.935 + \frac{1.966.93}{(1+0.3)^1} + \frac{1.966.93}{(1+0.3)^2} + \frac{1.966.93}{(1+0.3)^3} + \frac{1.966.93}{(1+0.3)^4} + \frac{1.966.93+3.129}{(1+0.3)^5}$$

$$VAN = -5935 + 1513,02 + 1163,86 + 895,28 + 688,68 + 1372,49$$

$$VAN = -5935 + 5633,33 = -301,67$$

$$TIR = 0,2 + (0,3 - 0,2) * \left(\frac{1204,82}{(1204,82 - (-301,67))} \right)$$

$$TIR = 0,2 + (0,1) * \left(\frac{1204,82}{1506,49} \right) = 0,2 + 0,1 * 0,7997$$

$$TIR = 0,2 + 0,07997 = 0,27997$$

$$TIR = 27,9\%$$

Enfoque con inflación

En el ejercicio anterior hemos obtenido un VAN de US\$2.214,35 y una TIR de 27,67%. Veamos ahora que ocurre cuando se produce un efecto inflacionario del 20% anual.

El procedimiento de análisis a seguir es el siguiente:

Primero ajustamos el VS.

$$VS = 3.129 * 1.2^5 \quad (\text{ajustado al 20\% anual en cinco años})$$

$$VS = 7.785.95$$

A continuación, se ajusta la TMAR a la inflación considerada y tenemos:

$$0.15 + 0.2 + (0.15 * 0.2) = 0.38$$

Por lo tanto, la nueva tasa de descuento (TMAR) para evaluar el proyecto con una inflación del 20% es del 38%.

Una vez definidos el valor de salvamento ajustado y la tasa de descuento ajustada se procede a determinar los nuevos flujos anuales a efectos de calcular el nuevo VAN y la nueva TIR. Este nuevo flujo anual no debe considerar capital de trabajo.

Cada cifra anual será obtenida aplicando la siguiente fórmula:

	<u>HORIZONTE DE TIEMPO</u>					
	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>
Inversión Inicial	5.935					
Ingreso		31.802,40	38.162,88	45.795,46	54.954,55	65.945,46
Costo de Producción		26.794,80	32.153,76	38.584,51	46.301,41	55.561,70
Depreciación		453,00	453,00	453,00	453,00	453,00
Costo de Ventas		<u>1.012,80</u>	<u>1.215,36</u>	<u>1.458,43</u>	<u>1.750,12</u>	<u>2.100,14</u>
Utilidad Antes / Impuestos		3.541,80	4.340,76	5.299,51	6.450,01	7.830,62
Impuestos (47.36%)		1.677,40	2.055,78	2.509,85	3.054,73	3.708,58
Utilidad Despues / Impuestos		1.864,40	2.284,98	2.789,66	3.395,29	4.122,04
Depreciación		453,00	453,00	453,00	453,00	453,00
Valor de Salvamento						7.785,95
F.N.E.	-5.935	2.317,40	2.737,98	3.242,66	3.848,29	12.360,99

$$VAN = -5.935,00 + \frac{2317,4}{1,38} + \frac{2737,98}{1,38^2} + \frac{3242,66}{1,38^3} + \frac{3848,29}{1,38^4} + \frac{12360,99}{1,38^5}$$

$$VAN = 1.946,76$$

Utilizando el método de prueba y error (o usando una calculadora financiera) encontramos que la TIR con inflación del 20% equivale al 53.204%.

El análisis corrobora que el proyecto debe ser aceptado en vista de que el VAN sigue siendo positivo y la TIR se mantiene superior a la TMAR con inflación.

Veamos cómo queda este valor cuando le quitamos el efecto de la inflación para determinar lo que se conoce como TIR deflactada (TIRd).

$$TIR(d) = \frac{(0.53204-0.2)}{(1+0.2)} = \frac{0.33204}{1.2} = 0.2767$$

Vemos que, al eliminar el efecto de la inflación, la TIR con inflación reproduce la TIR sin inflación.

A manera de resumen veamos el siguiente cuadro:

	TMAR	TIR	DIFER.
f = 20%	0,38	0,53204	0,15204
f = 0	0,15	0,2767	0,1267

Desde esta óptica también se puede apreciar que la diferencia entre TIR y TMAR en los dos escenarios no son iguales. Esto se atribuye a los efectos de la inflación, por tanto, si al primero le anulamos el efecto de la inflación, se deberá reproducir el segundo tal como sigue:

$$0,15204 / 1,2 = 0,1267.$$

De igual forma, si al segundo lo afectamos con la inflación nos reproducirá el primero tal como sigue:

$$0,1267 \times 1,2 = 0,15204.$$

Para facilitar la tarea de determinar la TIR, podemos hacer uso de una fórmula empírica la cual considera los efectos inflacionarios en los siguientes términos:

$$TIR_{cf} = (TIR_{sf} - TMAR_{sf}) + TMAR_{cf} + f^*(TIR_{sf} - TMAR_{sf})$$

cf / sf (con / sin inflación)

Aplicando la referida fórmula al ejercicio presente tenemos:

$$TIR_{cf} = (0,2767 - 0,15) + 0,38 + 0,2(0,2767 - 0,15) = 0,532$$

Es decir que obtenemos el mismo valor de 53,2%.

Ejercicio de aplicación

Transporte de pasajeros

Una empresa de transportes considera que su flota de buses está muy deteriorada por lo que se enfrenta a las siguientes alternativas: realizarles una reparación integral; venderlos y tomar nuevas unidades en arriendo o venderlos y comprar nuevas unidades.

La reparación de carrocería y maquinaria prolongaría la vida útil de las unidades en tres años y costaría UM420.000 por unidad. Al final de esos tres años el valor de salvamento por unidad sería de UM250.000.

El sueldo del conductor es de UM18.000 por mes incluyendo las prestaciones. El bus moviliza 60 pasajeros y realiza cuatro recorridos por día. La eficiencia actual es del 30% y se aspira elevarla con la reparación al menos al 50%.

El quipo deberá trabajar 275 días por año. El costo anual del seguro e impuesto al rodaje es de UM7.000 y UM1.500 respectivamente.

Un bus alquilado con capacidad para cincuenta pasajeros cobra UM1.000 por cada recorrido y su nivel de confiabilidad es muy bajo.

Comprar un bus equivale a invertir en cada unidad UM1'500.000 siendo su capacidad para 60 pasajeros y deberán realizar cuatro recorridos por día. En promedio tendrá un nivel de eficiencia del 75% y su vida útil está estimada en 12 años. Igualmente, el período laborable es de 275 días. Sus costos operativos se estiman de la siguiente manera:

Conductor UM18.000 por mes. Combustibles y lubricantes UM121.000 por año; reparaciones UM90.000 por año; adicionalmente se estima un gasto de UM6.000 correspondientes a varios. Seguro e impuesto al rodaje anuales representan UM 8.000 y UM 2.500. El valor de salvamento al cabo de los doce años será de UM350.000. Vender las unidades obsoletas hoy representa un ingreso de UM250.000 por cada una.

Una cuarta alternativa es utilizar articulados (bus y furgón halados por una sola máquina). El equipo tiene un costo de UM2'300.000 y tienen una capacidad de 120 pasajeros e igualmente realizarían cuatro recorridos. La vida útil se estima en 12 años al final de los cuales tendrán un valor de salvamento de UM500.000. Su operatividad será 275 días por año y su eficiencia media será del 75%. Los gastos operativos son: chofer UM18.000 por mes; combustibles y lubricantes UM120.000/año. Reparación UM96.000 /año. Otros UM10.000/año.

Seguro UM35.000 y rodaje UM2.500 por año.

La empresa estima que, en términos constantes, el 25% es un costo razonable para el dinero.

Solución

Analizando una por una las diferentes opciones tenemos:

Alternativa de reparación

Amortización del capital para tres años

$$C * \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 420.000 * \frac{0.25(1+0.25)^3}{(1+0.25)^3 - 1} = \text{UM}215.177.84$$

Valor de salvamento traído al instante cero

$$\frac{250.000}{(1+0.25)^3} = \frac{250.000}{1.9531} = \text{UM}128.001.64$$

Costos operativos en UM (Unidades Monetarias)

Conductor	216.000
Mantenimiento	145.000
Combustible	115.000
Lubricante	26.000
Otros	25.500
Seguro	7.000
Impuesto al rodaje	1.500

Total, UM536.000

Costo total = Amortización – Valor de salvamento + Costos operativos

$$CT = 215.177.84 - 128.001.64 + 536.000 = \text{UM}623.176.2$$

Pasajeros movilizados por año

$$275 \frac{\text{días}}{\text{año}} * 0.5 * 4 \frac{\text{recor.}}{\text{día}} * 60 \frac{\text{pasaj.}}{\text{recor.}} = 33.000 \frac{\text{pasaj.}}{\text{año}}$$

Costo unitario equivalente por pasajero transportado

$$\frac{623.176.2}{33.000} = \text{UM}18.88 \text{ por pasajero}$$

Alternativa de alquilar

$$\frac{1.000}{50} = \text{UM20 por pasajero}$$

Alternativa de comprar

Amortización del capital para 12 años

$$(1'500.000 - 250.000) * \frac{0.25(1+0.25)^{12}}{(1+0.25)^{12}-1} = \text{UM335.500}$$

Valor de salvamento traído al instante cero

$$\frac{350.000}{(1+0.25)^{12}} = \frac{350.000}{14.552} = \text{UM24.051,68}$$

Costos operativos

Conductor	216.000
Otros	227.500
Total	UM443.500

Pasajeros movilizados por año

$$275 \frac{\text{días}}{\text{año}} * 4 \frac{\text{recor.}}{\text{día}} * 60 \frac{\text{Pasaj.}}{\text{recor.}} * 0.75 = 49.500 \frac{\text{pasaj.}}{\text{año}}$$

Costo anual equivalente

$$335.000 - 24.051,68 + 479.500 = 790.448.32$$

Costo unitario equivalente por pasajero transportado

$$\frac{790.448.32}{49.500} = \text{UM15.97}$$

Alternativa de costo bus + furgón

$$\text{Inversión inicial} = 2'300.000 - 250.000 = \text{UM2'050.000}$$

Amortización del capital

$$2'050.000 * \frac{0.25(1+0.25)^{12}}{(1+0.25)^{12}-1} = \text{UM550.701.1}$$

Valor de salvamento

$$\frac{500.000}{(1+0.25)^{12}} = \frac{500.000}{14.552} = \text{UM}34.359.5$$

Costos operativos

Conductor UM216.000

Otros 263.500

Pasajeros movilizados por año

$$275 \frac{\text{días}}{\text{año}} * 4 \frac{\text{recor.}}{\text{día}} * 120 \frac{\text{Pasaj.}}{\text{recor.}} * 0.75 = 99.000 \frac{\text{pasaj.}}{\text{año}}$$

Costo unitario equivalente por pasajero transportado

$$550.701.1 - 34.359,5 + 479.500 = \text{UM}995.911,6$$

$$\frac{995.911,6}{99.000} = \text{UM}10.06 \text{ por pasajero.}$$

Conclusión

Luego del análisis realizado a cada alternativa, vemos que la opción más indicada es la de comprar el bus con furgón incorporado la misma que tiene un costo de 10,06 um., por cada pasajero transportado.

Como segunda opción queda la alternativa de comprar el bus con 15,97 um., por cada pasajero transportado.



ANEXOS

ANEXOS

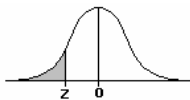


TABLA I (A)
DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA $N(0, 1)$

La tabla proporciona, para cada valor de z , el área que queda a su izquierda.

z	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
-4'4	0'00001	0'00001	0'00001	0'00000	0'00000	0'00000	0'00000	0'00000	0'00000	0'00000
-4'3	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001
-4'2	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001	0'00001
-4'1	0'00002	0'00002	0'00002	0'00002	0'00002	0'00002	0'00002	0'00002	0'00002	0'00001
-4'0	0'00003	0'00003	0'00003	0'00003	0'00003	0'00003	0'00002	0'00002	0'00002	0'00002
-3'9	0'00005	0'00005	0'00004	0'00004	0'00004	0'00004	0'00004	0'00004	0'00003	0'00003
-3'8	0'00007	0'00007	0'00007	0'00006	0'00006	0'00006	0'00006	0'00005	0'00005	0'00005
-3'7	0'00011	0'00010	0'00010	0'00010	0'00009	0'00009	0'00009	0'00008	0'00008	0'00008
-3'6	0'00016	0'00015	0'00015	0'00014	0'00014	0'00013	0'00013	0'00012	0'00012	0'00011
-3'5	0'00023	0'00023	0'00022	0'00021	0'00020	0'00019	0'00019	0'00018	0'00017	0'00017
-3'4	0'00034	0'00033	0'00032	0'00030	0'00029	0'00028	0'00027	0'00026	0'00025	0'00024
-3'3	0'00049	0'00047	0'00045	0'00044	0'00042	0'00041	0'00039	0'00038	0'00036	0'00035
-3'2	0'00069	0'00067	0'00064	0'00062	0'00060	0'00058	0'00056	0'00054	0'00052	0'00050
-3'1	0'00097	0'00094	0'00091	0'00088	0'00085	0'00082	0'00079	0'00077	0'00074	0'00071
-3'0	0'00135	0'00131	0'00127	0'00123	0'00119	0'00115	0'00111	0'00107	0'00104	0'00101
-2'9	0'00187	0'00181	0'00175	0'00169	0'00164	0'00159	0'00154	0'00149	0'00144	0'00139
-2'8	0'00256	0'00248	0'00240	0'00233	0'00226	0'00219	0'00212	0'00205	0'00199	0'00193
-2'7	0'00347	0'00336	0'00326	0'00317	0'00307	0'00298	0'00289	0'00280	0'00272	0'00264
-2'6	0'00466	0'00453	0'00440	0'00427	0'00415	0'00402	0'00391	0'00379	0'00368	0'00357
-2'5	0'00621	0'00604	0'00587	0'00570	0'00554	0'00539	0'00523	0'00508	0'00494	0'00480
-2'4	0'00820	0'00798	0'00776	0'00755	0'00734	0'00714	0'00695	0'00676	0'00657	0'00639
-2'3	0'01072	0'01044	0'01017	0'00990	0'00964	0'00939	0'00914	0'00889	0'00866	0'00842
-2'2	0'01390	0'01355	0'01321	0'01287	0'01255	0'01222	0'01191	0'01160	0'01130	0'01101
-2'1	0'01786	0'01743	0'01700	0'01659	0'01618	0'01578	0'01539	0'01500	0'01463	0'01426
-2'0	0'02275	0'02222	0'02169	0'02118	0'02068	0'02018	0'01970	0'01923	0'01876	0'01831
-1'9	0'02872	0'02807	0'02743	0'02680	0'02619	0'02559	0'02500	0'02442	0'02385	0'02330
-1'8	0'03593	0'03515	0'03438	0'03362	0'03288	0'03216	0'03144	0'03074	0'03005	0'02938
-1'7	0'04457	0'04363	0'04272	0'04182	0'04093	0'04006	0'03920	0'03836	0'03754	0'03673
-1'6	0'05480	0'05370	0'05262	0'05155	0'05050	0'04947	0'04846	0'04746	0'04648	0'04551
-1'5	0'06681	0'06552	0'06426	0'06301	0'06178	0'06057	0'05938	0'05821	0'05705	0'05592
-1'4	0'08076	0'07927	0'07780	0'07636	0'07493	0'07353	0'07214	0'07078	0'06944	0'06811
-1'3	0'09680	0'09510	0'09342	0'09176	0'09012	0'08851	0'08692	0'08534	0'08379	0'08226
-1'2	0'11507	0'11314	0'11123	0'10935	0'10749	0'10565	0'10383	0'10204	0'10027	0'09853
-1'1	0'13567	0'13350	0'13136	0'12924	0'12714	0'12507	0'12302	0'12100	0'11900	0'11702
-1'0	0'15866	0'15625	0'15386	0'15150	0'14917	0'14687	0'14457	0'14231	0'14007	0'13786
-0'9	0'18406	0'18141	0'17879	0'17619	0'17361	0'17106	0'16853	0'16602	0'16354	0'16109
-0'8	0'21186	0'20897	0'20611	0'20327	0'20045	0'19766	0'19489	0'19215	0'18925	0'18673
-0'7	0'24196	0'23885	0'23576	0'23270	0'22965	0'22663	0'22363	0'22065	0'21770	0'21476
-0'6	0'27425	0'27093	0'26763	0'26435	0'26109	0'25785	0'25463	0'25143	0'24825	0'24510
-0'5	0'30854	0'30503	0'30153	0'29806	0'29550	0'29116	0'28774	0'28434	0'28096	0'27760
-0'4	0'34446	0'34090	0'33724	0'33360	0'32997	0'32636	0'32276	0'31918	0'31561	0'31207
-0'3	0'38209	0'37828	0'37448	0'37070	0'36693	0'36317	0'35942	0'35569	0'35197	0'34827
-0'2	0'42074	0'41683	0'41294	0'40905	0'40517	0'40129	0'39743	0'39358	0'38974	0'38591
-0'1	0'46017	0'45620	0'45234	0'44828	0'44433	0'44038	0'43644	0'43251	0'42858	0'42465
-0'0	0'50000	0'49601	0'49202	0'48803	0'48405	0'48006	0'47608	0'47210	0'46812	0'46414

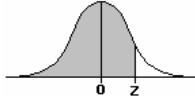


TABLA I (B)
DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA $N(0, 1)$

La tabla proporciona, para cada valor de z , el área que queda a su izquierda.

z	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'50000	0'50399	0'50798	0'51197	0'51595	0'51994	0'52392	0'52790	0'53188	0'53586
0'1	0'53983	0'54380	0'54766	0'55172	0'55567	0'55962	0'56356	0'56749	0'57142	0'57535
0'2	0'57926	0'58317	0'58706	0'59095	0'59483	0'59871	0'60257	0'60642	0'61026	0'61409
0'3	0'61791	0'62172	0'62552	0'62930	0'63307	0'63683	0'64058	0'64431	0'64803	0'65173
0'4	0'65554	0'65910	0'66276	0'66640	0'67003	0'67364	0'67724	0'68082	0'68439	0'68793
0'5	0'69146	0'69497	0'69847	0'70194	0'70450	0'70884	0'71226	0'71566	0'71904	0'72240
0'6	0'72575	0'72907	0'73237	0'73565	0'73891	0'74215	0'74537	0'74857	0'75175	0'75490
0'7	0'75804	0'76115	0'76424	0'76730	0'77035	0'77337	0'77637	0'77935	0'78230	0'78524
0'8	0'78814	0'79103	0'79389	0'79673	0'79955	0'80234	0'80511	0'80785	0'81057	0'81327
0'9	0'81594	0'81859	0'82121	0'82381	0'82639	0'82894	0'83147	0'83398	0'83646	0'83891
1'0	0'84134	0'84375	0'84614	0'84850	0'85083	0'85313	0'85543	0'85769	0'85993	0'86214
1'1	0'86433	0'86650	0'86864	0'87076	0'87286	0'87493	0'87698	0'87900	0'88100	0'88298
1'2	0'88493	0'88686	0'88877	0'89065	0'89251	0'89435	0'89617	0'89796	0'89973	0'90147
1'3	0'90320	0'90490	0'90658	0'90824	0'90988	0'91149	0'91308	0'91466	0'91621	0'91774
1'4	0'91924	0'92073	0'92220	0'92364	0'92507	0'92647	0'92786	0'92922	0'93056	0'93189
1'5	0'93319	0'93448	0'93574	0'93699	0'93822	0'93943	0'94062	0'94179	0'94295	0'94408
1'6	0'94520	0'94630	0'94738	0'94845	0'94950	0'95053	0'95154	0'95254	0'95352	0'95449
1'7	0'95543	0'95637	0'95728	0'95818	0'95907	0'95994	0'96080	0'96164	0'96246	0'96327
1'8	0'96407	0'96485	0'96562	0'96638	0'96712	0'96784	0'96855	0'96926	0'96995	0'97062
1'9	0'97128	0'97193	0'97257	0'97320	0'97381	0'97441	0'97500	0'97558	0'97615	0'97670
2'0	0'97725	0'97778	0'97831	0'97882	0'97932	0'97982	0'98030	0'98077	0'98124	0'98169
2'1	0'98214	0'98257	0'98300	0'98341	0'98382	0'98422	0'98461	0'98500	0'98537	0'98574
2'2	0'98610	0'98645	0'98679	0'98713	0'98745	0'98778	0'98809	0'98840	0'98870	0'98899
2'3	0'98928	0'98956	0'98983	0'99010	0'99036	0'99061	0'99086	0'99111	0'99134	0'99158
2'4	0'99180	0'99202	0'99224	0'99245	0'99266	0'99286	0'99305	0'99324	0'99343	0'99361
2'5	0'99379	0'99396	0'99413	0'99430	0'99446	0'99461	0'99477	0'99492	0'99506	0'99520
2'6	0'99534	0'99547	0'99560	0'99573	0'99585	0'99598	0'99609	0'99621	0'99632	0'99643
2'7	0'99653	0'99664	0'99674	0'99683	0'99693	0'99702	0'99711	0'99720	0'99728	0'99736
2'8	0'99744	0'99752	0'99760	0'99767	0'99774	0'99781	0'99788	0'99795	0'99801	0'99807
2'9	0'99813	0'99819	0'99825	0'99831	0'99836	0'99841	0'99846	0'99851	0'99856	0'99861
3'0	0'99865	0'99869	0'99873	0'99877	0'99881	0'99885	0'99889	0'99893	0'99896	0'99899
3'1	0'99903	0'99906	0'99909	0'99912	0'99915	0'99918	0'99921	0'99923	0'99926	0'99929
3'2	0'99931	0'99933	0'99936	0'99938	0'99940	0'99942	0'99944	0'99946	0'99948	0'99950
3'3	0'99951	0'99953	0'99955	0'99956	0'99958	0'99959	0'99961	0'99962	0'99964	0'99965
3'4	0'99966	0'99967	0'99968	0'99970	0'99971	0'99972	0'99973	0'99974	0'99975	0'99976
3'5	0'99977	0'99977	0'99978	0'99979	0'99980	0'99981	0'99981	0'99982	0'99983	0'99983
3'6	0'99984	0'99985	0'99985	0'99986	0'99986	0'99987	0'99987	0'99988	0'99988	0'99989
3'7	0'99989	0'99990	0'99990	0'99990	0'99991	0'99991	0'99991	0'99992	0'99992	0'99992
3'8	0'99993	0'99993	0'99993	0'99994	0'99994	0'99994	0'99994	0'99995	0'99995	0'99995
3'9	0'99995	0'99995	0'99996	0'99996	0'99996	0'99996	0'99996	0'99996	0'99997	0'99997
4'0	0'99997	0'99997	0'99997	0'99997	0'99997	0'99997	0'99998	0'99998	0'99998	0'99998
4'1	0'99998	0'99998	0'99998	0'99998	0'99998	0'99998	0'99998	0'99998	0'99999	0'99999
4'2	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999
4'3	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999	0'99999
4'4	0'99999	0'99999	0'99999	1'00000	1'00000	1'00000	1'00000	1'00000	1'00000	1'00000

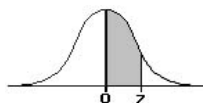


TABLA II
DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA $N(0, 1)$

La tabla proporciona el área que queda comprendida entre 0 y z.

z	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'00000	0'00399	0'00798	0'01197	0'01595	0'01994	0'02392	0'02790	0'03188	0'03586
0'1	0'03983	0'04380	0'04766	0'05172	0'05567	0'05962	0'06356	0'06749	0'07142	0'07535
0'2	0'07926	0'08317	0'08706	0'09095	0'09483	0'09871	0'10257	0'10642	0'11026	0'11409
0'3	0'11791	0'12172	0'12552	0'12930	0'13307	0'13683	0'14058	0'14431	0'14803	0'15173
0'4	0'15554	0'15910	0'16276	0'16640	0'17003	0'17364	0'17724	0'18082	0'18439	0'18793
0'5	0'19146	0'19497	0'19847	0'20194	0'20450	0'20884	0'21226	0'21566	0'21904	0'22240
0'6	0'22575	0'22907	0'23237	0'23565	0'23891	0'24215	0'24537	0'24857	0'25175	0'25490
0'7	0'25804	0'26115	0'26424	0'26730	0'27035	0'27337	0'27637	0'27935	0'28230	0'28524
0'8	0'28814	0'29103	0'29389	0'29673	0'29955	0'30234	0'30511	0'30785	0'31075	0'31327
0'9	0'31594	0'31859	0'32121	0'32381	0'32639	0'32894	0'33147	0'33398	0'33646	0'33891
1'0	0'34134	0'34375	0'34614	0'34850	0'35083	0'35313	0'35543	0'35769	0'35993	0'36214
1'1	0'36433	0'36650	0'36864	0'37076	0'37286	0'37493	0'37698	0'37900	0'38100	0'38298
1'2	0'38493	0'38686	0'38877	0'39065	0'39251	0'39435	0'39617	0'39796	0'39973	0'40147
1'3	0'40320	0'40490	0'40658	0'40824	0'40988	0'41149	0'41308	0'41466	0'41621	0'41774
1'4	0'41924	0'42073	0'42220	0'42364	0'42507	0'42647	0'42786	0'42922	0'43056	0'43189
1'5	0'43319	0'43448	0'43574	0'43699	0'43822	0'43943	0'44062	0'44179	0'44295	0'44408
1'6	0'44520	0'44630	0'44738	0'44845	0'44950	0'45053	0'45154	0'45254	0'45352	0'45449
1'7	0'45543	0'45637	0'45728	0'45818	0'45907	0'45994	0'46080	0'46164	0'46246	0'46327
1'8	0'46407	0'46485	0'46562	0'46638	0'46712	0'46784	0'46856	0'46926	0'46995	0'47062
1'9	0'47128	0'47193	0'47257	0'47320	0'47381	0'47441	0'47500	0'47558	0'47615	0'47670
2'0	0'47725	0'47778	0'47831	0'47882	0'47932	0'47982	0'48030	0'48077	0'48124	0'48169
2'1	0'48214	0'48257	0'48300	0'48341	0'48382	0'48422	0'48461	0'48500	0'48537	0'48574
2'2	0'48610	0'48645	0'48679	0'48713	0'48745	0'48778	0'48809	0'48840	0'48870	0'48899
2'3	0'48928	0'48956	0'48983	0'49010	0'49036	0'49061	0'49086	0'49111	0'49134	0'49158
2'4	0'49180	0'49202	0'49224	0'49245	0'49266	0'49286	0'49305	0'49324	0'49343	0'49361
2'5	0'49379	0'49396	0'49413	0'49430	0'49446	0'49461	0'49477	0'49492	0'49506	0'49520
2'6	0'49534	0'49547	0'49560	0'49573	0'49585	0'49598	0'49609	0'49621	0'49632	0'49643
2'7	0'49653	0'49664	0'49674	0'49683	0'49693	0'49702	0'49711	0'49720	0'49728	0'49736
2'8	0'49744	0'49752	0'49760	0'49767	0'49774	0'49781	0'49788	0'49795	0'49801	0'49807
2'9	0'49813	0'49819	0'49825	0'49831	0'49836	0'49841	0'49846	0'49851	0'49856	0'49861
3'0	0'49865	0'49869	0'49873	0'49877	0'49881	0'49885	0'49889	0'49893	0'49896	0'49899
3'1	0'49903	0'49906	0'49909	0'49912	0'49915	0'49918	0'49921	0'49923	0'49926	0'49929
3'2	0'49931	0'49933	0'49936	0'49938	0'49940	0'49942	0'49944	0'49946	0'49948	0'49950
3'3	0'49951	0'49953	0'49955	0'49956	0'49958	0'49959	0'49961	0'49962	0'49964	0'49965
3'4	0'49966	0'49967	0'49968	0'49970	0'49971	0'49972	0'49973	0'49974	0'49975	0'49976
3'5	0'49977	0'49977	0'49978	0'49979	0'49980	0'49981	0'49981	0'49982	0'49983	0'49983
3'6	0'49984	0'49985	0'49985	0'49986	0'49986	0'49987	0'49987	0'49988	0'49988	0'49989
3'7	0'49989	0'49990	0'49990	0'49990	0'49991	0'49991	0'49991	0'49992	0'49992	0'49992
3'8	0'49993	0'49993	0'49993	0'49994	0'49994	0'49994	0'49994	0'49995	0'49995	0'49995
3'9	0'49995	0'49995	0'49996	0'49996	0'49996	0'49996	0'49996	0'49996	0'49997	0'49997
4'0	0'49997	0'49997	0'49997	0'49997	0'49997	0'49997	0'49998	0'49998	0'49998	0'49998
4'1	0'49998	0'49998	0'49998	0'49998	0'49998	0'49998	0'49998	0'49998	0'49999	0'49999
4'2	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999
4'3	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999	0'49999
4'4	0'49999	0'49999	0'49999	0'50000	0'50000	0'50000	0'50000	0'50000	0'50000	0'50000

ACERCA DE LOS AUTORES

MIGUEL FRANCISCO GIRÓN GUERRERO



Ingeniero Industrial otorgado por la Universidad de Guayaquil. Magíster en Administración de Empresas Escuela Superior Politécnica del Litoral. Actividad docente actual: asignaturas de Investigación Operativa y Dirección de Operaciones Universidad Estatal de Milagro, Facultad de Ciencias e Ingeniería. Laboró como docente en la Facultad de Ingeniería Industrial de la Universidad de Guayaquil. Posee 35 años de experiencia profesional en empresas industriales del Ecuador. Plastigama; Cervecería Nacional; Pinturas Continental; Poliquímicos del Ecuador; y fuera del país en “Plásticos Aurora” Guarena-Venezuela. Publicaciones realizadas: “El lote económico de compras como sistema de administración de inventarios” y “Valor actual neto y Tasa interna de retorno como parámetros de evaluación de las inversiones”. Capacitado en: Elaboración de helados. (Colombia); Planeación estratégica para derivados del maíz (Brasil).

ELY ISRAEL BORJA SALINAS



Ingeniero Comercial con título otorgado por la Universidad de Guayaquil. Magíster en Negocios Internacionales y Gestión de Comercio Exterior. Magíster en Docencia y Gerencia de la Educación Superior. Magíster en Contabilidad y Auditoría. Ha laborado en empresas dedicadas a la producción industrial y empresas de comercio. Actualmente es docente en la Universidad Estatal de Milagro y docente en la Universidad de Guayaquil. Es autor del libro Administración de Operaciones: Enfoque Estratégico para la Toma de Decisiones. Ha participado en dos proyectos de investigación, y sus publicaciones tienen una orientación a la economía empresarial, la auditoría, la educación comercial, y los procesos industriales.

MAURICIO FEDERICO ORTUÑO DELGADO



Economista con título obtenido en la Universidad de Guayaquil. Magíster en Planificación de Proyectos Rurales y Gestión Sostenible de la Universidad de Politécnica de Madrid. Actualmente cursando el tercer año del Ph.D. En la misma Universidad. Desde el 2014 ha trabajado en proyectos sociales y actualmente ocupa el cargo de Director de Gestión de Proyectos Internacionales en la Universidad de Guayaquil. Ex Docente de la Facultad de Ciencias Administrativas e Ingeniería Industrial, Actualmente docente en la Facultad de Ciencias Psicológicas.

JOHNNY RODDY LÓPEZ BRIONES



Docente de la facultad Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Estatal de Milagro, en las asignaturas de: Ingeniería de Métodos I y II, Ingeniería de la Producción, Diseño de Planta. Tiene a cargo la Dirección y Tutorías de trabajos para la obtención del título de tercer nivel en la carrera de Ingeniería Industrial. Las Tutorías de prácticas pre profesionales. Se ha desempeñado como experto en el área de Desarrollo Organizacional de la Universidad Estatal de Milagro. Fue Analista de Métodos en las Empresas del Consorcio NOBIS durante 16 años (Azucarera Valdez, Universal Sweet Industrie. S. A., Hacienda San Rafael). Fue Auditor Interno de Calidad de la Cía. Azucarera Valdez. Laboró como Analista de Estudios del Trabajo (Determinación de Tiempos Estándar de Operaciones) en la industria de manufactura de textiles de Comercial 3B (Eros Internacional).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aquino Córdova, J. (2012). Investigación de Operaciones . México: Red Tercer Milenio.
- Baca Urbina, G. (2006). Evaluación Económica de Proyectos. México: MacGraw - Hill.
- BACA URBINA, G. (2006). EVALUACIÓN ECONÓMICA DE PROYECTOS. MÉXICO: Mc GRAW HILL.
- Baca Urbina, G. (2016). Ingeniería Financiera. México: Grupo Editorial Patria.
- Carro, R. (2009). INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN ADMINISTRACIÓN. MAR DEL PLATA: PINCU.
- Chaín Sapag, N. (2008). Preparación y Evaluación de Proyectos. México: Mc Graw Hil.
- Chain, N. S. (2012). Preparación y Evaluación de Proyectos. México: Mc Graw Hill.
- Chase - Jacobs - Aquilano. (2009). Administración de Operaciones Producción y cadena de suministros. México: Mc Graw Hill.
- García Padilla, V. M. (2015). Análisis Financiero: Un enfoque práctico. México: Grupo editorial Patria.
- Gonzalez Ariza, A. (2015). Manual Práctico de Investigación de Operaciones. Barranquilla: Universidad del Norte.
- Ketelhohn, W. (1986). Inversiones Estratégicas. San José: Lillo Libre.

- Lieberman, G. J. (2010). Introducción a la Investigación de Operaciones. México: Mc Graw Hill.
- Lieberman, G. J. (2010). Introducción a la Investigación de Operaciones. México: Mc Graw Hill.
- RINCON ABRIL, L. (2001). INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES PARA INGENIERÍAS Y ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS. PALMIRA: FERIVA S.A.
- Rincón Abril, L. A. (2001). Investigación de Operaciones para Ingenieros. Palmira: Universidad Nacional de Colombia.
- Schroeder, R. G. (2006). Administración de Operaciones. México: Mc Graw Hill.
- Sistema Nacional de Inversiones Públicas, S.-U. (2007). Guía para la formulación y evaluación de proyectos de inversión. Montevideo: SNIP.
- Taha, H. (2004). Investigación de Operaciones (7 ed.). México: Pearson.

ISBN: 978-9942-823-28-1

