Matemáticas 2

Cálculo integral

Dennis G. Zill
Warren S. Wright

Mc Graw Hill

Matemáticas 2

Cálculo integral

Dennis G. Zill
Loyola Marymount University

Warren S. Wright
Loyola Marymount University

Adaptación y revisión técnica:
Joel Ibarra Escutia
Instituto Tecnológico de Toluca

McGraw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha M.
Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductores: Hugo Villagómez Velázquez y Gabriel Nagore Cázares

MATEMÁTICAS 2. Cálculo integral

Educación

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón,
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 13: 978-607-15-0535-4

Adaptación de la obra *Cálculo. Trascendentes tempranas*, 4a. edición, de Dennis G. Zill y Warren S. Wright.

ISBN: 978-607-15-0502-6

Traducido de la cuarta edición de *Calculus. Early transcendentals.*

978-0-7637-5995-7

2345678901 1098765432101

Impreso en México
Impreso por Programas Educativos S.A. de C.V.

Printed in Mexico
Printed by Programas Educativos S.A. de C.V.

The McGraw-Hill Companies

Prefacio

Para el instructor

Filosofía

En esta serie de *Matemáticas* he intentado preservar intacto mi objetivo original de compilar un texto de cálculo que no sea sólo una colección de definiciones y teoremas, habilidades y fórmulas para memorizar, así como problemas para resolver, sino un material que se comunique con sus lectores más importantes: los estudiantes. Deseo que estos cambios hagan más relevante e interesante el texto tanto para el estudiante como para el profesor.

Características de esta obra

Secciones y ejercicios El material que se ha seleccionado para esta serie es actual. Los conjuntos de ejercicios se han organizado en problemas que requieren el uso de calculadora y computadora, problemas conceptuales y problemas de proyectos. En su mayoría, las aplicaciones consideradas pertenecen al ámbito de la "vida real" en el sentido de que se han investigado exhaustivamente usando fuentes originales. También se han incluido problemas relacionados con la interpretación de gráficas. Además, se ha hecho énfasis en las funciones trigonométricas tanto en los ejemplos como en los conjuntos de ejercicios a lo largo del texto. La serie completa (*Matemáticas 1*, *Matemáticas 2* y *Matemáticas 3*) contiene más de 7 300 problemas.

Como ayuda en la asignación de problemas, cada conjunto de ejercicios está dividido claramente en grupos de problemas identificados con títulos como *Fundamentos*, *Aplicaciones*, *Modelos matemáticos*, *Proyectos*, *Problemas con calculadora/SAC*, etcétera. Creo que la mayoría de los títulos son autosuficientes, de modo que los problemas que aparecen bajo el encabezado *Piense en ello* tratan aspectos conceptuales del material cubierto en esa sección y son idóneos como tareas o para discutir en clase. En el texto no se proporciona respuesta alguna para estos problemas. Algunos están identificados como *Clásicos matemáticos* y reflejan el hecho de que han existido durante largo tiempo, aparecen en la mayor parte de los textos o presentan algún detalle interesante, mientras que otros problemas identificados como *Un poco de historia* muestran algún aspecto histórico.

Una característica sobresaliente de *Matemáticas 2, Cálculo integral*, es que aborda el problema esencial del cálculo integral de una manera más sencilla. Así, el estudio del teorema fundamental del cálculo, los métodos de integración, las aplicaciones de la integral, las sucesiones y las series, y hasta las integrales impropias, contribuyen a desarrollar en el estudiante un pensamiento formal y heurístico que le permitirá modelar fenómenos y resolver problemas.

En los apéndices se proporciona material de gran utilidad para los diferentes cursos. Al final de las secciones correspondientes aparecen esbozos biográficos de algunos matemáticos que han impactado de manera importante el desarrollo del cálculo bajo la rúbrica de *Posdata: Un poco de historia*.

Características especiales Cada unidad empieza con una introducción al material referido y con las competencias específicas de esa unidad. En la parte final del libro el lector encontrará la sección *Fórmulas matemáticas*, que constituye una revisión compacta de conceptos básicos de álgebra, geometría, trigonometría y cálculo: las leyes de los exponentes, fórmulas de factorización, desarrollos binomiales, triángulo de Pascal, fórmulas de geometría, gráficas y funciones, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas, y fórmulas de diferenciación e integración.

La sección denominada *Evaluación diagnóstica* consta de 56 reactivos sobre cuatro amplias áreas de precálculo en matemáticas. Esta evaluación intenta alentar a los estudiantes a revisar por sí mismos algunos de los temas de prerrequisito esenciales, como valores absolutos, plano cartesiano, ecuaciones de rectas, círculos, etc., que se aplican a lo largo del texto. En la sección de respuestas se proporcionan las soluciones a todos estos reactivos.

Cada unidad incluye la sección *Notas desde el aula*. Se pretende que estas notas sean un análisis informal dirigido directamente al estudiante. Este análisis varía desde advertencias sobre errores algebraicos, de procedimiento y de notación comunes, pasando por la interpretación errónea de teoremas y consejos, hasta preguntas que piden al estudiante pensar en el tema y ampliar las ideas recién presentadas.

Asimismo, esta obra contiene un considerable número de notas al margen y anotaciones de orientación en los ejemplos.

Figuras, definiciones, teoremas Debido a la gran cantidad de figuras, definiciones y teoremas que hay en este texto, se ha adoptado un sistema de numeración doble decimal. Por ejemplo, la interpretación de "figura 1.2.3" es

Unidad Sección de la unidad 1
↓ ↓
1.2.3 ⟵ Tercera figura de la sección 1.2

Considero que este tipo de numeración facilita encontrar, por ejemplo, un teorema o una figura a la que se hace referencia en una sección o en una unidad posterior. Además, para relacionar mejor una figura con el texto, la *primera* referencia textual a cada figura aparece con el mismo estilo y color de letra que el número de la figura. Por ejemplo, la primera referencia a la primera figura en la sección 3.5 se proporciona como FIGURA 3.5.1, y todas las referencias subsecuentes se escriben en el estilo tradicional de la figura 3.5.1. También, en esta obra cada figura en el texto presenta un breve subtítulo explicatorio.

Materiales de apoyo

Esta obra cuenta con interesantes complementos para fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje y su evaluación, y se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información respecto de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill.

Para el estudiante

Usted se ha matriculado en uno de los cursos más interesantes de matemáticas. Hace muchos años, cuando yo era estudiante de Cálculo I, me sorprendieron el poder y la belleza del material. Era distinto de cualquier tipo de matemáticas que hubiera estudiado hasta ese momento. Era divertido, emocionante y constituía un desafío. Después de enseñar matemáticas universitarias por muchos años, he conocido infinidad de tipos de estudiante, desde el genio incipiente que inventó su propio cálculo hasta estudiantes que luchaban por dominar la mecánica más elemental del tema. A lo largo de estos años también he sido testigo de un fenómeno triste: algunos estudiantes fracasan en cálculo no porque encuentren que el tema es imposible, sino porque tienen habilidades deficientes de álgebra y un conocimiento inadecuado del trabajo en trigonometría. El cálculo construye de inmediato sobre su conocimiento y habilidades previos, donde hay mucho terreno nuevo por cubrir. En consecuencia, hay muy poco tiempo para repasar las bases en el planteamiento formal del aula. Así, quienes enseñamos cálculo debemos asumir que usted puede factorizar, simplificar y resolver ecuaciones, resolver desigualdades, manejar valores absolutos, usar una calculadora, aplicar las leyes de los exponentes, encontrar ecuaciones de rectas, graficar puntos, trazar gráficas elementales y aplicar importantes identidades logarítmicas y trigonométricas, la habilidad de hacer álgebra y trigonometría, trabajar con exponentes y logaritmos, así como trazar *a mano*, con rapidez y precisión, gráficas básicas que son claves para tener éxito en un curso de cálculo.

En las primeras páginas encontrará la sección "Evaluación diagnóstica", que contiene 56 preguntas. Esta "prueba" es una oportunidad para que usted verifique sus conocimientos acerca de algunos temas que se tratan en este texto. Relájese, tome su tiempo, lea y trabaje cada pregunta, y luego compare sus respuestas con las que se proporcionan en las páginas finales. Sin tomar en cuenta su "calificación", lo alentamos a que revise material de precálculo en algún texto acerca de la materia.

Unas palabras para los estudiantes que han cursado cálculo en preparatoria: por favor, no asuman que pueden lograrlo con un esfuerzo mínimo porque identifican algunos de los temas en cálculo diferencial e integral. Un sentimiento de familiaridad con el tema combinado con una actitud de complacencia a menudo es la razón del fracaso de algunos estudiantes.

Aprender matemáticas no es como aprender a andar en bicicleta: en que una vez que se aprende, la habilidad permanece para siempre. Las matemáticas son más como aprender otro idioma o tocar un instrumento musical: requiere tiempo, esfuerzo y mucha práctica para desarrollar y mantener la habilidad. Aun los músicos experimentados continúan practicando escalas fundamentales. Por lo anterior, usted, el estudiante, sólo puede aprender matemáticas (es decir, hacer "que se le pegue") mediante el trabajo arduo de hacer matemáticas. Aunque he intentado hacer más claros para el lector *la mayoría* de los detalles en la solución de un ejemplo, inevitablemente usted tiene que completar los pasos faltantes. No puede leer un texto de este tipo como si fuese una novela; debe abrirse camino a lo largo de él con lápiz y papel en mano.

En conclusión, le deseo la mejor de las suertes en este curso.

PRÓLOGO A ESTA EDICIÓN

Vivimos tiempos de cambio, y la educación no es ajena a este proceso. Los planes de estudio de las instituciones de educación superior se renuevan constantemente para estar a la altura de las necesidades actuales, y se establecen nuevas metodologías que deben ser respaldadas con obras editoriales de calidad.

Como una contribución a esta revolución educativa se desarrolla esta obra, dirigida a alguna materia del área básica, cursada en las principales escuelas de ciencias e ingeniería.

Los libros elaborados cubren los planes de estudio más recientes que se imparten en los institutos tecnológicos.

Aunado a lo anterior, nuestros reconocidos autores siguen ofreciendo el estilo científico preciso y de fácil comprensión que ha caracterizado a cada una de las obras.

Entre las principales características de esta serie se pueden mencionar:

- Adaptación al nuevo modelo de competencias.
- Ejemplos y ejercicios renovados.
- Utilización de las tecnologías de información y comunicación (TIC).
- Notas históricas que fundamentan los conceptos básicos.
- Notación formal de fácil accesibilidad para los alumnos.
- Estructura que contribuye a desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico para modelar fenómenos y resolver problemas.
- Actividades encaminadas al desarrollo de competencias genéricas, instrumentales, sistémicas y específicas.

Joel Ibarra Escutia
Instituto Tecnológico de Toluca

Las competencias y el cálculo integral

Una de las características más sobresalientes de esta nueva edición es que ha sido organizada para contribuir al desarrollo de competencias específicas, genéricas, instrumentales y sistémicas, listadas a continuación.

Competencias específicas

UNIDAD 1 *Teorema fundamental del cálculo*

- Contextualizar el concepto de integral definida.
- Visualizar la relación entre cálculo diferencial y el cálculo integral.
- Calcular integrales definidas.

UNIDAD 2 *Métodos de integración*

- Determinar una función primitiva.
- Discernir cuál método puede ser más adecuado para resolver una integral dada y resolverla usándolo.

UNIDAD 3 *Aplicaciones de la integral*

- Interpretar enunciados de problemas para construir la función que al ser integrada da la solución.
- Resolver problemas de cálculo de áreas, centroides, longitud de curvas y volúmenes de sólidos de revolución.
- Reconocer el potencial del cálculo integral en la ingeniería.

UNIDAD 4 *Sucesiones y series*

- Identificar series finitas e infinitas en distintos contextos.
- Determinar la convergencia de una serie infinita.
- Usar el teorema de Taylor para representar una función en serie de potencias y aplicar esta representación para calcular la integral de la función.

Competencias genéricas

- Transferir el conocimiento adquirido a otros campos de aplicación.
- Procesar e interpretar datos.
- Representar e interpretar conceptos en diferentes formas: numérica, geométrica, algebraica, trascendente y verbal.
- Comunicarse en el lenguaje matemático en forma oral y escrita.
- Modelar matemáticamente fenómenos y situaciones.
- Pensamiento lógico, algorítmico, heurístico, analítico y sintético.
- Potenciar las habilidades para el uso de tecnologías de la información.
- Resolución de problemas.
- Analizar la factibilidad de las soluciones.
- Toma de decisiones.
- Reconocimiento de conceptos o principios generales e integradores.
- Establecer generalizaciones.
- Argumentar con contundencia y precisión.
- Optimizar soluciones.

Competencias instrumentales

- Capacidad de análisis y síntesis.
- Comunicación escrita.
- Habilidades básicas de manejo de la computadora.
- Solución de problemas.

Competencias sistémicas

- Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica.
- Habilidades de investigación.
- Capacidad de aprender.
- Capacidad de generar nuevas ideas.
- Habilidad para trabajar en forma autónoma.
- Búsquedas de logros.

Agradecimientos

Compilar un libro de texto de esta complejidad es una tarea monumental. Además de los autores, mucha gente invirtió tiempo y energía en el proyecto. En primer lugar, me gustaría expresar mi aprecio para los equipos editorial, de producción y mercadotecnia de Jones y Bartlett, y a los siguientes revisores de esta obra, quienes contribuyeron con numerosas sugerencias, críticas válidas e incluso ocasionalmente con algunas palabras de apoyo:

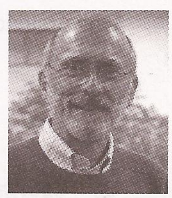
Scott Wilde, *Baylor University*
Salvatore Anastasio, *SUNY, New Paltz*
Thomas Bengston, *Penn State University, Delaware County*
Steven Blasberg, *West Valley College*
Robert Brooks, *University of Utah*
Dietrich Burbulla, *University of Toronto*
David Burton, *Chabot College*
Maurice Chabot, *University of Southern Maine*
H. Edward Donley, *Indiana University of Pennsylvania*
John W. Dulin, *GMI Engineering & Management Institute*
Arthur Dull, *Diablo Valley College*
Hugh Easler, *College of William and Mary*
Jane Edgar, *Brevard Community College*
Joseph Egar, *Cleveland State University*
Patrick J. Enright, *Arapahoe Community College*
Peter Frisk, *Rock Valley College*
Shirley Goldman, *University of California at Davis*
Joan Golliday, *Santa Fe Community College*
David Green, Jr., *GMI Engineering & Management Institute*
Harvey Greenwald, *California Polytechnic State University*
Walter Gruber, *Mercy College of Detroit*
Dave Hallenbeck, *University of Delaware*
Noel Harbetson, *California State University at Fresno*
Bernard Harvey, *California State University, Long Beach*
Christopher E. Hee, *Eastern Michigan University*
Jean Holton, *Tidewater Community College*
Rahim G. Karimpour, *Southern Illinois University*
Martin Kotler, *Pace University*
Carlon A. Krantz, *Kean College of New Jersey*
George Kung, *University of Wisconsin at Stevens Point*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Timothy Loughlin, *New York Institute of Technology*
Antonio Magliaro, *Southern Connecticut Slate University*
Walter Fred Martens, *University of Alabama at Birmingham*
William E. Mastrocola, *Colgate University*
Jill McKenney, *Lane Community College*
Edward T. Migliore, *Monterey Peninsula College*
Carolyn Narasimhan, *DePaul University*
Harold Olson, *Diablo Valley College*
Gene Ortner, *Michigan Technological University*
Aubrey Owen, *Community College of Denver*
Marvin C. Papenfuss, *Loras College*
Don Poulson, *Mesa Community College*
Susan Prazak, *College of Charleston*
James J. Reynolds, *Pennsylvania State University, Beaver Campus*
Susan Richman, *Penn State University, Harrisburg*
Rodd Ross, *University of Toronto*
Donald E. Rossi, *De Anza College*
Lillian Seese, *St. Louis Community College at Meramec*
Donald Sherbert, *University of Illinois*
Nedra Shunk, *Santa Clara University*
Phil R. Smith, *American River College*
Joseph Stemple, *CUNY Queens College*
Margaret Suchow, *Adirondack Community College*
John Suvak, *Memorial University of Newfoundland*
George Szoke, *University of Akron*
Hubert Walczak, *College of St. Thomas*
Richard Werner, *Santa Rosa Junior College*
Loyd V. Wilcox, *Golden West College*
Jack Wilson, *University of North Carolina, Asheville*

También me gustaría extender un agradecimiento extraespecial para las siguientes personas:

- Jeff Dodd, Jacksonville State University, por el proyecto compartido.
- John David Dionisio, Loyola Marymount University, y Brian y Melanie Fulton, High Point University, por proporcionar las soluciones de problemas y ejercicios.
- Roger Cooke, University of Vermont, y Fred S. Roberts, Rutgers University, por haber dedicado tiempo de sus ocupados programas y contribuido con los excelentes ensayos de cálculo.
- Carol Wright, por su ayuda en las etapas finales de preparación del manuscrito de éste y otros textos.
- David Pallai, distribuidor, y Tim Anderson, editor, por soportar toda la liberación verbal de mis frustraciones.
- Jennifer Bagdigian, gerente de producción, por coordinar amablemente las fases de producción y por su paciencia para aguantar mis cambios de carácter sin fin, y a
- Irving Drooyan y Charles Carico, por iniciar todo.

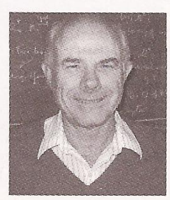
Incluso con toda la ayuda mencionada, la precisión de cada letra, palabra, símbolo, ecuación y figura contenidos en este producto final es responsabilidad del autor. Estaré muy agradecido de contar con el aviso de cualquier error o errores tipográficos que llamen la atención. Las correcciones pueden enviarse a

pablo_roig@mcgraw-hill.com



Dennis G. Zill

En conclusión, doy la bienvenida a Warren Scott Wright, mi colega desde hace mucho tiempo en Loyola Marymount University, y autor de muchos de los suplementos que acompañan mis textos, como coautor de este texto.



Warren S. Wright

Agradecimientos especiales

La presente obra es una adaptación con un enfoque basado en competencias del libro *Cálculo. Trascendentes tempranas*, cuarta edición, cuya versión en español contó con la revisión técnica de

Marlene Aguilar Ábalo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), campus Ciudad de México

Crisanto Castillo Castillo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), campus Cuernavaca

Fidel Castro López
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME), Instituto Politécnico Nacional

Rocío Cerecero López
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), campus Cuernavaca

Ramón Espinosa Armenta
Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)

Eugenio L. Fautsch Tapia
Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

José Job Flores Godoy
Universidad Iberoamericana, Ciudad de México

Enrique Arturo Galván Flores
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME), Instituto Politécnico Nacional

Linda Margarita Medina Herrera
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), campus Ciudad de México

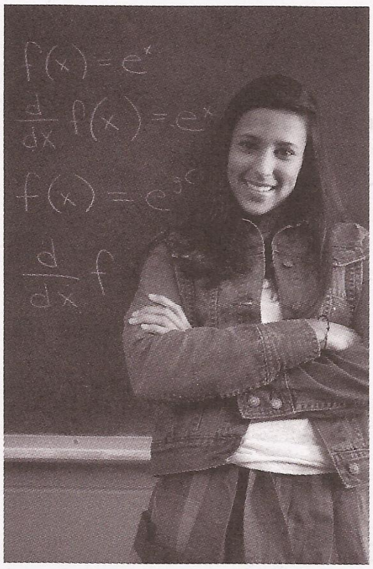
Santiago Neira Rosales
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León

Ignacio Ramírez Vargas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), campus Hidalgo

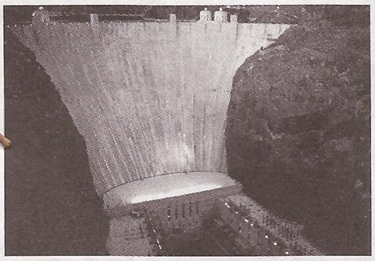
Héctor Joé Rosas Toledo
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Tonatihu Valdez Hernández
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

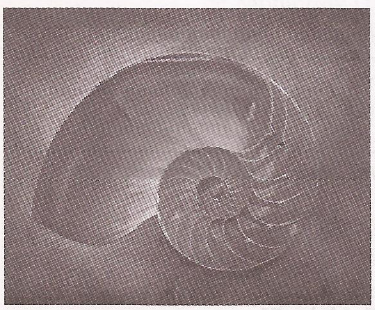
Contenido



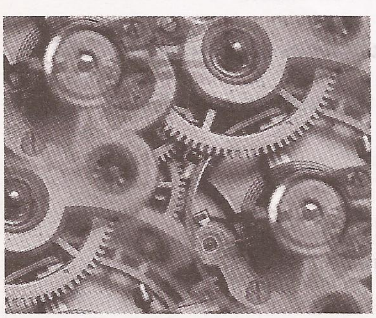
XI



3 Aplicaciones de la integral 103



4 Sucesiones y series 161



Apéndice Integrales impropias 233

Evaluación diagnóstica

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-1.

Como preparación para el cálculo

≡ Matemáticas básicas

1. (Falso/verdadero) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. ________

2. (Falso/verdadero) Para $a > 0$, $(a^{4/3})^{3/4} = a$. F ________

3. (Falso/verdadero) Para $x \neq 0$, $x^{-3/2} = \dfrac{1}{x^{2/3}}$. ________

4. (Falso/verdadero) $\dfrac{2^n}{4^n} = \dfrac{1}{2^n}$. ________

5. (Llene el espacio en blanco) En el desarrollo de $(1 - 2x)^3$, el coeficiente de x^2 es ________.

6. Sin usar calculadora, evalúe $(-27)^{5/3}$.

7. Escriba lo siguiente como una expresión sin exponentes negativos:

$$x^2\frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2}2x + 2x\sqrt{x^2 + 4}.$$

8. Complete el trinomio cuadrado: $2x^2 + 6x + 5$.

9. Resuelva las ecuaciones:

a) $x^2 = 7x$ *b)* $x^2 + 2x = 5$ *c)* $\dfrac{1}{2x - 1} - \dfrac{1}{x} = 0$ *d)* $x + \sqrt{x - 1} = 1$

10. Factorice completamente:

a) $10x^2 - 13x - 3$
b) $x^4 - 2x^3 - 15x^2$
c) $x^3 - 27$
d) $x^4 - 16$

≡ Números reales

11. (Falso/verdadero) Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$. ________

12. (Falso/verdadero) $\sqrt{(-9)^2} = -9$. ________

13. (Falso/verdadero) Si $a < 0$, entonces $\dfrac{-a}{a} < 0$. ________

14. (Llene el espacio en blanco) Si $|3x| = 18$, entonces $x =$ ________ o $x =$ ________.

15. (Llene el espacio en blanco) Si $a - 5$ es un número negativo, entonces $|a - 5| =$ ________.

16. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales?

a) 0.25 *b)* 8.131313 … *c)* π
d) $\dfrac{22}{7}$ *e)* $\sqrt{16}$ *f)* $\sqrt{2}$
g) 0 *h)* -9 *i)* $1\frac{1}{2}$
j) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ *k)* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *l)* $\dfrac{-2}{11}$

17. Relacione el intervalo dado con la desigualdad idónea.

i) $(2, 4]$ *ii)* $[2, 4)$ *iii)* $(2, 4)$ *iv)* $[2, 4]$
a) $|x - 3| < 1$ *b)* $|x - 3| \leq 1$ *c)* $0 \leq x - 2 < 2$ *d)* $1 < x - 1 \leq 3$

18. Exprese el intervalo $(-2, 2)$ como

a) una desigualdad y *b)* una desigualdad que implique valores absolutos.

19. Trace la gráfica de $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ en la recta numérica.

20. Encuentre todos los números reales x que satisfacen la desigualdad $|3x - 1| > 7$. Escriba su solución usando notación de intervalos.
21. Resuelva la desigualdad $x^2 \geq -2x + 15$ y escriba su solución usando notación de intervalos.
22. Resuelva la desigualdad $x \leq 3 - \dfrac{6}{x+2}$ y escriba su solución usando notación de intervalos.

≡ Plano cartesiano

23. (Llene el espacio en blanco) Si (a, b) es un punto en el tercer cuadrante, entonces $(-a, b)$ es un punto en el __________ cuadrante.
24. (Llene el espacio en blanco) El punto medio del segmento de recta desde $P_1(2, -5)$ hasta $P_2(8, -9)$ es __________.
25. (Llene el espacio en blanco) Si $(-2, 6)$ es el punto medio del segmento de recta desde $P_1(x_1, 3)$ hasta $P_2(8, y_2)$, entonces $x_1 =$__________ y $y_2 =$ __________.
26. (Llene los espacios en blanco) El punto $(1, 5)$ está en una gráfica. Proporcione las coordenadas de otro punto de la gráfica si la gráfica es:
    a) simétrica con respecto al eje x. __________
    b) simétrica con respecto al eje y. __________
    c) simétrica con respecto al origen. __________
27. (Llene los espacios en blanco) Las intersecciones x y y de la gráfica de $|y| = 2x + 4$ son, respectivamente, __________ y __________.
28. ¿En cuáles cuadrantes del plano cartesiano es negativo el cociente x/y?
29. La coordenada y de un punto es 2. Encuentre la coordenada x del punto si la distancia del punto a $(1, 3)$ es $\sqrt{26}$.
30. Encuentre una ecuación del círculo para el cual $(-3, -4)$ y $(3, 4)$ son los puntos extremos de un diámetro.
31. Si los puntos P_1, P_2 y P_3 son colineales como se muestra en la FIGURA A.1, encuentre una ecuación que relacione las distancias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$, y $d(P_1, P_3)$.

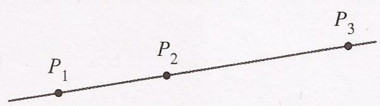


FIGURA A.1 Gráfica para el problema 31

32. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones describe mejor el círculo de la FIGURA A.2? Los símbolos a, b, c, d y e representan constantes diferentes de cero.
    a) $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$
    b) $ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0$
    c) $ax^2 + ay^2 + cx + dy = 0$
    d) $ax^2 + ay^2 + c = 0$
    e) $ax^2 + ay^2 + cx + e = 0$

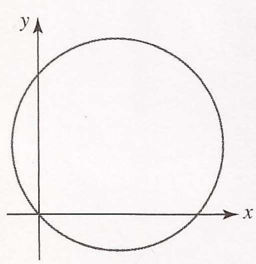


FIGURA A.2 Gráfica para el problema 32

≡ Rectas

33. (Falso/verdadero) Las rectas $2x + 3y = 5$ y $-2x + 3y = 1$ son perpendiculares. __________
34. (Llene el espacio en blanco) Las rectas $6x + 2y = 1$ y $kx - 9y = 5$ son paralelas si $k =$ __________.
35. (Llene el espacio en blanco) Una recta con intercepción x $(-4, 0)$ e intersección y $(0, 32)$ tiene pendiente __________.
36. (Llene los espacios en blanco) La pendiente y las intersecciones x y y de la recta $2x - 3y + 18 = 0$ son, respectivamente, __________, __________, y __________.
37. (Llene el espacio en blanco) Una ecuación de la recta con pendiente -5 e intersección y $(0, 3)$ es __________.
38. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(3, -8)$ y es paralela a la recta $2x - y = -7$.

39. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 4)$ y $(6, 1)$.

40. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las gráficas de $x + y = 1$ y $2x - y = 7$.

41. Una recta tangente a un círculo en un punto P del círculo es una recta que pasa por P y es perpendicular a la recta que pasa por P y el centro del círculo. Encuentre la ecuación de la recta tangente L indicada en la FIGURA A.3.

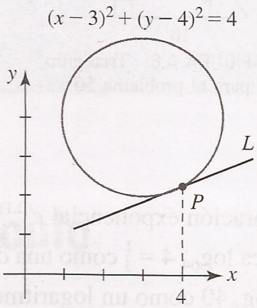


FIGURA A.3 Gráfica para el problema 41

42. Relacione la ecuación dada con la gráfica idónea en la FIGURA A.4.

i) $x + y - 1 = 0$ *ii)* $x + y = 0$ *iii)* $x - 1 = 0$
iv) $y - 1 = 0$ *v)* $10x + y - 10 = 0$ *vi)* $-10x + y + 10 = 0$
vii) $x + 10y - 10 = 0$ *viii)* $-x + 10y - 10 = 0$

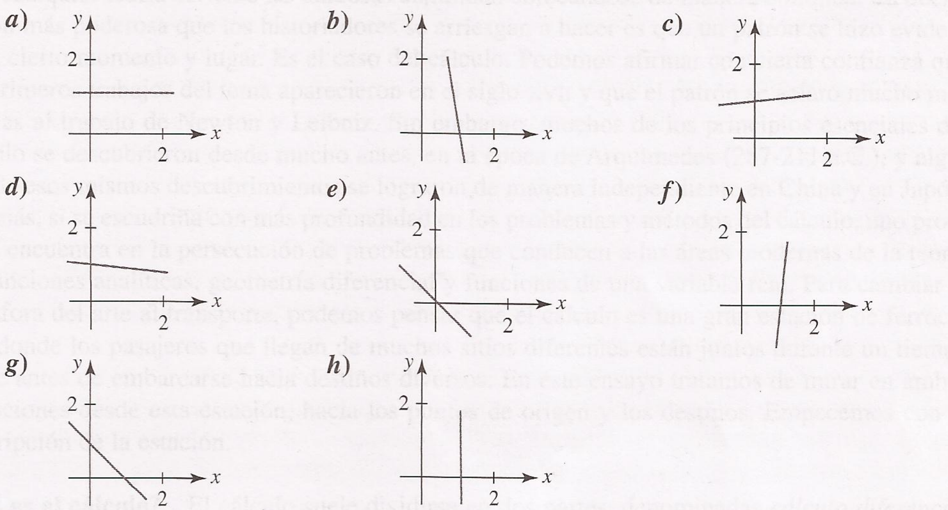


FIGURA A.4 Gráficas para el problema 42

Trigonometría

43. (Falso/verdadero) $1 + \sec^2\theta = \tan^2\theta$. ____________

44. (Falso/verdadero) $\operatorname{sen}(2t) = 2 \operatorname{sen} t$. ____________

45. (Llene el espacio en blanco) El ángulo 240 grados es equivalente a ____________ radianes.

46. (Llene el espacio en blanco) El ángulo $\pi/12$ radianes es equivalente a ____________ grados.

47. (Llene el espacio en blanco) Si $\tan t = 0.23$, $\tan(t + \pi) =$ ____________.

48. Encuentre $\cos t$ si $\operatorname{sen} t = \frac{1}{3}$ y el lado terminal del ángulo t está en el segundo cuadrante.

49. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ dado en la FIGURA A.5.

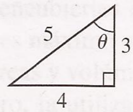


FIGURA A.5 Triángulo para el problema 49

50. Exprese las longitudes b y c de la FIGURA A.6 en términos del ángulo θ.

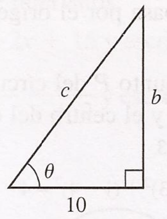


FIGURA A.6 Triángulo para el problema 50

Logaritmos

51. Exprese el símbolo k en la declaración exponencial $e^{(0.1)k} = 5$ como un logaritmo.

52. Exprese la declaración logarítmica $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ como una declaración exponencial equivalente.

53. Exprese $\log_b 5 + 3\log_b 10 - \log_b 40$ como un logaritmo simple.

54. Use una calculadora para evaluar $\dfrac{\log_{10} 13}{\log_{10} 3}$.

55. (Llene el espacio en blanco) $b^{3\log_b 10} =$ ______.

56. (Falso/verdadero) $(\log_b x)(\log_b y) = \log_b(y^{\log_b x})$. ______

Ensayo

La historia del cálculo

Por Roger Cooke
University of Vermont

Suele considerarse que el cálculo es una creación de los matemáticos europeos del siglo XVII, cuyo trabajo más importante fue realizado por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1711). Esta percepción tradicional en general es correcta. No obstante, cualquier teoría a gran escala es un mosaico cuyas baldosas fueron colocadas a lo largo de mucho tiempo; y en cualquier teoría viviente las baldosas continúan colocándose de manera continua. La declaración más poderosa que los historiadores se arriesgan a hacer es que un patrón se hizo evidente en cierto momento y lugar. Es el caso del cálculo. Podemos afirmar con cierta confianza que los primeros trabajos del tema aparecieron en el siglo XVII y que el patrón se aclaró mucho más gracias al trabajo de Newton y Leibniz. Sin embargo, muchos de los principios esenciales del cálculo se descubrieron desde mucho antes, en la época de Arquímedes (287-211 a.C.), y algunos de esos mismos descubrimientos se lograron de manera independiente en China y en Japón. Además, si se escudriña con más profundidad en los problemas y métodos del cálculo, uno pronto se encuentra en la persecución de problemas que conducen a las áreas modernas de la teoría de funciones analíticas, geometría diferencial y funciones de una variable real. Para cambiar la metáfora del arte al transporte, podemos pensar que el cálculo es una gran estación de ferrocarril, donde los pasajeros que llegan de muchos sitios diferentes están juntos durante un tiempo breve antes de embarcarse hacia destinos diversos. En este ensayo tratamos de mirar en ambas direcciones desde esta estación, hacia los puntos de origen y los destinos. Empecemos con la descripción de la estación.


Isaac Newton


Gottfried Leibniz

¿Qué es el cálculo? El cálculo suele dividirse en dos partes, denominadas *cálculo diferencial* y *cálculo integral*. El cálculo diferencial investiga las propiedades de las razones de cambio comparativas de variables que están vinculadas por medio de ecuaciones. Por ejemplo, un resultado fundamental del cálculo diferencial es que si $y = x^n$, entonces la razón de cambio de y con respecto a x es nx^{n-1}. Resulta que cuando se usa la intuición para pensar en ciertos fenómenos —movimiento de los cuerpos, cambios en la temperatura, crecimiento de poblaciones y muchos otros—, se llega a postular ciertas relaciones entre estas variables y sus razones de cambio. Estas relaciones se escriben en una forma conocida como *ecuaciones diferenciales*. Así, el objetivo principal de estudiar cálculo diferencial consiste en comprender qué son las razones de cambio y cómo escribir ecuaciones diferenciales. El cálculo integral proporciona métodos para recuperar las variables originales conociendo sus razones de cambio. La técnica para hacer esto se denomina *integración*, y el objetivo fundamental del estudio del cálculo integral es aprender a *resolver* las ecuaciones diferenciales proporcionadas por el cálculo diferencial.

A menudo estos objetivos están encubiertos en libros de cálculo, donde el cálculo diferencial se utiliza para encontrar los valores máximo y mínimo de ciertas variables, y el cálculo integral se usa para calcular longitudes, áreas y volúmenes. Hay dos razones para recalcar estas aplicaciones en un libro de texto. Primero, la utilización completa del cálculo usando ecuaciones diferenciales implica una teoría más bien complicada que debe presentarse de manera gradual; entre tanto, al estudiante debe enseñársele *algún* uso de las técnicas que se proponen. Segundo, estos problemas fueron la fuente de las ideas que condujeron al cálculo; los usos que ahora hacemos del tema sólo se presentaron después del descubrimiento de aquél.

Al describir los problemas que llevaron al cálculo y los problemas que pueden resolverse usando cálculo, aún no se han indicado las técnicas fundamentales que hacen de esta disciplina una herramienta de análisis mucho más poderosa que el álgebra y la geometría. Estas técnicas implican el uso de lo que alguna vez se denominó *análisis infinitesimal*. Todas las construcciones y las fórmulas de la geometría y el álgebra de preparatoria poseen un carácter finito. Por ejemplo, para construir la tangente de un círculo o para bisecar un ángulo se realiza un número finito de operaciones con regla y compás. Aunque Euclides sabía considerablemente más geometría que la que se enseña en cursos actuales modernos de preparatoria, él también se autoconfinó esencialmente a procesos finitos. Sólo en el contexto limitado de la teoría de las proporciones permitió la presencia de lo infinito en su geometría, y aun así está rodeado por tanto cuidado lógico que las demostraciones implicadas son extraordinariamente pesadas y difíciles de leer. Lo mismo ocurre en álgebra: para resolver una ecuación polinomial se lleva a cabo un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíz. Cuando las ecuaciones pueden resolverse, la solución se expresa como una fórmula finita que implica coeficientes.

Sin embargo, estas técnicas finitas cuentan con un rango limitado de aplicabilidad. No es posible encontrar las áreas de la mayoría de las figuras curvas mediante un número finito de operaciones con regla y compás, y tampoco resolver ecuaciones polinomiales de grado mayor o igual que cinco usando un número finito de operaciones algebraicas. Lo que se quería era escapar de las limitaciones de los métodos finitos, y esto condujo a la creación del cálculo. Ahora consideraremos algunos de los primeros intentos por desarrollar técnicas para manipular los problemas más difíciles de la geometría, luego de lo cual trataremos de resumir el proceso mediante el que se trabajó el cálculo, y finalmente exhibiremos algo de los frutos que ha producido.

Las fuentes geométricas del cálculo Uno de los problemas más antiguos en matemáticas es la cuadratura del círculo; es decir, construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Como se sabe, este problema no puede resolverse con regla y compás. Sin embargo, Arquímedes descubrió que si es posible trazar una espiral, empezando en el centro de un círculo que hace exactamente una revolución antes de llegar al círculo, entonces la tangente a esa espiral, en su punto de intersección con el círculo, forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya área es exactamente igual al círculo (vea la figura 1). Entonces, si es posible trazar esta espiral y su tangente, también lo es cuadrar el círculo. Arquímedes, no obstante, guardó silencio sobre cómo podría trazarse esta tangente.

Observamos que uno de los problemas clásicos en matemáticas puede resolverse sólo si es posible trazar cierta curva y su tangente. Este problema, y otros parecidos, originaron que el problema puramente matemático de encontrar la tangente a una curva se volviera importante. Este problema constituye la fuente más importante del cálculo diferencial. El truco "infinitesimal"

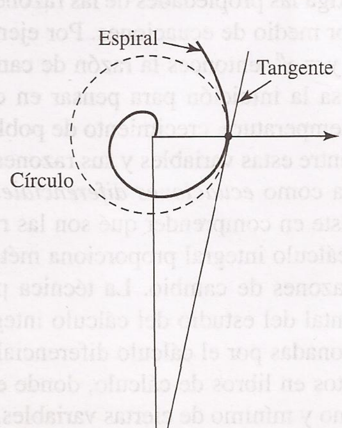


FIGURA 1 *La espiral de Arquímedes.* La tangente al final de la primera vuelta de la espiral y los dos ejes forman un triángulo con área igual a la del círculo centrado en el origen y que pasa por el punto de la tangente

que permite la solución del problema es considerar la tangente como la recta determinada por dos puntos en la curva "infinitamente próximos" entre sí. Otra forma de decir lo mismo es que una pieza "infinitamente corta" de la curva es recta. El problema es que resulta difícil ser preciso sobre los significados de las frases "infinitamente próximos" e "infinitamente cortos".

Poco avance se logró en este problema hasta la invención de la geometría analítica en el siglo XVII por Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650). Una vez que se pudo representar una curva por medio de una ecuación, fue posible afirmar con más confianza lo que se entendía por puntos "infinitamente próximos", al menos para ecuaciones polinomiales como $y = x^2$. Con simbolismo algebraico para representar puntos en la curva, era posible considerar dos puntos sobre la curva con coordenadas x_0 y x_1, de modo que $x_1 - x_0$ es la distancia entre las coordenadas x. Cuando la ecuación de la curva se escribía en cada uno de estos puntos y una de las dos ecuaciones se restaba de la otra, un lado de la ecuación resultante contenía el factor $x_1 - x_0$, que entonces podía eliminarse por división. Por lo tanto, si $y_0 = x_0^2$ y $y_1 = x_1^2$, entonces $y_1 - y_0 = x_1^2 - x_0^2 = (x_1 - x_0) = (x_1 + x_0)$, de modo que $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0$. Cuando $(x_1 = x_0)$, se concluye que $(y_1 = y_0)$, y la expresión $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ carece de sentido. Sin embargo, la expresión $x_1 + x_0$ tiene el valor perfectamente definido $2x_0$. Entonces, es posible considerar a $2x_0$ como la razón de la diferencia infinitamente pequeña en y; es decir, $y_1 - y_0$ a la diferencia infinitamente pequeña en x; es decir, $x_1 - x_0$, cuando el punto (x_1, y_1) está infinitamente cerca del punto (y_1, y_0) sobre la curva $y = x^2$. Como aprenderá al estudiar cálculo, esta razón proporciona suficiente información para trazar la recta tangente a la curva $y = x^2$.

Excepto por pequeños cambios en la notación, el razonamiento anterior es exactamente la forma en que Fermat encontró la tangente a una parábola. Sin embargo, estaba abierta a una objeción lógica: en un momento, ambos lados de la ecuación se dividen entre $x_1 - x_0$, entonces en un paso posterior decidimos que $x_1 - x_0 = 0$. Puesto que la división entre cero es una operación ilegal, parece que estamos tratando de comernos nuestro pastel y no hacerlo; es decir, no se pueden hacer ambas cosas. Tuvo que pasar algún tiempo para responder de manera convincente a esta objeción.

Hemos visto que Arquímedes no pudo resolver el problema fundamental del cálculo diferencial: trazar la tangente a una curva. Sin embargo, Arquímedes *pudo* resolver algunos de los problemas fundamentales del cálculo integral. De hecho, encontró el volumen de una esfera mediante un sistema extremadamente ingenioso: consideró un cilindro que contenía un cono y una esfera e imaginó cortar esta figura en una infinidad de rebanadas delgadas. Al suponer las áreas de estas secciones del cono, la esfera y el cilindro, pudo demostrar cómo el cilindro equilibraría al cono y a la esfera si las figuras se colocan en los platos opuestos de una balanza. Este equilibrio proporcionó una relación entre las figuras, y como Arquímedes ya conocía los volúmenes del cono y del cilindro, entonces pudo calcular el volumen de la esfera.

Este razonamiento ilustra la segunda técnica infinitesimal que se encuentra en los fundamentos del cálculo: un volumen puede considerarse como una pila de figuras planas, y un área puede considerarse como una pila de segmentos de rectas, en el sentido de que si cada sección horizontal de una región es igual a la misma sección horizontal de otra región, entonces las dos regiones son iguales. Durante el Renacimiento europeo este principio se volvió de uso muy común bajo el nombre de *método de los indivisibles* para encontrar las áreas y los volúmenes de muchas figuras. Hoy en día se denomina principio de Cavalieri en honor de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), quien lo usó para demostrar muchas de las fórmulas elementales que ahora forman parte del cálculo integral. El principio de Cavalieri también fue descubierto en otras tierras donde jamás llegó la obra de Euclides. Por ejemplo, los matemáticos chinos del siglo V Zu Chongzhi y su hijo Zu Geng hallaron el volumen de una esfera usando una técnica bastante parecida al método de Arquímedes.

Así, encontramos matemáticos que anticiparon el cálculo integral usando métodos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes en una etapa muy temprana de la geometría, tanto en la Grecia como la China antiguas. Así ocurre con el método infinitesimal para trazar tangentes; no obstante, este método para encontrar áreas y volúmenes estaba sujeto a objeciones. Por ejemplo, el volumen de cada sección plana de una figura es cero; ¿cómo es posible reunir una colección de ceros para obtener algo que no es cero? Además, ¿por qué el método no funciona en una dimensión? Considere las secciones de un triángulo rectángulo paralelas a uno de sus catetos.

Cada sección corta a la hipotenusa y al otro cateto en figuras congruentes; a saber, en un punto a cada uno. Sin embargo, la hipotenusa y el otro cateto no miden lo mismo. Objeciones como ésta eran preocupantes. Los resultados obtenidos con estos métodos fueron espectaculares. No obstante, los matemáticos prefirieron aceptarlos como un acto de fe, seguir usándolos e intentar construir sus fundamentos más tarde, justo como en un árbol cuando la raíz y las ramas crecen al mismo tiempo.

La invención del cálculo A mediados del siglo XVII se conocían muchas de las técnicas y hechos elementales del cálculo, incluso métodos para encontrar las tangentes de curvas simples y fórmulas de áreas acotadas por estas curvas. En otras palabras, muchas de las fórmulas que usted encontrará en los primeros capítulos de cualquier libro de texto de cálculo ya eran conocidas antes de que Newton y Leibniz iniciaran su obra. Lo que faltaba hasta fines del siglo XVII era tomar conciencia de que estos dos tipos de problemas están relacionados entre sí.

Para ver cómo se descubrió la relación, es necesario abundar más en las tangentes. Ya mencionamos que para trazar una tangente a una curva en un punto dado se requiere saber cómo encontrar un segundo punto en la recta. En la etapa inicial de la geometría analítica este segundo punto solía tomarse como el punto en que la tangente corta al eje x. La proyección sobre el eje x de la porción de la tangente entre el punto de tangencia y la intersección con el eje x se denominaba *subtangente*. En el estudio de las tangentes surgió un problema muy natural: *reconstruir una curva, dada la longitud de su subtangente en cualquier punto*. Por medio del estudio de este problema fue posible percibir que las ordenadas de cualquier curva son proporcionales al área bajo una segunda curva cuyas ordenadas son las longitudes de las subtangentes a la curva original. El resultado es el teorema fundamental del cálculo. El honor de haber reconocido de manera explícita esta relación pertenece a Isaac Barrow (1630-1677), quien lo indicó en un libro denominado *Lectiones Geometricae* en 1670. Barrow planteó varios teoremas semejantes al teorema fundamental del cálculo. Uno de ellos es el siguiente: *Si se traza una curva de modo que la razón de su ordenada a su subtangen*te [esta razón es precisamente lo que ahora se denomina derivada] *es proporcional a la ordenada de una segunda curva, entonces el área bajo la segunda curva es proporcional a la ordenada de la primera*.

Estas relaciones proporcionaron un principio unificado para el gran número de resultados particulares sobre tangentes y áreas que se habían encontrado con el método de indivisibles a principios del siglo XVII: para encontrar el área bajo una curva había que hallar una segunda curva para la cual la razón de la ordenada a la subtangente sea igual a la ordenada de la curva dada. Así, la ordenada de esa segunda curva proporciona el área bajo la primera curva.

En este punto el cálculo estaba preparado para surgir. Sólo requería de alguien que proporcionara métodos sistemáticos para el cálculo de tangentes (en realidad, subtangentes) e invertiera ese proceso para encontrar áreas. Es el trabajo realizado por Newton y Leibniz. Estos dos gigantes de la creatividad matemática siguieron senderos bastante distintos en sus descubrimientos.

El método de Newton era algebraico y desarrolló el problema de encontrar un método eficiente para extraer las raíces de un número. Aunque apenas empezó a estudiar álgebra en 1662, ya alrededor de 1665 las reflexiones de Newton sobre el problema de extraer raíces lo condujeron al descubrimiento de la serie infinita que actualmente se denomina teorema del binomio; es decir, la relación

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}r^3 + \cdots$$

Al combinar el teorema del binomio con técnicas infinitesimales, Newton pudo deducir las fórmulas básicas del cálculo diferencial e integral. Crucial en el enfoque de Newton fue el uso de series infinitas para expresar las variables en cuestión, y el problema fundamental que Newton no resolvió fue establecer que tales series podían manipularse justo como sumas finitas. Por tanto, en un sentido Newton llevó al infinito desde una entrada a su madriguera sólo para encontrar que una cara estaba frente a la otra.

A partir de la consideración de las variables como cantidades físicas que cambian su valor con el tiempo, Newton inventó nombres para las variables y sus razones de cambio que reflejaban esta intuición. Según Newton, un *fluent* (x) es una cantidad en movimiento o que fluye; su *fluxión* (x) es su razón de flujo, lo que ahora se denomina velocidad o *derivada*. Newton expuso sus resultados en 1671 en un tratado denominado *Fluxions* escrito en latín, pero su obra no fue publicada sino hasta que apareció una versión en inglés en 1736. (La versión original en latín fue publicada por primera vez en 1742.)

A pesar de la notación y de sus razonamientos que parecen insuficientes y rudimentarios hoy en día, el tremendo poder del cálculo brilla a través del *método de las fluxiones* de Newton en la solución de problemas tan difíciles como encontrar la longitud de arco de una curva. Se pensaba que esta "rectificación" de una curva era imposible, pero Newton demostró que era posible encontrar un número finito de curvas cuya longitud podía expresarse en términos finitos.

El método de Newton para el cálculo era algebraico, como hemos visto, y heredó el teorema fundamental de Barrow. Por otro lado, Leibniz trabajó el resultado fundamental desde 1670, y su enfoque era diferente al de Newton. Se considera a Leibniz como el pionero de la lógica simbólica, y su opinión acerca de la importancia de la buena notación simbólica era mucho mejor que la de Newton. Inventó la notación dx y dy que sigue en uso. Para él, dx era una abreviación de "diferencia en x", y representaba la diferencia entre dos valores infinitamente próximos de x. En otras palabras, expresaba exactamente lo que teníamos en mente hace poco cuando consideramos el cambio infinitamente pequeño $x_1 - x_0$. Leibniz consideraba que dx era un número "infinitesimal", diferente de cero, pero tan pequeño que ninguno de sus múltiplos podía exceder cualquier número ordinario. Al ser diferente de cero, podía servir como denominador en una fracción, y así dy/dx era el cociente de dos cantidades infinitamente pequeñas. De esta forma esperaba superar las objeciones al nuevo método establecido para encontrar tangentes.

Leibniz también realizó una aportación fundamental en la técnica controvertida de encontrar áreas al sumar secciones. En lugar de considerar el área [por ejemplo, el área bajo una curva $y = f(x)$] como una colección de segmentos de recta, la consideraba como la suma de las áreas de rectángulos "infinitamente delgados" de altura $y = f(x)$ y base infinitesimal dx. Por tanto, la diferencia entre el área hasta el punto $x + dx$ y el área hasta el punto x era la diferencia infinitesimal en área $dA = f(x)\,dx$, y el área total se encontraba sumando estas diferencias infinitesimales en área. Leibniz inventó la S alargada (el signo integral $\int$) que hoy en día se usa universalmente para expresar este proceso de suma. Así expresaba el área bajo la curva $y = f(x)$ como $A = \int dA = \int f(x)\,dx$, y cada parte de este símbolo expresaba una idea geométrica simple y clara.

Con la notación de Leibniz, el teorema fundamental del cálculo de Barrow simplemente indica que el par de ecuaciones

$$A = \int f(x)\,dx, \qquad dA = f(x)\,dx$$

son equivalentes. Debido a lo que acaba de plantearse, esta equivalencia es casi evidente.

Tanto Newton como Leibniz lograron grandes avances en matemáticas, y cada uno posee bastante crédito por ello. Resulta lamentable que la estrecha coincidencia de su obra haya conducido a una enconada discusión sobre la prioridad entre sus seguidores.

Algunas partes del cálculo, que implican series infinitas, fueron inventadas en India durante los siglos XIV y XV. Jyesthadeva, matemático indio de fines del siglo XV, proporcionó la serie

$$\theta = r\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3\cos^3\theta} + \frac{\operatorname{sen}^5\theta}{5\cos^5\theta} - \cdots\right)$$

para la longitud de un arco de círculo, demostró este resultado y de manera explícita planteó que esta serie converge sólo si θ no es mayor que 45°. Si se escribe $\theta = \arctan x$ y se usa el hecho de que $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = x$, esta serie se convierte en la serie normal para $\arctan x$.

De modo independiente, otras series fueron desarrolladas en Japón casi al mismo tiempo que en Europa. El matemático japonés Katahiro Takebe (1664-1739) encontró un desarrollo en serie equivalente a la serie para el cuadrado de la función arcsen. Él consideró el cuadrado de la mitad de arco a la altura h en un círculo de diámetro d; esto resultó ser la función $f(h) = \left(\dfrac{d}{2}\operatorname{arcsen}\dfrac{h}{d}\right)^2$. Takebe carecía de notación para el término general de una serie, aunque descubrió patrones en los coeficientes al calcular geométricamente la función en el valor particular de $h = 0.000001$, $d = 10$ hasta un valor muy grande de cifras decimales —más de 50—, y luego al usar esta precisión extraordinaria para refinar la aproximación al sumar sucesivamente términos correctivos.

Al proceder de esta manera pudo discernir un patrón en las aproximaciones sucesivas, a partir de lo cual, por extrapolación, pudo plantear el término general de la serie:

$$f(h) = dh\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}\left(\frac{h}{d}\right)^n\right]$$

Después de Newton y de Leibniz quedaba el problema de dar contenido al esqueleto inventado por estos dos genios. La mayor parte de su obra fue completada por matemáticos de la Europa continental, en especial por el círculo creado por los matemáticos suizos James Bernoulli (1655-1705) y John Bernoulli (1667-1748), así como el estudiante de este último, el marqués de L´Hôpital (1661-1704). Éstos y otros matemáticos trabajaron las conocidas fórmulas para las derivadas e integrales de funciones elementales que aún se encuentran en libros de texto actuales. Las técnicas esenciales de cálculo eran conocidas a principios del siglo XVIII, y un libro de texto del siglo XVIII como la *Introducción al análisis del infinito,* de Euler (1748), en caso de haber estado traducida al español se vería bastante como un libro de texto moderno.

El legado del cálculo Una vez que hemos abordado las fuentes del cálculo y el procedimiento con el que fue elaborado, a continuación analizaremos brevemente los resultados que produjo.

El cálculo obtuvo una cantidad impresionante de triunfos en sus dos primeros siglos. Resultó que docenas de fenómenos físicos previamente oscuros que implican calor, fluidez, mecánica celeste, elasticidad, luz, electricidad y magnetismo poseían propiedades mensurables cuyas relaciones podían describirse como ecuaciones diferenciales. La física se comprometió para siempre en hablar el lenguaje del cálculo.

Sin embargo, de ninguna manera fueron resueltos todos los problemas surgidos de la física. Por ejemplo, no era posible encontrar, en términos de funciones elementales conocidas, el área bajo una curva cuya ecuación implicaba la raíz cuadrada de un polinomio cúbico. Estas integrales surgieron a menudo tanto en geometría como en física, y llegaron a conocerse como *integrales elípticas* porque el problema de encontrar la longitud sólo podía comprenderse cuando la variable real x se sustituye por una variable compleja $z = x + iy$. El replanteamiento del cálculo en términos de variables complejas condujo a mucho descubrimientos fascinantes, que terminaron por ser codificados como una nueva rama de las matemáticas denominada teoría de funciones analíticas.

La definición idónea de integración siguió siendo un problema durante algún tiempo. Como consecuencia del uso de procesos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes surgieron las integrales. ¿Debía la integral definirse como una "suma de diferencias infinitesimales" o como la inversa de la diferenciación? ¿Qué funciones podían integrarse? En el siglo XIX se propusieron muchas definiciones de la integral, y la elaboración de estas ideas llevó al tema conocido actualmente como análisis real.

Mientras las aplicaciones del cálculo han continuado cosechando cada vez más triunfos en un flujo interminable durante los últimos trescientos años, sus fundamentos permanecieron en un estado insatisfactorio durante la primera mitad de este periodo. El origen de la dificultad era el significado que había de asociarse a la dx de Leibniz. ¿Qué era esta cantidad? ¿Cómo podía no ser positiva ni cero? De ser cero, no podía usarse como denominador; de ser positiva, entonces las ecuaciones en que aparecía no eran realmente ecuaciones. Leibniz consideraba que los infinitesimales eran entes verdaderos, que las áreas y los volúmenes podían sintetizarse al "sumar" sus secciones, como habían hecho Zu Chongzhi, Arquímedes y otros. Newton tenía menos confianza acerca de la validez de los métodos infinitesimales, e intentó justificar sus razonamientos en formas que pudiesen cumplir las normas del rigor euclideano. En su *Principia Mathematica* escribió:

> Estos lemas tienen el cometido de evitar el tedio de deducir *ad absurdum* demostraciones implícitas, según el método de los geómetras de la antigüedad. Las demostraciones son más breves según el método de indivisibles, pero debido a que la hipótesis de indivisibles parece ser algo más dura y, en consecuencia, ese método se acepta como menos geométrico, en lugar de ello elijo reducir las demostraciones de las siguientes proposiciones a las sumas y razones primera y última de cantidades que desaparecen; es decir, a los límites de estas sumas y razones... En consecuencia, si en lo sucesivo debo considerar que las cantidades están formadas de partículas, o debo usar pocas líneas curvas por las [rectas] idóneas, no debe interpretarse que estoy queriendo decir cantidades indivisibles, sino cantidades divisibles que desaparecen. . .

. . . En cuanto a estas últimas razones con las que desaparecen las cantidades, no son en verdad las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los cuales las razones de cantidades decrecientes sin límite siempre convergen; y a los que tienden de manera más próxima que con cualquier diferencia dada, aunque nunca van más allá, ni en el efecto alcanzado, hasta que las cantidades disminuyen *in infinitum*.

En este pasaje Newton afirma que la falta de rigor implicado en el uso de razonamientos infinitesimales puede compensarse con el uso de límites. Sin embargo, su planteamiento de este concepto en el pasaje citado no es tan claro como uno desearía. Esta falta de claridad condujo al filósofo Berkeley a referirse desdeñosamente a los fluxiones como "fantasmas de cantidades". Sin embargo, los avances alcanzados en física usando cálculo fueron tan sobresalientes que durante más de un siglo nadie se preocupó en proporcionar el rigor al que aludía Newton (¡y los físicos siguen sin preocuparse al respecto!). Una presentación completamente rigurosa y sistemática del cálculo llegó sólo hasta el siglo XIX.

Según la obra de Augustin-Louis Cauchy (1789-1856) y Karl Weierstrass (1815-1896), la percepción era que los infinitesimales eran meramente de naturaleza heurística y que los estudiantes estaban sujetos a un riguroso enfoque "epsilon-delta" de los límites. De manera sorprendente, en el siglo XX Abraham Robinson (1918-1974) demostró que es posible desarrollar un modelo lógicamente consistente de los números reales en el que hay infinitesimales verdaderos, como creía Leibniz. Sin embargo, parece que este nuevo enfoque, denominado "análisis no estándar", no ha sustituido a la presentación tradicional actual del cálculo.

Ejercicios

1. El tipo de espiral considerada por Arquímedes ahora se denomina así en su honor. Una espiral de Arquímedes es el lugar geométrico de un punto que se mueve a velocidad constante a lo largo de un rayo que gira con velocidad angular constante alrededor de un punto fijo. Si la velocidad lineal a lo largo del rayo (la componente *radial* de su velocidad) es v, el punto está a una distancia vt del centro de rotación (suponiendo que es donde empieza) en el instante t. Suponga que la velocidad angular de rotación del rayo es ω (radianes por unidad de tiempo). Dados un círculo de radio R y una velocidad radial de v, ¿cuál debe ser ω para que la espiral llegue al círculo al final de su primera vuelta? *Res.* $\left(\frac{2\pi v}{R}\right)$

El punto tendrá una velocidad circunferencial $r\omega = vt\,\omega$. Según un principio enunciado en la *Mecánica* de Aristóteles, la velocidad real de la partícula está dirigida a lo largo de la diagonal de un paralelogramo (en este caso un rectángulo) cuyos lados son las componentes. Use este principio para mostrar cómo construir la tangente a la espiral (que es la recta que contiene a la diagonal de este rectángulo). Compruebe que los lados de este rectángulo guardan la relación $1 : 2\pi$. Observe la figura 1.

2. La figura 2 ilustra cómo Arquímedes encontró la relación entre los volúmenes de la esfera, el cono y el cilindro. El diámetro AB está duplicado, haciendo $BC = AB$. Cuando esta figura se hace girar alrededor de esta recta, el círculo genera una esfera, el triángulo DBG genera un cono y el rectángulo $DEFG$ genera un cilindro. Demuestre los hechos siguientes:

a) Si B se usa como fulcro, el cilindro tiene como centro de gravedad el centro K del círculo y, en consecuencia, todo puede concentrarse ahí sin cambiar la torsión alrededor de B.

b) Cada sección del cilindro perpendicular a la recta AB, permaneciendo en su posición actual, equilibraría exactamente la misma sección del cono más la sección de la esfera si éstos dos se desplazaran al punto C.

c) Por tanto, el cilindro concentrado en K equilibraría al cono y a la esfera que se concentran en C.

d) En consecuencia, el cilindro es igual al doble de la suma del cono y la esfera.

e) Puesto que se sabe que el cono es un tercio del cilindro, se concluye que la esfera debe ser un sexto de éste.

f) Que el volumen del cilindro es $8\pi r^2$.

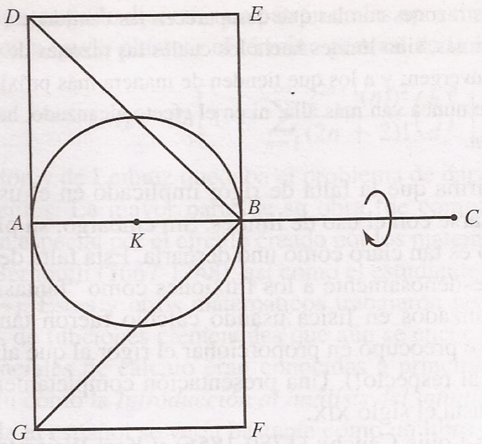


FIGURA 2 Sección de la esfera, el cono y el cilindro de Arquímedes

3. El método con el que Zu Chongzhi y Zu Geng encontraron el volumen de la esfera es el siguiente: imagine que la esfera es una pelota fuertemente adherida dentro de la intersección de dos cilindros que forma ángulos rectos entre sí. Luego, el sólido formado por la intersección de los dos cilindros (denominado *paraguas doble* en chino) y que contiene la pelota se ajusta perfectamente dentro de un cubo cuya arista es igual al diámetro de la esfera.

A partir de esta descripción, trace una sección de la esfera dentro del paraguas doble formado por los ejes de los dos cilindros y a una distancia h debajo de este pleno. Compruebe los hechos siguientes:

a) Si el radio de la esfera es r, el diámetro de su sección circular es $2\sqrt{r^2 - h^2}$.

b) Por tanto, el área del cuadrado formado por esta sección del paraguas doble es $4(r^2 - h^2)$, de modo que el área entre la sección del cubo y la sección del paraguas doble es

$$4r^2 - 4(r^2 - h^2) = 4h^2.$$

c) La sección correspondiente de una pirámide cuya base es la parte inferior de un cubo y cuyo vértice está en el centro de la esfera (o del cubo) también tiene un área de $4h^2$. Por tanto, el volumen entre el paraguas doble y el cubo es exactamente el volumen de esta pirámide más su imagen especular arriba del plano central. Concluya que la región entre el paraguas doble y el cubo es un tercio del cubo.

d) En consecuencia, el paraguas doble ocupa dos tercios del volumen del cubo; es decir, su volumen es $\frac{16}{3}r^3$.

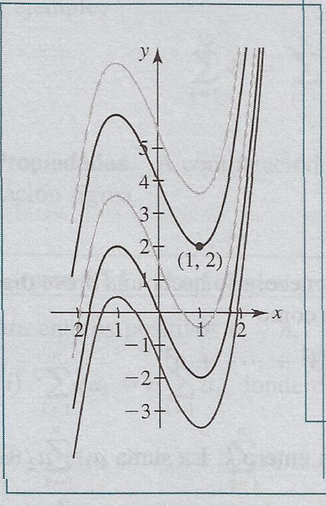
e) Cada sección circular de la esfera está inscrita en la sección cuadrada correspondiente del paraguas doble. Por tanto, la sección circular es $\frac{\pi}{4}$ de la sección del paraguas doble.

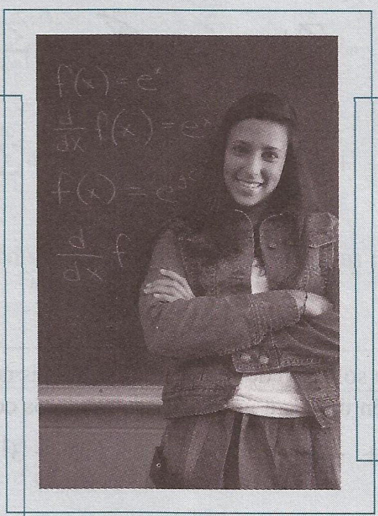
f) En consecuencia, el volumen de la esfera es $\frac{\pi}{4}$ del volumen del paraguas doble; es decir, $\frac{4}{3}\pi r^3$.

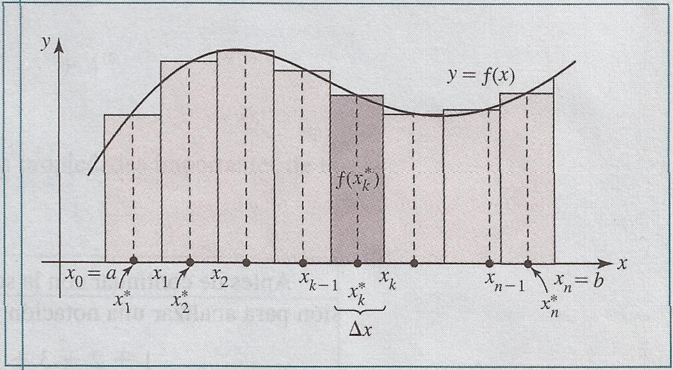
4. Proporcione un razonamiento "infinitesimal" de que el área de la esfera es tres veces su volumen dividido entre su radio, al suponer que la esfera es una colección de pirámides "infinitamente delgadas" donde todos los vértices se encuentren adheridos al origen. [*Sugerencia*: parte del hecho de que el volumen de una pirámide es un tercio del área de su base multiplicada por su altura. Arquímedes afirmaba que éste es el razonamiento que lo condujo al descubrimiento del área de la esfera.]

Unidad 1

Teorema fundamental del cálculo







En esta unidad Una de las herramientas más poderosas del cálculo es la derivada. Ahora pasaremos del cálculo diferencial al cálculo integral. Leibniz denominó *calculus summatorius* a esta segunda de las dos divisiones más importantes del cálculo. En 1696, persuadido por el matemático suizo Johann Bernoulli, Leibniz cambió el nombre a *calculus integralis*. Como sugieren las palabras latinas originales, el concepto de *suma* desempeña un papel importante en el desarrollo completo de la integral.

En el cálculo diferencial, el problema de la tangente conduce de manera natural a la derivada de una función. En el problema de área, el problema motivacional del cálculo integral, deseamos encontrar el área acotada por la gráfica de una función y el eje *x*. Este problema lleva al concepto de *integral definida*.

Competencias específicas

- Contextualizar el concepto de integral definida.
- Visualizar la relación entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.
- Calcular integrales definidas.

1.1 El problema del área

Introducción Así como la derivada es motivada por el problema geométrico de construir una tangente a una curva, el problema histórico que conduce a la definición de integral definida es el problema de encontrar un área. En específico, tenemos interés en la siguiente versión de este problema:

- Encontrar el área A de una región acotada por el eje x y la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ definida sobre un intervalo $[a, b]$.

El área de esta región se denomina **área bajo la gráfica** de f sobre el intervalo $[a, b]$. El requerimiento de que f sea no negativa sobre $[a, b]$ significa que ninguna parte de esta gráfica sobre el intervalo está por abajo del eje x. Vea la FIGURA 1.1.1.

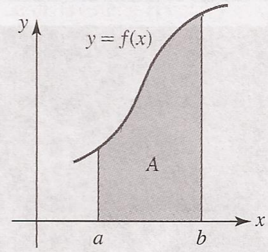


FIGURA 1.1.1 Área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$

Antes de continuar con la solución del problema de área es necesario hacer una breve digresión para analizar una notación útil para una suma de números como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \qquad \text{y} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Notación sigma Sea a_k un número real que depende de un entero k. La suma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ se denota por el símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$; esto es,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \tag{1}$$

Puesto que Σ es la letra griega mayúscula *sigma*, (1) se denomina **notación sigma** o **notación de suma**. La variable k se denomina **índice de la suma**. Así,

termina con este valor de k

el símbolo Σ indica la suma de a_k $\rightarrow$ $$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

empieza con el valor indicado de k

es la suma de todos los números de la forma a_k cuando k asume los valores sucesivos $k = 1$, $k = 2, \ldots,$ y termina con $k = n$.

EJEMPLO 1 Uso de la notación sigma

La suma de los diez primeros enteros pares

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 18 + 20$$

puede escribirse de manera abreviada como $\sum_{k=1}^{10} 2k$. La suma de los diez enteros positivos impares

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 17 + 19$$

puede escribirse como $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)$.

El índice de la suma no necesita empezar en el valor $k = 1$; por ejemplo,

$$\sum_{k=3}^{5} 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

Observe que la suma de los diez enteros positivos impares en el ejemplo 1 también puede escribirse como $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$. Sin embargo, en un análisis general siempre se supone que el índice de la suma empieza en $k = 1$. Esta suposición responde más a razones de conveniencia que de necesidad. El índice de la suma a menudo se denomina **variable ficticia**, puesto que el símbolo en sí carece de importancia; lo que importa son los valores enteros sucesivos del índice y la suma correspondiente. En general,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{m=1}^{n} a_m.$$

Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{10} 4^k = \sum_{i=1}^{10} 4^i = \sum_{j=1}^{10} 4^j = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{10}.$$

Propiedades A continuación se presenta una lista de algunas propiedades importantes de la notación sigma.

Teorema 1.1.1 Propiedades de la notación sigma

Para enteros positivos m y n,

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$, donde c es cualquier constante

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k,\ m < n.$

La demostración de la fórmula *i)* es una consecuencia inmediata de la ley distributiva. Por supuesto, *ii)* del teorema 1.1.1 se cumple para la suma de más de tres términos; por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Fórmulas de sumas especiales Para tipos especiales de sumas indicadas, particularmente sumas que implican potencias de enteros positivos del índice de la suma (como sumas de enteros positivos consecutivos, cuadrados sucesivos, cubos sucesivos, etc.) es posible encontrar una fórmula que proporcione el valor numérico verdadero de la suma. Para efectos de esta unidad, centraremos la atención en las cuatro fórmulas siguientes.

Teorema 1.1.2 Fórmulas de sumas

Para n un entero positivo y c cualquier constante,

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$ *ii)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *iv)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

Las fórmulas *i*) y *ii*) pueden justificarse fácilmente. Si c es una constante, es decir, independiente del índice de la suma, entonces $\sum_{k=1}^{n} c$ significa $c + c + c + \cdots + c$. Puesto que hay n constantes c, tenemos $\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$, que es *i*) del teorema 1.1.2. Luego, la suma de los n primeros enteros positivos puede escribirse como $\sum_{k=1}^{n} k$. Si esta suma se denota por la letra S, entonces

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n. \tag{2}$$

En forma equivalente,

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1. \tag{3}$$

Si sumamos (2) y (3) con los primeros términos correspondientes, luego los segundos términos, y así sucesivamente, entonces

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ términos de } n+1} = n(n+1).$$

Al despejar S obtenemos $S = n(n+1)/2$, que es *ii*). Usted debe poder obtener las fórmulas *iii*) y *iv*) con las sugerencias que se proporcionan en los problemas 55 y 56 en los ejercicios 1.1.

EJEMPLO 2 Uso de fórmulas de suma

Encuentre el valor numérico de $\sum_{k=1}^{20} (k+5)^2$.

Solución Al desarrollar $(k+5)^2$ y usar *i*) y *ii*) del teorema 1.1.1, podemos escribir

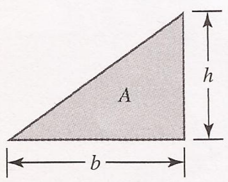
$$\sum_{k=1}^{20} (k+5)^2 = \sum_{k=1}^{20} (k^2 + 10k + 25) \quad \leftarrow \text{el binomio se eleva al cuadrado}$$

$$= \sum_{k=1}^{20} k^2 + 10 \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 25. \quad \leftarrow i) \text{ y } ii) \text{ del teorema 1.1.1}$$

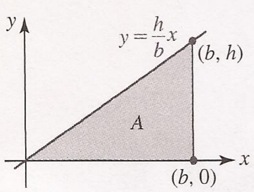
Con la identificación $n = 20$, por las fórmulas de sumas *iii*), *ii*) y *i*) del teorema 1.1.2, respectivamente, se concluye

$$\sum_{k=1}^{20} (k+5)^2 = \frac{20(21)(41)}{6} + 10\frac{20(21)}{2} + 20 \cdot 25 = 5\,470.$$ ■

La notación sigma y las fórmulas de sumas anteriores se usarán de inmediato en el siguiente análisis.



a) Triángulo rectángulo



b) Triángulo rectángulo en un sistema de coordenadas

FIGURA 1.1.2 Encuentre el área A del triángulo rectángulo

Área de un triángulo Suponga por el momento que no se conoce ninguna fórmula para calcular el área A del triángulo rectángulo proporcionado en la FIGURA 1.1.2*a*). Al superponer un sistema rectangular de coordenadas sobre el triángulo, como se muestra en la figura 1.1.2*b*), se ve que el problema es el mismo que encontrar el área en el primer cuadrante acotada por las líneas rectas $y = (h/b)x$, $y = 0$ (el eje x) y $x = b$. En otras palabras, deseamos encontrar el área bajo la gráfica de $y = (h/b)x$ sobre el intervalo $[0, b]$.

Al usar rectángulos, la FIGURA 1.1.3 indica tres formas diferentes de *aproximar* el área A. Por conveniencia, seguiremos con mayor detalle el procedimiento sugerido en la figura 1.1.3*b*). Empezamos al dividir el intervalo $[0, b]$ en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = b/n$. Si el punto fronterizo derecho de estos intervalos se denota por x_k^*, entonces

$$x_1^* = \Delta x = \frac{b}{n}$$

$$x_2^* = 2\Delta x = 2\left(\frac{b}{n}\right)$$

$$x_3^* = 3\Delta x = 3\left(\frac{b}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^* = n\Delta x = n\left(\frac{b}{n}\right) = b.$$

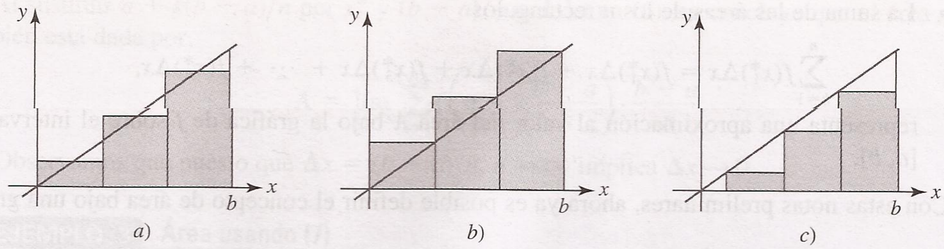
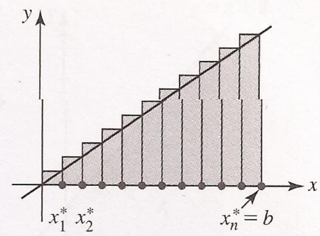
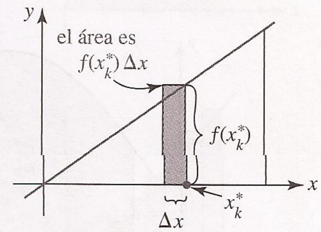


FIGURA 1.1.3 Aproximación del área A usando tres rectángulos



a) *n* rectángulos



b) Área de un rectángulo general

FIGURA 1.1.4 El área A del triángulo es aproximada por la suma de las áreas de n rectángulos

Como se muestra en la FIGURA 1.1.4*a*), ahora construimos un rectángulo de longitud $f(x_k^*)$ y ancho Δx sobre cada uno de estos n subintervalos. Puesto que el área de un rectángulo es *largo* $\times$ *ancho*, el área de cada rectángulo es $f(x_k^*)\Delta x$. Vea la figura 1.1.4*b*). La suma de las áreas de los n rectángulos es una aproximación al número A. Escribimos

$$A \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x,$$

o en notación sigma,

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x. \tag{4}$$

Parece válido que reduzcamos el error introducido por este método de aproximación (el área de cada rectángulo es mayor que el área bajo la gráfica sobre un subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$) al dividir el intervalo $[0, b]$ en subdivisiones más finas. En otras palabras, esperamos que una mejor aproximación a A pueda obtenerse usando más y más rectángulos $(n \to \infty)$ de anchos decrecientes $(\Delta x \to 0)$. Luego,

$$f(x) = \frac{h}{b}x, \quad x_k^* = k\left(\frac{b}{n}\right), \quad f(x_k^*) = \frac{h}{n}\cdot k \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{b}{n},$$

de modo que con ayuda de la fórmula de suma *ii*) del teorema 1.1.2, (4) se vuelve

$$A \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{h}{n}\,k\right)\frac{b}{n} = \frac{bh}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{bh}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{bh}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

Finalmente, al hacer $n \to \infty$ en el miembro derecho de (5), obtenemos la fórmula conocida para el área de un triángulo:

$$A = \frac{1}{2}bh \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}bh.$$

El problema general Ahora pasaremos del ejemplo precedente específico al problema general de encontrar el área A bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ que es continua sobre un intervalo $[a, b]$. Como se muestra en la FIGURA 1.1.5*a*), también suponemos que $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo $[a, b]$. Como sugiere la figura 1.1.5*b*), el área A puede aproximarse al sumar las áreas de n rectángulos que se construyen sobre el intervalo. A continuación se resume un procedimiento posible para determinar A:

- Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervaloss $[x_{k-1}, x_k]$, donde

  $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

  de modo que cada subintervalo tiene el mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Esta colección de números se denomina **partición regular** del intervalo $[a, b]$.
- Escoja un número x_k^* en cada uno de los n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ y forme los n productos $f(x_k^*)\Delta x$. Puesto que el área de un rectángulo es largo $\times$ ancho, $f(x_k^*)\Delta x$ es el área del rectángulo de largo $f(x_k^*)$ y ancho Δx construido sobre el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Los n números $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*$ se denominan **puntos muestra**.

- La suma de las áreas de los n rectángulos

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x,$$

representa una aproximación al valor del área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$.

Con estas notas preliminares, ahora ya es posible definir el concepto de área bajo una gráfica.

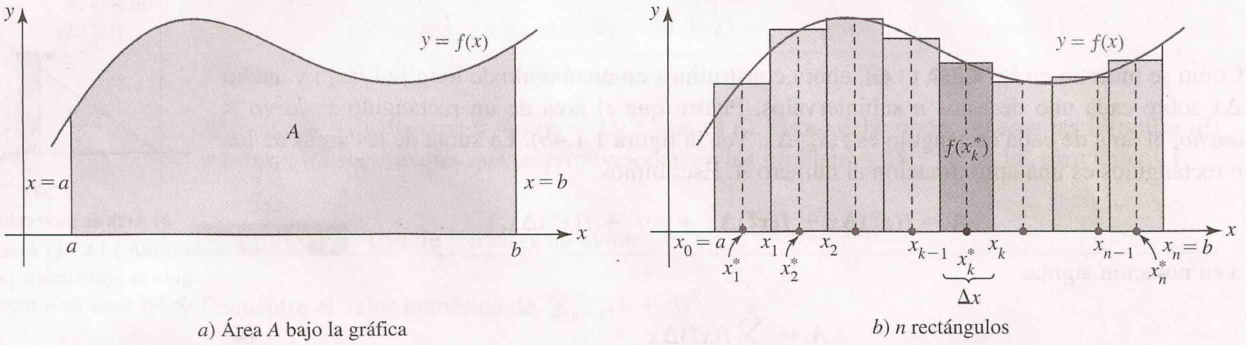


FIGURA 1.1.5 Encuentre el área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$

Definición 1.1.1 Área bajo una gráfica

Sea f continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. El **área A bajo la gráfica** de f sobre el intervalo se define como

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x. \tag{6}$$

Es posible demostrar que cuando f es *continua*, el límite en (6) siempre existe sin importar el método usado para dividir $[a, b]$ en subintervalos; es decir, los subintervalos pueden tomarse o no de modo que su ancho sea el mismo, y los puntos x_k^* pueden escogerse en forma arbitraria en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. No obstante, si los subintervalos no tienen el mismo ancho, entonces en (6) es necesario un tipo diferente de límite. Necesitamos sustituir $n \to \infty$ por el requerimiento de que la longitud del subintervalo más ancho tienda a cero.

Una forma práctica de (6) Para usar (6), suponga que escogemos x_k^* como se hizo en el análisis de la figura 1.1.4; a saber: sea x_k^* el **punto fronterizo derecho** de cada subintervalo. Puesto que el ancho de cada uno de los n subintervalos de igual ancho es $\Delta x = (b - a)/n$, tenemos

$$x_k^* = a + k\Delta x = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Luego, para $k = 1, 2, \ldots, n$ tenemos

$$x_1^* = a + \Delta x = a + \frac{b-a}{n}$$

$$x_2^* = a + 2\Delta x = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$x_3^* = a + 3\Delta x = a + 3\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^* = a + n\Delta x = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b.$$

Al sustituir $a + k(b - a)/n$ por x_k^* y $(b - a)/n$ por Δx en (6), se concluye que el área A también está dada por

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}. \tag{7}$$

Observamos que puesto que $\Delta x = (b - a)/n$, $n \to \infty$ implica $\Delta x \to 0$.

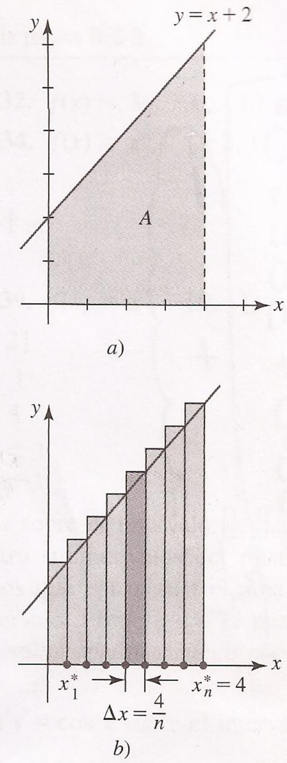


FIGURA 1.1.6 Área bajo la gráfica en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Área usando (7)

Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = x + 2$ sobre el intervalo $[0, 4]$.

Solución El área está acotada por el trapezoide indicado en la **FIGURA 1.1.6*a***). Al identificar $a = 0$ y $b = 4$, encontramos

$$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}.$$

Así, (7) se vuelve

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{4}{n}\right)\frac{4}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{4k}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k}{n} + 2\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1\right]. \quad \leftarrow \text{por las propiedades } i) \text{ y } ii) \text{ del teorema 1.1.1} \end{aligned}$$

Luego, por las fórmulas de suma *i*) y *ii*) del teorema 1.1.2, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\frac{4}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 2n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{16}{2}\,\frac{n(n+1)}{n^2} + 8\right] \quad \leftarrow \text{se divide entre } n^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[8\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 8\right] \\ &= 8\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 8\lim_{n\to\infty} 1 \\ &= 8 + 8 = 16 \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

■

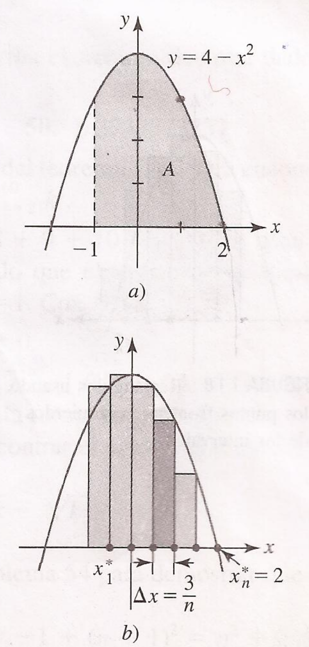


FIGURA 1.1.7 Área bajo la gráfica en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Área usando (7)

Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $[-1, 2]$.

Solución El área se indica en la **FIGURA 1.1.7*a***). Puesto que $a = -1$ y $b = 2$, se concluye que

$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}.$$

A continuación se revisarán los pasos que llevan a (7). El ancho de cada rectángulo está dado por $\Delta x = (2 - (-1))/n = 3/n$. Luego, empezando en $x = -1$, el punto fronterizo derecho de los n subintervalos es

$$\begin{aligned} x_1^* &= -1 + \frac{3}{n} \\ x_2^* &= -1 + 2\left(\frac{3}{n}\right) = -1 + \frac{6}{n} \\ x_3^* &= -1 + 3\left(\frac{3}{n}\right) = -1 + \frac{9}{n} \\ &\vdots \\ x_n^* &= -1 + n\left(\frac{3}{n}\right) = 2. \end{aligned}$$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Entonces, la longitud de cada rectángulo es

$$f(x_1^*) = f\left(-1 + \frac{3}{n}\right) = 4 - \left[-1 + \frac{3}{n}\right]^2$$
$$f(x_2^*) = f\left(-1 + \frac{6}{n}\right) = 4 - \left[-1 + \frac{6}{n}\right]^2$$
$$f(x_3^*) = f\left(-1 + \frac{9}{n}\right) = 4 - \left[-1 + \frac{9}{n}\right]^2$$
$$\vdots$$
$$f(x_n^*) = f\left(-1 + \frac{3n}{n}\right) = f(2) = 4 - (2)^2 = 0.$$

El área del k-ésimo rectángulo es *largo* $\times$ *ancho*:

$$f(x_k^*)\frac{3}{n} = \left(4 - \left[-1 + k\frac{3}{n}\right]^2\right)\frac{3}{n} = \left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{3}{n}.$$

Al sumar las áreas de los n rectángulos obtenemos una aproximación al área bajo la gráfica sobre el intervalo: $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(3/n)$. A medida que el número n de rectángulos crece sin límite, obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{3}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} 3 + \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right]. \end{aligned}$$

Al usar las fórmulas de sumas *i*), *ii*) y *iii*) del teorema 1.1.2 obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[3n + \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[9 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] \\ &= 9 + 9 - 9 = 9 \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

■

Otras elecciones para x_k^* No hay nada en especial si x_k^* se escoge como el punto fronterizo derecho de cada subintervalo. Volvemos a recalcar que x_k^* puede tomarse como cualquier número conveniente en $[x_{k-1}, x_k]$. En caso de que se elija x_k^* como el **punto fronterizo izquierdo** de cada subintervalo, entonces

$$x_k^* = a + (k-1)\Delta x = a + (k-1)\frac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

y (7) se volvería

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}. \tag{8}$$

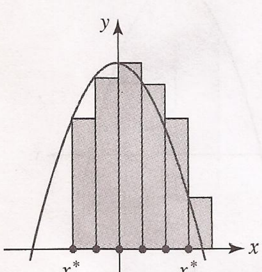


FIGURA 1.1.8 Rectángulos usando los puntos fronterizos izquierdos de los intervalos

En el ejemplo 4, los rectángulos correspondientes serían como se observa en la FIGURA 1.1.8. En este caso se hubiera tenido $x_k^* = -1 + (k-1)(3/n)$. En los problemas 45 y 46 de los ejercicios 1.1 se le pide resolver el problema de área en el ejemplo 4 escogiendo x_k^* como primer punto fronterizo izquierdo y punto medio de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Al elegir x_k^* como el punto medio de cada $[x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$x_k^* = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

1.1 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-2.

Fundamentos

En los problemas 1-10, desarrolle la suma indicada.

1. $\sum_{k=1}^{5} 3k$ **2.** $\sum_{k=1}^{5} (2k-3)$

3. $\sum_{k=1}^{4} \frac{2^k}{k}$ **4.** $\sum_{k=1}^{5} \left(\frac{3}{10}\right)^k$

5. $\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^k}{2k+5}$ **6.** $\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$

7. $\sum_{j=2}^{5} (j^2-2j)$ **8.** $\sum_{m=0}^{4} (m+1)^2$

9. $\sum_{k=1}^{5} \cos k\pi$ **10.** $\sum_{k=1}^{5} \frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k}$

En los problemas 11-20, use notación sigma para escribir la suma dada.

11. $3+5+7+9+11+13+15$

12. $2+4+8+16+32+64$

13. $1+4+7+10+\cdots+37$

14. $2+6+10+14+\cdots+38$

15. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

16. $-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}$

17. $6+6+6+6+6+6+6+6$

18. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\cdots+3$

19. $\cos\frac{\pi}{p}x-\frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{p}x+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi}{p}x-\frac{1}{16}\cos\frac{4\pi}{p}x$

20. $f'(1)(x-1)-\frac{f''(1)}{3}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{5}(x-1)^3$
$-\frac{f^{(4)}(1)}{7}(x-1)^4+\frac{f^{(5)}(1)}{9}(x-1)^5$

En los problemas 21-28, encuentre el valor numérico de la suma dada.

21. $\sum_{k=1}^{20} 2k$ **22.** $\sum_{k=0}^{50} (-3k)$

23. $\sum_{k=1}^{10} (k+1)$ **24.** $\sum_{k=1}^{1\,000} (2k-1)$

25. $\sum_{k=1}^{6} (k^2+3)$ **26.** $\sum_{k=1}^{5} (6k^2-k)$

27. $\sum_{p=0}^{10} (p^3+4)$ **28.** $\sum_{i=1}^{10} (2i^3-5i+3)$

En los problemas 29-42, use (7) y el teorema 1.1.2 para encontrar el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado.

29. $f(x)=x,\quad [0,6]$ **30.** $f(x)=2x,\quad [1,3]$

31. $f(x)=2x+1,\quad [1,5]$ **32.** $f(x)=3x-6,\quad [2,4]$

33. $f(x)=x^2,\quad [0,2]$ **34.** $f(x)=x^2,\quad [-2,1]$

35. $f(x)=1-x^2\quad [-1,1]$

36. $f(x)=2x^2+3,\quad [-3,-1]$

37. $f(x)=x^2+2x,\quad [1,2]$

38. $f(x)=(x-1)^2,\quad [0,2]$ **39.** $f(x)=x^3,\quad [0,1]$

40. $f(x)=x^3-3x^2+4,\quad [0,2]$

41. $f(x)=\begin{cases} 2, & 0\le x<1 \\ x+1, & 1\le x\le 4 \end{cases}$

42. $f(x)=\begin{cases} -x+1, & 0\le x<1 \\ x+2, & 1\le x\le 3 \end{cases}$

43. Trace la gráfica de $y=1/x$ sobre el intervalo $[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$. Al dividir el intervalo en cuatro subintervalos del mismo ancho, construya rectángulos que aproximen el área A bajo la gráfica sobre el intervalo. Primero use el punto fronterizo derecho de cada subintervalo, y luego use el punto fronterizo izquierdo.

44. Repita el problema 43 para $y=\cos x$ sobre el intervalo $[-\pi/2,\pi/2]$.

45. Vuelva a trabajar el ejemplo 4 escogiendo x_k^* como el punto fronterizo izquierdo de cada subintervalo. Vea (8).

46. Vuelva a trabajar el ejemplo 4 escogiendo x_k^* como el punto medio de cada subintervalo. Vea (9).

En los problemas 47 y 48, dibuje la región cuya área A está dada por la fórmula. No intente evaluar.

47. $A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4-\frac{4k^2}{n^2}}\,\frac{2}{n}$ **48.** $A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}$

Piense en ello

En los problemas 49 y 50, escriba el número decimal dado usando notación sigma.

49. 0.11111111 **50.** 0.3737373737

51. Use la fórmula de suma *iii)* del teorema 1.1.2 para encontrar el valor numérico de $\sum_{k=21}^{60} k^2$.

52. Escriba la suma $8+7+8+9+10+11+12$ usando notación sigma de modo que el índice de la suma empiece con $k=0$. Con $k=1$. Con $k=2$.

53. Despeje $\bar{x}$: $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2=0$.

54. *a)* Encuentre el valor de $\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]$. Se dice que una suma de esta forma es **telescópica**.

b) Use el inciso *a)* para encontrar el valor numérico de

$$\sum_{k=1}^{400}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right).$$

55. *a)* Use el inciso *a)* del problema 54 para demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2-k^2]=-1+(n+1)^2=n^2+2n.$$

b) Use el hecho de que $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ para demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^2 - k^2] = n + 2\sum_{k=1}^{n} k.$$

c) Compare los resultados de los incisos *a*) y *b*) para obtener la fórmula de suma *iii*) del teorema 1.1.2.

56. Muestre cómo el patrón ilustrado en la FIGURA 1.1.9 puede usarse para inferir la fórmula de suma *iv*) del teorema 1.1.2.

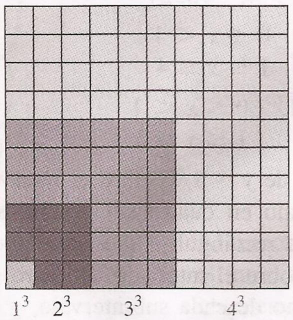


FIGURA 1.1.9 Arreglo para el problema 56

57. Obtenga la fórmula para el área del trapezoide proporcionado en la FIGURA 1.1.10.

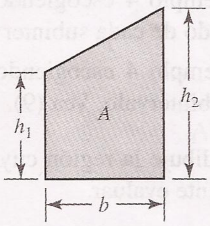


FIGURA 1.1.10 Trapezoide en el problema 57

58. En un supermercado, 136 latas se acomodan en forma triangular como se muestra en la FIGURA 1.1.11. ¿Cuántas latas puede haber en la parte inferior de la pila?

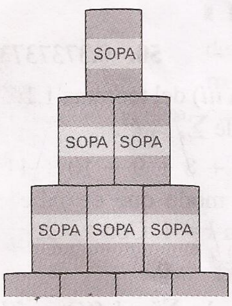


FIGURA 1.1.11 Pila de latas en el problema 58

59. Use (7) y la fórmula de suma

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

para encontrar el área bajo la gráfica de $f(x) = 16 - x^4$ sobre $[-2, 2]$.

60. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre $[0, 1]$ al considerar el área bajo la gráfica de $y = x^2$ sobre $[0, 1]$. Lleve a cabo sus ideas.

61. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ sobre $[0, 8]$ al considerar el área bajo la gráfica de $y = x^3$ sobre $0 \le x \le 2$.

62. *a*) Suponga que $y = ax^2 + bx + c \ge 0$ sobre el intervalo $[0, x_0]$. Demuestre que el área bajo la gráfica sobre $[0, x_0]$ está dada por

$$A = a\frac{x_0^3}{3} + b\frac{x_0^2}{2} + cx_0.$$

b) Use el resultado en el inciso *a*) para encontrar el área bajo la gráfica de $y = 6x^2 + 2x + 1$ sobre el intervalo $[2, 5]$.

63. Una fórmula de suma para la suma de los n términos de una sucesión geométrica finita $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right).$$

Use esta fórmula de suma, (8) de esta sección, y la regla de L'Hôpital para encontrar el área bajo la gráfica de $y = e^x$ sobre $[0, 1]$.

64. Un poco de historia En un curso de física para principiantes todo mundo sabe que la distancia de un cuerpo que cae es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido. **Galileo Galilei** (1564-1642) fue el primero en descubrir este hecho. Galileo encontró que la distancia que se mueve una masa hacia abajo en un plano inclinado es proporcional a un entero positivo impar. Por tanto, la distancia total s que una masa se mueve en n segundos, con n un entero positivo, es proporcional a $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$. Demuestre que esto es lo mismo que afirmar que la distancia total que se mueve una masa hacia abajo en un plano inclinado es proporcional al tiempo transcurrido n.

1.2 La integral definida

Introducción En la sección anterior vimos que el área bajo la gráfica de una función continua no negativa f sobre un intervalo $[a, b]$ se definía como el límite de una suma. En esta sección verá que el mismo tipo de proceso límite conduce al concepto de **integral definida**.

Sea $y = f(x)$ una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

Considere los siguientes cuatro pasos:

- Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de anchos $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{1}$$

  La colección de números (1) se denomina **partición** del intervalo y se denota por P.
- Sea $\|P\|$ el mayor número de los n anchos de los subintervalos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. El número $\|P\|$ se denomina **norma** de la partición P.
- Escoja un número x_k^* en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ como se muestra en la FIGURA 1.2.1. Los n números $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*$ se denominan **puntos muestra** en estos subintervalos.
- Forme la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \tag{2}$$

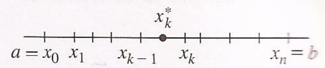


FIGURA 1.2.1 Punto muestra x_k^* en $[x_{k-1}, x_k]$

Sumas del tipo proporcionado en (2) que corresponden a varias particiones de $[a, b]$ se denominan **sumas de Riemann** en honor del famoso matemático alemán **Georg Friedrich Bernhard Riemann**.

Aunque el procedimiento anterior parece muy semejante a los pasos que llevan a la definición de área bajo una gráfica dada en la sección 1.1, hay algunas diferencias importantes. Observe que una suma de Riemann (2) no requiere que f sea continua o no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Así, (2) no necesariamente representa una aproximación al área bajo una gráfica. Tenga en cuenta que "área bajo una gráfica" se refiere *al área acotada entre la gráfica de una función continua no negativa y el eje x*. Como se muestra en la FIGURA 1.2.2, si $f(x) < 0$ para alguna x en $[a, b]$, una suma de Riemann puede contener términos $f(x_k^*)\Delta x_k$, donde $f(x_{k1}^*) < 0$. En este caso, los productos $f(x_k^*)\Delta x_k$ son números que son los negativos de las áreas de rectángulos trazados abajo del eje x.

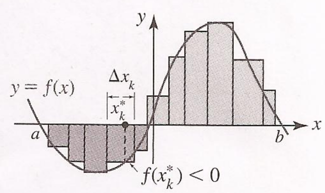


FIGURA 1.2.2 La función f es positiva y negativa sobre el intervalo $[a, b]$

EJEMPLO 1 Una suma de Riemann

Calcule la suma de Riemann para $f(x) = x^2 - 4$ sobre $[-2, 3]$ con cinco subintervalos determinados por $x_0 = -2, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = \frac{7}{4}, x_5 = 3$ y $x_1^* = -1, x_2^* = -\frac{1}{4}, x_3^* = \frac{1}{2}, x_4^* = \frac{3}{2}, x_5^* = \frac{5}{2}$. Encuentre la norma de la partición.

Solución En la FIGURA 1.2.3 se muestra que los números x_k, $k = 0, 1, \ldots, 5$ determinan cinco subintervalos $[-2, -\frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, 0], [0, 1], [1, \frac{7}{4}]$ y $[\frac{7}{4}, 3]$ del intervalo $[-2, 3]$ y un punto muestra x_k^* dentro de cada subintervalo.

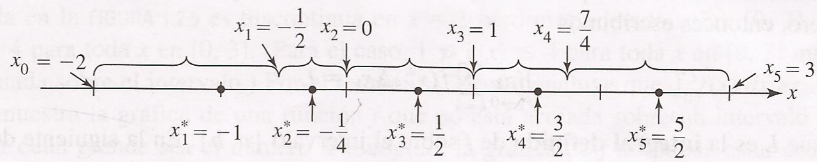


FIGURA 1.2.3 Cinco subintervalos y puntos muestra en el ejemplo 1

Luego, evalúe la función f de cada punto muestra y determine el ancho de cada subintervalo:

$$\begin{aligned}
f(x_1^*) &= f(-1) = -3, & \Delta x_1 &= x_1 - x_0 = -\frac{1}{2} - (-2) = \frac{3}{2}\\
f(x_2^*) &= f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{63}{16}, & \Delta x_2 &= x_2 - x_1 = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\\
f(x_3^*) &= f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4}, & \Delta x_3 &= x_3 - x_2 = 1 - 0 = 1\\
f(x_4^*) &= f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}, & \Delta x_4 &= x_4 - x_3 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}\\
f(x_5^*) &= f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}, & \Delta x_5 &= x_5 - x_4 = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Entonces, la **suma de Riemann** para esta partición y esa elección del punto muestra es

$$f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + f(x_3^*)\Delta x_3 + f(x_4^*)\Delta x_4 + f(x_5^*)\Delta x_5$$

$$= (-3)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{63}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{15}{4}\right)(1) + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{279}{32} \approx -8.72.$$

Al analizar los valores de los cinco Δx_k observamos que la norma de la partición es $\|P\| = \frac{3}{2}$. ■

Para una función f definida sobre un intervalo $[a, b]$, hay un número finito de posibles sumas de Riemann para una partición dada P del intervalo, puesto que los números x_k^* pueden escogerse arbitrariamente en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

EJEMPLO 2 Otra suma de Riemann

Calcule la suma de Riemann para la función del ejemplo 1 si la partición de $[-2, 3]$ es la misma pero los puntos muestra son $x_1^* = -\frac{3}{2}$, $x_2^* = -\frac{1}{8}$, $x_3^* = \frac{3}{4}$, $x_4^* = \frac{3}{2}$ y $x_5^* = 2.1$.

Solución Sólo es necesario calcular f en los nuevos puntos muestra, puesto que los números Δx_k son los mismos que antes:

$$f(x_1^*) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}$$

$$f(x_2^*) = f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{255}{64}$$

$$f(x_3^*) = f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{55}{16}$$

$$f(x_4^*) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}$$

$$f(x_5^*) = f(2.1) = 0.41.$$

Ahora la suma de Riemann es

$$f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + f(x_3^*)\Delta x_3 + f(x_4^*)\Delta x_4 + f(x_5^*)\Delta x_5$$

$$= \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{255}{64}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{55}{16}\right)(1) + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + (0.41)\left(\frac{5}{4}\right) \approx -8.85. \ ■$$

Tenemos interés en un tipo especial de límite de (2). Si las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ están próximas a un número L para *toda* partición P de $[a, b]$ para la cual la norma $\|P\|$ esté cerca de cero, entonces escribimos

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = L \tag{3}$$

y se dice que L es la **integral definida** de f sobre el intervalo $[a, b]$. En la siguiente definición se introduce un nuevo símbolo para el número L.

Definición 1.2.1 La integral definida

Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la **integral definida de f de a a b**, que se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$, se define como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \tag{4}$$

Si el límite en (4) existe, se dice que la función f es **integrable** sobre el intervalo. Los números a y b en la definición precedente se denominan **límite inferior** y **límite superior de integración**, respectivamente. La función f se denomina **integrando**. El símbolo integral $\int$, según lo usaba Leibniz, es una S alargada que representa la palabra *suma*. También observe que $\|P\| \to 0$

siempre implica que el número de subintervalos n se vuelve infinito ($n \to \infty$). No obstante, como se muestra en la FIGURA 1.2.4, el hecho de que $n \to \infty$ no necesariamente implica $\|P\| \to 0$.

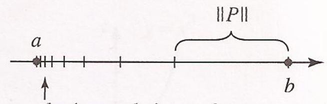


FIGURA 1.2.4 Una infinidad de subintervalos no implica $\|P\| \to 0$.

Integrabilidad En los dos teoremas siguientes se plantean condiciones que son suficientes para que una función f sea integrable sobre un intervalo $[a, b]$. No se proporcionan las demostraciones de estos teoremas.

> **Teorema 1.2.1** Continuidad implica integrabilidad
>
> Si f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ existe; es decir, f es integrable sobre el intervalo.

Hay funciones definidas para cada valor de x en $[a, b]$ para las cuales el límite en (4) no existe. También, si la función f no está definida para todos los valores de x en el intervalo, la integral definida *puede* no existir; por ejemplo, después se verá por qué una integral como $\int_{-3}^{2}(1/x)\,dx$ no existe. Observe que $y = 1/x$ es discontinua en $x = 0$ y no está acotada sobre el intervalo. Sin embargo, a partir de este ejemplo no debe concluirse que cuando una función f tiene una discontinuidad en $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ necesariamente no existe. La continuidad de una función sobre $[a, b]$ es condición *suficiente* pero *no necesaria* para garantizar la existencia de $\int_a^b f(x)\,dx$. El conjunto de funciones continuas sobre $[a, b]$ es un subconjunto del conjunto de funciones que son integrables sobre el intervalo.

El siguiente teorema proporciona otra condición suficiente para integrabilidad sobre $[a, b]$.

> **Teorema 1.2.2** Condiciones suficientes para integrabilidad
>
> Si una función f está acotada sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, es decir, si existe una constante positiva B tal que $-B \le f(x) \le B$ para toda x en el intervalo y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, entonces f es integrable sobre el intervalo.

Cuando una función f está acotada, su gráfica completa debe estar entre dos rectas horizontales, $y = B$ y $y = -B$. En otras palabras, $|f(x)| \le B$ para toda x en $[a, b]$. La función

$$f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

mostrada en la FIGURA 1.2.5 es discontinua en $x = 2$ pero está acotada sobre $[0, 3]$, puesto que $|f(x)| \le 4$ para toda x en $[0, 3]$. (Para el caso, $1 \le f(x) \le 4$ para toda x en $[0, 3]$ muestra que f está acotada sobre el intervalo.) Por el teorema 1.2.2 se concluye que $\int_0^3 f(x)\,dx$ existe. La FIGURA 1.2.6 muestra la gráfica de una función f que no está acotada sobre un intervalo $[a, b]$. Sin importar cuán grande sea el número B escogido, la gráfica de f no puede estar confinada a la región entre las rectas horizontales $y = B$ y $y = -B$.

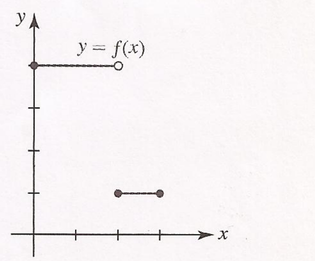


FIGURA 1.2.5 La integral definida de f sobre $[0, 3]$ existe

Partición regular Si se sabe que una integral definida existe (por ejemplo, el integrando f es continuo sobre $[a, b]$), entonces:

- El límite en (4) existe para cualquier forma posible de partición $[a, b]$ y para toda forma posible de escoger x_k^* en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.

En particular, al escoger los subintervalos del mismo ancho y los puntos muestra como los puntos fronterizos derechos de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, es decir,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_k^* = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

la expresión (4) puede escribirse en forma alterna como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}. \tag{5}$$

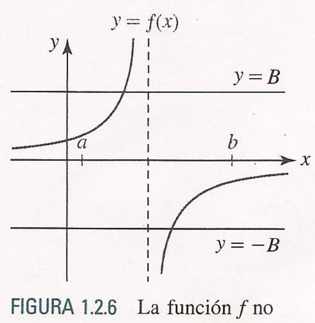


FIGURA 1.2.6 La función f no está acotada sobre $[a, b]$

Recuerde de la sección 1.1 que una partición P de $[a, b]$ donde los subintervalos tienen el mismo ancho se denomina **partición regular**.

Área Tal vez usted concluya que los planteamientos de $\int_a^b f(x)\,dx$ dados en (4) y (5) son exactamente los mismos que (6) y (7) de la sección 1.1 para el caso general de encontrar el área bajo la curva $y = f(x)$ sobre $[a, b]$. En cierta forma esto es correcto; no obstante, la definición 1.2.1 es un concepto más general puesto que, como ya se observó, no estamos requiriendo que f sea continua sobre $[a, b]$ o que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo. Por tanto, una *integral definida no necesita ser un área*. Entonces, ¿qué es una integral definida? Por ahora, acepte el hecho de que una integral definida es simplemente un número real. Compare esto con la integral indefinida, que es una función (o una familia de funciones). El área bajo la gráfica de una función continua no negativa, ¿es una integral definida? La respuesta es *sí*.

Teorema 1.2.3 El área como integral definida

Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo, entonces el **área A bajo la gráfica** sobre $[a, b]$ es

$$A = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (6)$$

EJEMPLO 3 El área como integral definida

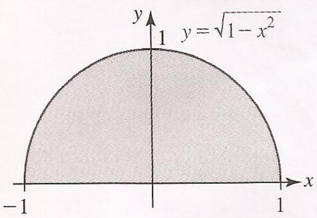


FIGURA 1.2.7 Área en el ejemplo 3

Considere la integral definida $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$. El integrando es continuo y no negativo, de modo que la integral definida representa el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$. Debido a que la gráfica de la función f es el semicírculo superior de $x^2 + y^2 = 1$, el área bajo la gráfica es la región sombreada en la FIGURA 1.2.7. Por geometría sabemos que el área de un círculo de radio r es πr^2, y así con $r = 1$ el área del semicírculo y, por tanto, el valor de la integral definida, es

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(1)^2 = \frac{1}{2}\pi. \quad \blacksquare$$

En la unidad 3 volveremos a la cuestión de encontrar áreas por medio de la integral definida.

EJEMPLO 4 Integral definida usando (5)

Evalúe $\displaystyle\int_{-2}^{1} x^3\,dx$.

Solución Puesto que $f(x) = x^3$ es continua sobre $[-2, 1]$, por el teorema 1.2.3 sabemos que la integral definida existe. Usamos una partición regular y el resultado dado en (5). Al escoger

$$\Delta x = \frac{1 - (-2)}{n} = \frac{3}{n} \quad \text{y} \quad x_k^* = -2 + k \cdot \frac{3}{n}$$

tenemos

$$f\left(-2 + \frac{3k}{n}\right) = \left(-2 + \frac{3k}{n}\right)^3 = -8 + 36\left(\frac{k}{n}\right) - 54\left(\frac{k^2}{n^2}\right) + 27\left(\frac{k^3}{n^3}\right).$$

Luego, por (5) y las fórmulas de suma *i*), *ii*), *iii*) y *iv*) del teorema 1.2.2 se concluye que

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} x^3\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(-2 + \frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[-8 + 36\left(\frac{k}{n}\right) - 54\left(\frac{k^2}{n^2}\right) + 27\left(\frac{k^3}{n^3}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[-8n + \frac{36}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{54}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[-24 + 54\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{81}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= -24 + 54 - 27(2) + \frac{81}{4} = -\frac{15}{4}.
\end{aligned}$$

En la FIGURA 1.2.8 se muestra que no se está considerando el área bajo la gráfica sobre $[-2, 1]$. ■

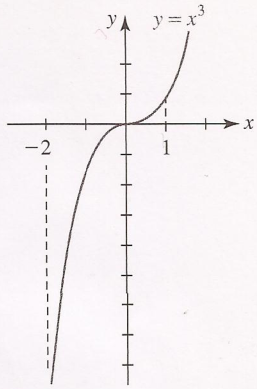


FIGURA 1.2.8 Gráfica de la función en el ejemplo 4

EJEMPLO 5 Integral definida usando (5)

Los valores de las sumas de Riemann en los ejemplos 1 y 2 son aproximaciones al valor de la integral definida $\int_{-2}^{3}(x^2 - 4)\,dx$. Se deja como ejercicio demostrar que (5) da

$$\int_{-2}^{3}(x^2 - 4)\,dx = -\frac{25}{3} \approx -8.33.$$

Vea el problema 16 en los ejercicios 1.2. ■

Propiedades de la integral definida A continuación se analizarán algunas propiedades importantes de la integral definida que se definió en (4).

Las dos siguientes definiciones son útiles cuando se trabaja con integrales definidas.

Definición 1.2.2 Límites de integración

i) **Igualdad de límites** Si a está en el dominio de f, entonces

$$\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{7}$$

ii) **Inversión de límites** Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_{b}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{8}$$

La definición 1.2.2*i)* puede motivarse por el hecho de que el área bajo la gráfica de f y por arriba de un solo punto a sobre el eje x es cero.

En la definición de $\int_a^b f(x)\,dx$ se supuso que $a < b$, de modo que la dirección de "costumbre" de la integración definida es de izquierda a derecha. El inciso *ii)* de la definición 1.2.2 establece que invertir esta dirección, es decir, intercambiar los límites de integración, resulta en la negativa de la integral.

EJEMPLO 6 Definición 1.2.2

Por el inciso *i)* de la definición 1.2.2,

$$\begin{array}{r} \text{los límites de integración} \rightarrow \\ \text{son los mismos} \rightarrow \end{array} \int_{1}^{1}(x^3 + 3x)\,dx = 0.$$ ■

EJEMPLO 7 Otro repaso al ejemplo 4

En el ejemplo 4 vimos que $\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\frac{15}{4}$. Por el inciso *ii)* de la definición 1.2.2 se concluye que

$$\int_{1}^{-2} x^3\,dx = -\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{15}{4}.$$ ■

En el siguiente teorema se enumeran algunas de las propiedades básicas de la integral definida. Estas propiedades son análogas a las propiedades de la notación sigma proporcionadas en el teorema 1.1.1, así como a las propiedades de la integral indefinida que se analizarán en la sección 1.3.

Teorema 1.2.4 Propiedades de la integral definida

Si f y g son funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

i) $\int_{a}^{b} kf(x)\,dx = k\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, donde k es cualquier constante

ii) $\int_{a}^{b}[f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \pm \int_{a}^{b} g(x)\,dx$.

El teorema 1.2.4*ii*) se extiende a cualquier suma finita de funciones integrables sobre el intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

La variable independiente x en una integral definida se denomina **variable ficticia** de integración. El valor de la integral no depende del símbolo usado. En otras palabras,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(r)\,dr = \int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b f(t)\,dt \tag{9}$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO 8 Otro repaso al ejemplo 4

Por (9), no importa qué símbolo se use como la variable de integración:

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \int_{-2}^{1} r^3\,dr = \int_{-2}^{1} s^3\,ds = \int_{-2}^{1} t^3\,dt = -\frac{15}{4}.$$ ■

Teorema 1.2.5 Propiedad aditiva del intervalo

Si f es una función integrable sobre un intervalo cerrado que contiene a los números a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{10}$$

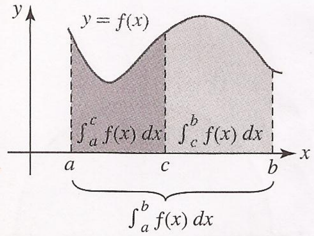


FIGURA 1.2.9 Las áreas son aditivas

Resulta fácil interpretar la propiedad aditiva del intervalo dada en el teorema 1.2.5 en el caso especial en que f es continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. Como se ve en la FIGURA 1.2.9, el área bajo la gráfica de f sobre $[a, c]$ más el área bajo la gráfica del intervalo adyacente $[c, b]$ es la misma que el área bajo la gráfica de f sobre todo el intervalo $[a, b]$.

Nota: La conclusión del teorema 1.2.5 se cumple cuando a, b y c son tres números *cualesquiera* en un intervalo cerrado. En otras palabras, no es necesario tener el orden $a < c < b$ como se muestra en la figura 1.2.9. Además, el resultado en (10) se extiende a cualquier número finito de números $a, b, c_1, c_2, \ldots, c_n$ en el intervalo. Por ejemplo, para un intervalo cerrado que contiene a los números a, b, c_1 y c_2,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx.$$

Para una partición P dada de un intervalo $[a, b]$, tiene sentido afirmar que

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a, \tag{11}$$

en otras palabras, el límite $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$ es simplemente el ancho del intervalo. Como una consecuencia de (11), tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2.6 Integral definida de una constante

Para cualquier constante k,

$$\int_a^b k\,dx = k\int_a^b dx = k(b - a).$$

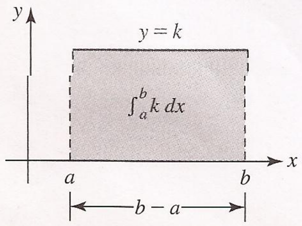


FIGURA 1.2.10 Si $k > 0$, el área bajo la gráfica es $k(b - a)$

Si $k > 0$, entonces el teorema 1.2.6 implica que $\int_a^b k\,dx$ es simplemente el área de un rectángulo de ancho $b - a$ y altura k. Vea la FIGURA 1.2.10.

EJEMPLO 9 Integral definida de una constante

Por el teorema 1.2.6,

$$\int_2^8 5\,dx = 5\int_2^8 dx = 5(8-2) = 30.$$

EJEMPLO 10 Uso de los ejemplos 4 y 9

Evalúe $\int_{-2}^{1}(x^3+5)\,dx$.

Solución Por el teorema 1.2.4*ii*) podemos escribir la integral dada como dos integrales:

$$\int_{-2}^{1}(x^3+5)\,dx = \int_{-2}^{1}x^3\,dx + \int_{-2}^{1}5\,dx.$$

Luego, por el ejemplo 4 sabemos que $\int_{-2}^{1}x^3dx = -\frac{15}{4}$, y con ayuda del teorema 1.2.6 vemos que $\int_{-2}^{1}5\,dx = 5[1-(-2)] = 15$. En consecuencia,

$$\int_{-2}^{1}(x^3+5)\,dx = \left(-\frac{15}{4}\right) + 15 = \frac{45}{4}.$$

Por último, los siguientes resultados no son sorprendentes si la integral se interpreta como un área.

Teorema 1.2.7 Propiedades de comparación

Sean f y g funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.

i) Si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

ii) Si $m \leq f(x) \leq M$ para toda x en el intervalo, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Las propiedades *i*) y *ii*) del teorema 1.2.7 se entienden fácilmente en términos de área. Para *i*), si se supone $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces sobre el intervalo el área A_1 bajo la gráfica de f es mayor que o igual al área A_2 bajo la gráfica de g. En forma semejante, para *ii*) si se supone que f es continua y positiva sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces por el teorema del valor extremo, f tiene un mínimo absoluto $m > 0$ y un máximo absoluto $M > 0$ en el intervalo. Entonces, el área bajo la gráfica $\int_a^b f(x)\,dx$ sobre el intervalo es mayor que o igual al área $m(b-a)$ del rectángulo más pequeño mostrado en la FIGURA 1.2.11*a*) y menor que o igual al área $M(b-a)$ del rectángulo más grande mostrado en la figura 1.2.11*b*).

Si en *i*) del teorema 1.2.7 se hace $g(x) = 0$ y se usa el hecho de que $\int_a^b 0\,dx = 0$, se concluye lo siguiente:

- Si $f(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. (12)

En forma semejante, al escoger $f(x) = 0$ en *i*), se concluye que:

- Si $g(x) \leq 0$ sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b g(x)\,dx \leq 0$. (13)

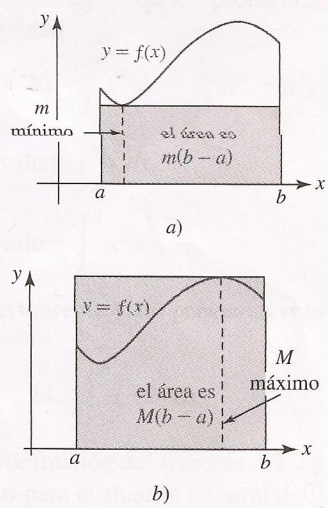


FIGURA 1.2.11 Motivación para el inciso *ii*) del teorema 1.2.7

Área neta con signo Debido a que la función f en la FIGURA 1.2.12 asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ no representa área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Por el teorema 1.2.5, la propiedad aditiva del intervalo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx. \tag{14}$$

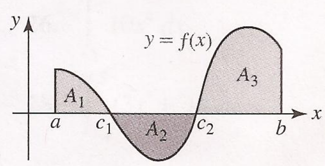


FIGURA 1.2.12 La integral definida de f sobre $[a, b]$ proporciona el área neta con signo

Debido a que $f(x) \geq 0$ sobre $[a, c_1]$ y $[c_2, b]$ tenemos

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx = A_1 \quad \text{y} \quad \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx = A_3,$$

donde A_1 y A_3 denotan las áreas bajo la gráfica de f sobre los intervalos $[a, c_1]$ y $[c_2, b]$, respectivamente. Pero puesto que $f(x) \leq 0$ sobre $[c_1, c_2]$ en virtud de (13), tenemos $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \leq 0$ y así $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$ no representa área. No obstante, el valor de $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$ es el negativo del área verdadera A_2 acotada entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[c_1, c_2]$. Es decir, $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = -A_2$. Por tanto, (14) es

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + (-A_2) + A_3 = A_1 - A_2 + A_3.$$

Vemos que la integral definida proporciona el **área neta con signo** entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[a, b]$.

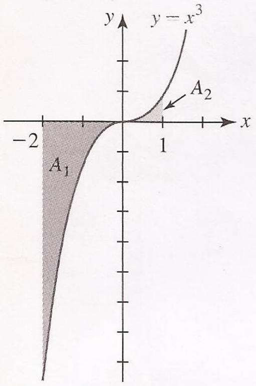


FIGURA 1.2.13 Área neta con signo en el ejemplo 11

EJEMPLO 11 Área neta con signo

El resultado $\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\frac{15}{4}$ obtenido en el ejemplo 4 puede interpretarse como el área neta con signo entre la gráfica de $f(x) = x^3$ y el eje x sobre $[-2, 1]$. Aunque la observación de que

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx = -A_1 + A_2 = -\frac{15}{4}$$

no proporciona los valores de A_1 y A_2, el valor negativo es consistente con la FIGURA 1.2.13 donde resulta evidente que el área A_1 es mayor que A_2. ■

La teoría Sea f una función definida sobre $[a, b]$ y sea L un número real. El concepto intuitivo de que las sumas de Riemann están próximas a L siempre que la norma $\|P\|$ de una partición P esté cerca de cero puede expresarse en forma precisa usando los símbolos ε-δ introducidos en la definición formal de límite de una función. Al afirmar que f es integrable sobre $[a, b]$, se está diciendo que para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k - L \right| < \varepsilon, \tag{15}$$

siempre que P sea una partición de $[a, b]$ para la cual $\|P\| < \delta$ y el x_k^* son los números en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. En otras palabras,

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

existe y es igual al número L.

Posdata: Un poco de historia **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866) nació en Hanover, Alemania, en 1826. Fue hijo de un ministro luterano. Aunque era cristiano devoto, Riemann no se inclinó por seguir la vocación de su padre y abandonó el estudio de teología en la Universidad de Gotinga para seguir una carrera de estudios en los que su genio era evidente: matemáticas. Es probable que el concepto de sumas de Riemann haya sido resultado de un curso sobre integral definida que tomó en la universidad; este concepto refleja su intento por asignar un significado matemático preciso a la integral definida de Newton y Leibniz. Después de presentar su examen doctoral sobre los fundamentos de las funciones de una variable compleja al comité examinador en la Universidad de Gotinga, Karl Friedrich Gauss, el "príncipe de las matemáticas", dedicó a Riemann un elogio bastante singular: "La disertación ofrece pruebas concluyentes. . . de una mente creativa, activa, verdaderamente matemática. . . de fértil originalidad". Riemann, como muchos otros estudiantes promisorios de la época, era de constitución frágil. Falleció a los 39 años de edad, de pleuresía. Sus originales contribuciones a la geometría diferencial, topología, geometría no euclidiana y sus intrépidas investigaciones concernientes a la naturaleza del espacio, la electricidad y el magnetismo anunciaron el trabajo de Einstein en el siglo siguiente.


Riemann

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

El procedimiento bosquejado en (5) tenía una utilidad limitada como medio práctico para calcular una integral definida. En la siguiente sección se introducirá un teorema que permite encontrar el número $\int_a^b f(x)\,dx$ de manera mucho más fácil. Este importante teorema constituye el puente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

1.2 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-2.

Fundamentos

En los problemas 1-6, calcule la suma de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ para la partición dada. Especifique $\|P\|$.

1. $f(x) = 3x + 1$, $[0, 3]$, cuatro subintervalos; $x_0 = 0, x_0 = 1, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{7}{3}, x_4 = 3$; $x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = \frac{4}{3}, x_3^* = 2, x_4^* = \frac{8}{3}$

2. $f(x) = x - 4$, $[-2, 5]$, cinco subintervalos; $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 3, x_5 = 5$; $x_1^* = -\frac{3}{2}, x_2^* = -\frac{1}{2}, x_3^* = 0, x_4^* = 2, x_5^* = 4$

3. $f(x) = x^2$, $[-1, 1]$ cuatro subintervalos: $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$; $x_1^* = -\frac{3}{4}, x_2^* = 0, x_3^* = \frac{1}{2}, x_4^* = \frac{7}{8}$

4. $f(x) = x^2 + 1$, $[1, 3]$, tres subintervalos; $x_0 = 1, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{5}{2}, x_3 = 3$; $x_1^* = \frac{5}{4}, x_2^* = \frac{7}{4}, x_3^* = 3$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, 2\pi]$, tres subintervalos; $x_0 = 0, x_1 = \pi, x_2 = 3\pi/2, x_3 = 2\pi$; $x_1^* = \pi/2, x_2^* = 7\pi/6, x_3^* = 7\pi/4$

6. $f(x) = \cos x$, $[-\pi/2, \pi/2]$, cuatro subintervalos; $x_0 = -\pi/2, x_1 = -\pi/4, x_2 = 0, x_3 = \pi/3, x_4 = \pi/2$; $x_1^* = -\pi/3, x_2^* = -\pi/6, x_3^* = \pi/4, x_4^* = \pi/3$

7. Dada $f(x) = x - 2$ sobre $[0, 5]$, calcule la suma de Riemann usando una partición con cinco subintervalos de la misma longitud. Sea x_k^*, $k = 1, 2, \ldots, 5$, el punto fronterizo derecho de cada subintervalo.

8. Dada $f(x) = x^2 - x + 1$ sobre $[0, 1]$, calcule la suma de Riemann usando una partición con tres subintervalos de la misma longitud. Sea x_k^*, $k = 1, 2, 3$, el punto fronterizo izquierdo de cada subintervalo.

En los problemas 9 y 10, sea P una partición del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Escriba las sumas dadas como una integral definida sobre el intervalo indicado.

9. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{9 + (x_k^*)^2}\,\Delta x_k$; $[-2, 4]$

10. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\tan x_k^*)\Delta x_k$; $[0, \pi/4]$

En los problemas 11 y 12, sean P una partición regular del intervalo indicado y x_k^* el punto fronterizo de cada subintervalo. Escriba la suma dada como una integral definida.

11. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$; $[0, 2]$

12. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{3k}{n}\right)^3 \frac{3}{n}$; $[1, 4]$

En los problemas 13-18, use (5) y las fórmulas de suma en el teorema 1.1.2 para evaluar la integral definida dada.

13. $\int_{-3}^{1} x\,dx$

14. $\int_{0}^{3} x\,dx$

15. $\int_{1}^{2} (x^2 - x)\,dx$

16. $\int_{-2}^{3} (x^2 - 4)\,dx$

17. $\int_{0}^{1} (x^3 - 1)\,dx$

18. $\int_{0}^{2} (3 - x^3)\,dx$

En los problemas 19 y 20, proceda como en los problemas 13-18 para obtener el resultado dado.

19. $\int_{a}^{b} x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

20. $\int_{a}^{b} x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

21. Use el problema 19 para evaluar $\int_{-1}^{3} x\,dx$.

22. Use el problema 20 para evaluar $\int_{-1}^{3} x^2\,dx$.

En los problemas 23 y 24, use el teorema 1.2.6 para evaluar la integral definida dada.

23. $\int_{3}^{6} 4\,dx$

24. $\int_{-2}^{5} (-2)\,dx$

En los problemas 25-38, use la definición del teorema 1.2.2 y los teoremas 1.2.4, 1.2.5 y 1.2.6 para evaluar la integral definida dada. Donde sea idóneo, use los resultados obtenidos en los problemas 21 y 22.

25. $\int_{4}^{-2} \frac{1}{2}\,dx$

26. $\int_{5}^{5} 10x^4\,dx$

27. $-\int_{3}^{-1} 10x\,dx$

28. $\int_{-1}^{3} (3x + 1)\,dx$

29. $\int_{3}^{-1} t^2\,dt$

30. $\int_{-1}^{3} (3x^2 - 5)\,dx$

31. $\displaystyle\int_{-1}^{3} (-3x^2 + 4x - 5)\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_{-1}^{3} 6x(x-1)\,dx$

33. $\displaystyle\int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{3} x^2\,dx$ **34.** $\displaystyle\int_{-1}^{1.2} 2t\,dt - \int_{3}^{1.2} 2t\,dt$

35. $\displaystyle\int_{0}^{4} x\,dx + \int_{0}^{4} (9-x)\,dx$

36. $\displaystyle\int_{-1}^{0} t^2\,dt + \int_{0}^{2} x^2\,dx + \int_{2}^{3} u^2\,du$

37. $\displaystyle\int_{0}^{3} x^3\,dx + \int_{3}^{0} t^3\,dt$

38. $\displaystyle\int_{-1}^{-1} 5x\,dx \quad \int_{3}^{-1} (x-4)\,dx$

En los problemas 39-42, evalúe la integral definida usando la información dada.

39. $\displaystyle\int_{2}^{5} f(x)\,dx$ si $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 6$ y $\displaystyle\int_{0}^{5} f(x)\,dx = 8.5$

40. $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,dx$ si $\displaystyle\int_{1}^{4} f(x)\,dx = 2.4$ y $\displaystyle\int_{3}^{4} f(x)\,dx = -1.7$

41. $\displaystyle\int_{-1}^{2} [2f(x) + g(x)]\,dx$ si

$\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 3.4$ y $\displaystyle\int_{-1}^{2} 3g(x)\,dx = 12.6$

42. $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(x)\,dx$ si

$\displaystyle\int_{2}^{-2} f(x)\,dx = 14$ y $\displaystyle\int_{-2}^{2} [f(x) - 5g(x)]\,dx = 24$

En los problemas 43 y 44, evalúe las integrales definidas

a) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_{b}^{c} f(x)\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_{c}^{d} f(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_{a}^{c} f(x)\,dx$ *e)* $\displaystyle\int_{b}^{d} f(x)\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_{a}^{d} f(x)\,dx$

usando la información en la figura dada.

43.

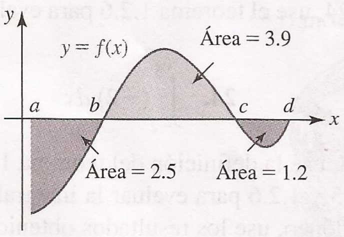


FIGURA 1.2.14 Gráfica para el problema 43

44.

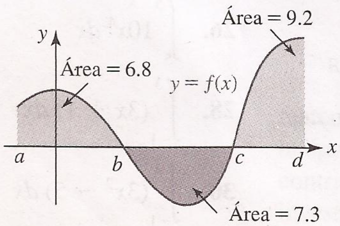


FIGURA 1.2.15 Gráfica para el problema 44

En los problemas 45-48, la integral dada representa el área bajo una gráfica sobre un intervalo dado. Trace esta región.

45. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2x+3)\,dx$ **46.** $\displaystyle\int_{0}^{4} (-x^2 + 4x)\,dx$

47. $\displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ **48.** $\displaystyle\int_{-2}^{0} \sqrt{x+2}\,dx$

En los problemas 49-52, la integral dada representa el área bajo una gráfica sobre un intervalo dado. Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar el área.

49. $\displaystyle\int_{-2}^{4} (x+2)\,dx$ **50.** $\displaystyle\int_{0}^{3} |x-1|\,dx$

51. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ **52.** $\displaystyle\int_{-3}^{3} \left(2 + \sqrt{9-x^2}\right)dx$

En los problemas 53-56, la integral dada representa la siguiente área con signo entre una gráfica y el eje x sobre un intervalo. Trace esta región.

53. $\displaystyle\int_{0}^{5} (-2x+6)\,dx$ **54.** $\displaystyle\int_{-1}^{2} (1-x^2)\,dx$

55. $\displaystyle\int_{-1/2}^{3} \frac{4x}{x+1}\,dx$ **56.** $\displaystyle\int_{0}^{5\pi/2} \cos x\,dx$

En los problemas 57-60, la integral dada representa el área con signo entre una gráfica y el eje x sobre un intervalo. Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar el área neta con signo.

57. $\displaystyle\int_{-1}^{4} 2x\,dx$ **58.** $\displaystyle\int_{0}^{8} \left(\frac{1}{2}x - 2\right)dx$

59. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)dx$ **60.** $\displaystyle\int_{-1}^{2} (1-|x|)\,dx$

En los problemas 61-64, la función f se define como

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 3 \\ 3, & x > 3. \end{cases}$$

Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar la integral definida dada.

61. $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ **62.** $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

63. $\displaystyle\int_{-4}^{5} f(x)\,dx$ **64.** $\displaystyle\int_{0}^{10} f(x)\,dx$

En los problemas 65-68, use el teorema 1.2.7 para establecer la desigualdad dada.

65. $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^{x}\,dx \le \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx$

66. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx \ge 0$

67. $\displaystyle 1 \le \int_{0}^{1} (x^3+1)^{1/2}\,dx \le 1.42$

68. $\displaystyle -2 \le \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx \le 0$

En los problemas 69 y 70, compare las dos integrales dadas por medio de un símbolo de desigualdad ≤ o ≥.

69. $\int_0^1 x^2\,dx, \quad \int_0^1 x^3\,dx$

70. $\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \sqrt{4+x}\,dx$

☰ Piense en ello

71. Si f es integrable sobre el intervalo $[a, b]$, entonces también lo es f^2. Explique por qué $\int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$.

72. Considere la función definida para toda x en el intervalo $[-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

Demuestre que f no es integrable sobre $[-1, 1]$, es decir, $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ no existe. [*Sugerencia*: El resultado en (11) puede ser útil.]

73. Evalúe la integral definida $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ usando una partición de $[0, 1]$ donde los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ están definidos por $[(k-1)^2/n^2, k^2/n^2]$ y escogiendo x_k^* como el punto fronterizo derecho de cada subintervalo.

74. Evalúe la integral definida $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ usando una partición regular de $[0, \pi/2]$ y escogiendo x_k^* como el punto medio de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Use los resultados conocidos

i) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta = \dfrac{\operatorname{sen} 2n\theta}{2\operatorname{sen}\theta}$

ii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\operatorname{sen}(\pi/4n)} = \dfrac{4}{\pi}$.

1.3 La antiderivada (integral indefinida)

Introducción En un curso básico de cálculo diferencial se aborda el problema básico:

- Dada una función f, encontrar su derivada f'.

En esta unidad y en las subsecuentes veremos cuán importante es el problema de:

- Dada una función f, encontrar una función F cuya derivada sea f.

En otras palabras, para una función dada f, ahora pensamos en f como una derivada. Deseamos encontrar una función F cuya derivada sea f; es decir, $F'(x) = f(x)$ para toda x en algún intervalo. Planteado en términos generales, es necesario diferenciar en reversa.

Empezamos con una definición.

Definición 1.3.1 Antiderivada

Se dice que una función F es una **antiderivada** de una función f sobre algún intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

EJEMPLO 1 Una antiderivada

Una antiderivada de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2$, puesto que $F'(x) = 2x$. ■

Una función siempre tiene más de una antiderivada. Así, en el ejemplo anterior, $F_1(x) = x^2 - 1$ y $F_2(x) = x^2 + 10$ también son antiderivadas de $f(x) = 2x$, puesto que $F_1'(x) = F_2'(x) = 2x$.

A continuación demostraremos que cualquier antiderivada de f debe ser de la forma $G(x) = F(x) + C$; es decir, *dos antiderivadas de la misma función pueden diferir a lo más en una constante*. Por tanto, $F(x) + C$ es *la antiderivada más general* de $f(x)$.

Teorema 1.3.1 Las antiderivadas difieren por una constante

Si $G'(x) = F'(x)$ para toda x en algún intervalo $[a, b]$, entonces

$$G(x) = F(x) + C$$

para toda x en el intervalo.

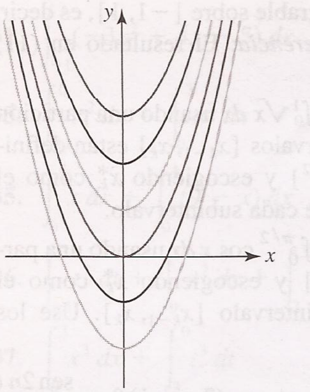


FIGURA 1.3.1 Algunos miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = 2x$

DEMOSTRACIÓN Suponga que se define $g(x) = G(x) - F(x)$. Entonces, puesto que $G'(x) = F'(x)$, se concluye que $g'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$. Si x_1 y x_2 son dos números cualesquiera que satisfacen $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, por el teorema del valor medio se concluye que en el intervalo abierto (x_1, x_2) existe un número k para el cual

$$g'(k) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{o} \quad g(x_2) - g(x_1) = g'(k)(x_2 - x_1).$$

Pero $g'(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$; en particular, $g'(k) = 0$. Por tanto, $g(x_2) - g(x_1) = 0$ o $g(x_2) = g(x_1)$. Luego, por hipótesis, x_1 y x_2 son dos números arbitrarios, pero diferentes, en el intervalo. Puesto que los valores funcionales $g(x_1)$ y $g(x_2)$ son iguales, debe concluirse que la función $g(x)$ es una constante C. Por tanto, $g(x) = C$ implica $G(x) - F(x) = C$ o $G(x) = F(x) + C$. ■

La notación $F(x) + C$ representa una *familia de funciones*; cada miembro tiene una derivada igual a $f(x)$. Volviendo al ejemplo 1, la antiderivada más general de $f(x) = 2x$ es la familia $F(x) = x^2 + C$. Como se ve en la FIGURA 1.3.1, la gráfica de la antiderivada de $f(x) = 2x$ es una traslación vertical de la gráfica de x^2.

EJEMPLO 2 Antiderivadas más generales

a) Una antiderivada de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x$ puesto que $F'(x) = 2x + 5$. La antiderivada más general de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x + C$.

b) Una antiderivada de $f(x) = \sec^2 x$ es $F(x) = \tan x$ puesto que $F'(x) = \sec^2 x$. La antiderivada más general de $f(x) = \sec^2 x$ es $F(x) = \tan x + C$. ■

Notación de la integral indefinida Por conveniencia, se introducirá la notación para una antiderivada de una función. Si $F'(x) = f(x)$, la antiderivada más general de f se representa por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

El símbolo $\int$ fue introducido por Leibniz y se denomina **signo integral**. La notación $\int f(x)\,dx$ se denomina **integral indefinida** de $f(x)$ respecto a x. La función $f(x)$ se denomina **integrando**. El proceso de encontrar una antiderivada se denomina **antidiferenciación** o **integración**. El número C se denomina **constante de integración**. Justo como $\frac{d}{dx}(\ )$ denota la operación de diferenciación de ( ) *con respecto a* x, el simbolismo $\int (\ )\,dx$ denota la operación de integración de ( ) *con respecto a* x.

La diferenciación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas. Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, entonces F es la antiderivada de f; es decir, $F'(x) = f(x)$ y así

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C. \tag{1}$$

Además,
$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) = f(x) \tag{2}$$

En palabras, (1) y (2) son, respectivamente:

- Una antiderivada de la derivada de una función es esa función más una constante.
- La derivada de una antiderivada de una función es esa función.

A partir de lo anterior se concluye que siempre que se obtiene la derivada de una función, al mismo tiempo se obtiene una fórmula de integración. Por ejemplo, debido a (1), si

Este primer resultado sólo es válido si $n \neq -1$. ▶

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,dx = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\ln|x|\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x\, dx = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C,$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\tan^{-1} x\, dx = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1} x + C.$$

De esta manera es posible construir una fórmula de integración a partir de cada fórmula de derivada. En la TABLA 1.3.1 se resumen *algunas* fórmulas de derivadas importantes para las funciones que se han estudiado hasta el momento, así como sus fórmulas de integración análogas.

Con respecto a la entrada 3 de la tabla 1.3.1, es cierto que las fórmulas de derivadas

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\log_b x}{\ln b} = \frac{1}{x}$$

significan que *una* antiderivada de $1/x = x^{-1}$ puede tomarse como $\ln x$, $x > 0$, $\ln|x|$, $x \neq 0$, o $\log_b x/\ln b$, $x > 0$. Pero como resultado más general y útil escribimos

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C.$$

Observe también que en la tabla 1.3.1 sólo se proporcionan tres fórmulas que implican funciones trigonométricas inversas. Esto se debe a que, en forma de integral indefinida, las tres fórmulas restantes son redundantes. Por ejemplo, de las derivadas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

observamos que es posible tomar

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C \quad \text{o} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\cos^{-1} x + C.$$

Observaciones semejantes se cumplen para la cotangente inversa y la cosecante inversa.

TABLA 1.3.1

Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración	Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración
1. $\frac{d}{dx}x = 1$	$\int dx = x + C$	**10.** $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$
2. $\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n\,(n \neq -1)$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	**11.** $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + C$
3. $\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	**12.** $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}\lvert x\rvert + C$
4. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen}x + C$	**13.** $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$, $(b > 0, b \neq 1)$	$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$
5. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen}x$	$\int \operatorname{sen}x\,dx = -\cos x + C$	**14.** $\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
6. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	**15.** $\frac{d}{dx}\operatorname{senh}x = \cosh x$	$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh}x + C$
7. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	**16.** $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh}x$	$\int \operatorname{senh}x\,dx = \cosh x + C$
8. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$	$\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C$		
9. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x$	$\int \csc x\cot x\,dx = -\csc x + C$		

EJEMPLO 3 Una antiderivada simple pero importante

La fórmula de integración en la entrada 1 en la tabla 1.3.1 se incluye para recalcar:

$$\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C \quad \text{ya que} \quad \frac{d}{dx}(x + C) = 1 + 0 = 1.$$

Este resultado también puede obtenerse a partir de la fórmula de integración 2 de la tabla 1.3.1 con $n = 0$. ■

A menudo es necesario volver a escribir el integrando $f(x)$ antes de realizar la integración.

EJEMPLO 4 Cómo volver a escribir un integrando

Evalúe

$$a) \int \frac{1}{x^5}\, dx \quad \text{y} \quad b) \int \sqrt{x}\, dx.$$

Solución

a) Al volver a escribir $1/x^5$ como x^{-5} e identificar $n = -5$, por la fórmula de integración 2 de la tabla 1.3.1 tenemos:

$$\int x^{-5}\, dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = -\frac{x^{-4}}{4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C.$$

b) Primero volvemos a escribir el radical $\sqrt{x}$ como $x^{1/2}$ y luego se usa la fórmula de integración 2 de la tabla 1.3.1 con $n = \frac{1}{2}$:

$$\int x^{1/2}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C.$$ ■

Debe tomarse en cuenta que los *resultados de la integración siempre pueden comprobarse por diferenciación*; por ejemplo, en el inciso *b*) del ejemplo 4:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{3/2-1} = x^{1/2} = \sqrt{x}.$$

En el siguiente teorema se proporcionan algunas propiedades de la integral indefinida.

Teorema 1.3.2 Propiedades de la integral indefinida

Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Entonces

i) $\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx = kF(x) + C$, donde k es cualquier constante,

ii) $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx = F(x) \pm G(x) + C.$

Estas propiedades se concluyen de inmediato a partir de las propiedades de la derivada. Por ejemplo, *ii*) es una consecuencia del hecho de que la derivada de una suma es la suma de las derivadas.

Observe en el teorema 1.3.2*ii*) que no hay razón para usar dos constantes de integración, puesto que

$$\begin{aligned}\int [f(x) \pm g(x)]\, dx &= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) \\ &= F(x) \pm G(x) + (C_1 \pm C_2) = F(x) \pm G(x) + C,\end{aligned}$$

donde $C_1 \pm C_2$ se ha sustituido por la simple constante C.

Una integral indefinida de cualquier suma infinita de funciones la podemos obtener al integrar cada término.

EJEMPLO 5 Uso del teorema 1.3.2

Evalúe $\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5 \operatorname{sen} x\right) dx$.

Solución Por los incisos *i*) y *ii*) del teorema 1.3.2, esta integral indefinida puede escribirse como tres integrales:

$$\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5 \operatorname{sen} x\right) dx = 4\int x\,dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx + 5\int \operatorname{sen} x\,dx.$$

Debido a las fórmulas de integración 2, 3 y 5 en la tabla 1.3.1, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5 \operatorname{sen} x\right) dx &= 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \ln|x| + 5 \cdot (-\cos x) + C \\ &= 2x^2 - 2\ln|x| - 5\cos x + C.\end{aligned}$$

■

Uso de la división Escribir un integrando en forma más manejable algunas veces conlleva a una división. La idea se ilustra con los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 6 División término por término

Evalúe $\int \frac{6x^3 - 5}{x}\,dx$.

Solución Por la división término por término, el teorema 1.3.2 y las fórmulas de integración 2 y 3 de la tabla 1.3.1 tenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^3 - 5}{x}\,dx &= \int \left(\frac{6x^3}{x} - \frac{5}{x}\right) dx \\ &= \int \left(6x^2 - \frac{5}{x}\right) dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \ln|x| + C = 2x^3 - 5\ln|x| + C.\end{aligned}$$

■

◀ Si el concepto de común denominador

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

se lee de derecha a izquierda, se está realizando "división término por término".

Para resolver el problema de evaluar $\int f(x)\,dx$, donde $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional, a continuación se resume una regla práctica que debe tomarse en cuenta en esta subsección y en la subsección subsecuente.

Integración de una función racional

Suponga que $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional. Si el grado de la función polinomial $p(x)$ es mayor que o igual al grado de la función polinomial $q(x)$, use división larga antes de integrar; es decir, escriba

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \text{un polinomio} + \frac{r(x)}{q(x)},$$

donde el grado del polinomio $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$.

EJEMPLO 7 División larga

Evalúe $\int \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx$.

Solución Puesto que el grado del numerador del integrando es igual al grado del denominador, se efectúa la división larga:

$$\frac{x^2}{1 + x^2} = 1 - \frac{1}{1 + x^2}.$$

Por *ii*) del teorema 1.3.2 y las fórmulas de integración 1 y 11 en la tabla 1.3.1 obtenemos

$$\int \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx = x - \tan^{-1} x + C.$$

■

Ecuaciones diferenciales En términos generales, una ecuación diferencial es una ecuación que implica las derivadas o el diferencial de una función desconocida. Las ecuaciones diferenciales se clasifican según el **orden** de la derivada más alta que aparece en la ecuación. El objetivo consiste en *resolver* ecuaciones diferenciales. Una **ecuación diferencial de primer orden** de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{3}$$

puede resolverse usando integración indefinida. Por (1) se ve que

$$\int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = y.$$

Así, la solución de (3) es la antiderivada más general de g; es decir,

$$y = \int g(x)\, dx. \tag{4}$$

EJEMPLO 8 Resolución de una ecuación diferencial

Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica pase por el punto (1, 2) y también satisfaga la ecuación diferencial $dy/dx = 3x^2 - 3$.

Solución Por (3) y (4) se concluye que si

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 \qquad \text{entonces} \qquad y = \int (3x^2 - 3)\, dx.$$

Es decir,
$$y = \int (3x^2 - 3)\, dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot x + C$$

o bien, $y = x^3 - 3x + C$. Así, cuando $x = 1$, $y = 2$, de modo que $2 = 1 - 3 + C$ o $C = 4$. Por tanto, $y = x^3 - 3x + 4$. Entonces, de la familia de antiderivadas de $3x^2 - 3$ que se muestra en la FIGURA 1.3.2, se ve que sólo hay una cuya gráfica pasa por (1, 2). ■

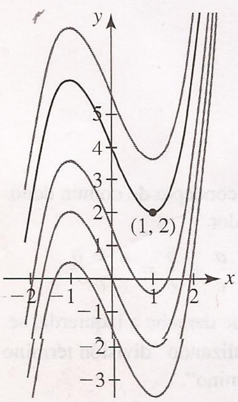


FIGURA 1.3.2 La curva que pasa por (1, 2) es la gráfica de la solución del problema en el ejemplo 8

Al resolver una ecuación diferencial como $dy/dx = 3x^2 - 3$ en el ejemplo 8, la condición lateral especificada de que la gráfica pase por (1, 2), es decir, $f(1) = 2$, se denomina **condición inicial**. Una condición inicial como ésta suele escribirse como $y(1) = 2$. La solución $y = x^3 - 3x + 4$ que fue determinada por la familia de soluciones $y = x^3 - 3x + C$ por la condición inicial se denomina **solución particular**. El problema de resolver (3) sujeto a una condición inicial,

$$\frac{dy}{dx} = g(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

se denomina **problema con valor inicial**.

Observamos que una ecuación diferencial de orden n-ésimo de la forma $d^ny/dx^n = g(x)$ puede resolverse al integrar n veces consecutivas la función $g(x)$. En este caso, la familia de soluciones contiene n constantes de integración.

EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación diferencial

Encuentre una función $y = f(x)$ tal que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1$.

Solución La ecuación diferencial dada se integra dos veces consecutivas. Con la primera integración se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2}\, dx = \int 1 \cdot dx = x + C_1.$$

Con la segunda integración se obtiene $y = f(x)$:

$$y = \int \frac{dy}{dx}\, dx = \int (x + C_1)\, dx = \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2. \qquad ■$$

∫ NOTAS DESDE EL AULA

A menudo, a los estudiantes se les dificulta más calcular antiderivadas que derivadas. Dos palabras de advertencia. Primero, debe tenerse mucho cuidado con el procedimiento algebraico, especialmente con las leyes de los exponentes. La segunda advertencia ya se ha planteado, aunque vale la pena repetirla: tenga en cuenta que *los resultados de la integración indefinida siempre pueden comprobarse*. En un cuestionario o en un examen vale la pena que dedique unos minutos de su valioso tiempo para comprobar su respuesta al tomar la derivada. A veces esto puede hacerse mentalmente. Por ejemplo,

integración

$$\int \boxed{x^2}\,dx = \boxed{\frac{x^3}{3}} + C$$

compruebe por diferenciación

1.3 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-2.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe la integral indefinida dada.

1. $\int 3\,dx$ **2.** $\int (\pi^2 - 1)\,dx$

3. $\int x^5\,dx$ **4.** $\int 5x^{1/4}\,dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ **6.** $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

7. $\int (1 - t^{-0.52})\,dt$ **8.** $\int 10w\sqrt{w}\,dw$

9. $\int (3x^2 + 2x - 1)\,dx$ **10.** $\int \left(2\sqrt{t} - t - \frac{9}{t^2}\right) dt$

11. $\int \sqrt{x}(x^2 - 2)\,dx$ **12.** $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{s^2}} + \frac{2}{\sqrt{s^3}}\right) ds$

13. $\int (4x + 1)^2\,dx$ **14.** $\int (\sqrt{x} - 1)^2\,dx$

15. $\int (4w - 1)^3\,dw$ **16.** $\int (5u - 1)(3u^3 + 2)\,du$

17. $\int \frac{r^2 - 10r + 4}{r^3}\,dr$ **18.** $\int \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

19. $\int \frac{x^{-1} - x^{-2} + x^{-3}}{x^2}\,dx$ **20.** $\int \frac{t^3 - 8t + 1}{(2t)^4}\,dt$

21. $\int (4\operatorname{sen} x - 1 + 8x^{-5})\,dx$ **22.** $\int (-3\cos x + 4\sec^2 x)\,dx$

23. $\int \csc x(\csc x - \cot x)\,dx$ **24.** $\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,dt$

25. $\int \frac{2 + 3\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$ **26.** $\int \left(40 - \frac{2}{\sec\theta}\right) d\theta$

27. $\int (8x + 1 - 9e^x)\,dx$ **28.** $\int (15x^{-1} - 4\operatorname{senh} x)\,dx$

29. $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 4}{1 + x^2}\,dx$ **30.** $\int \frac{x^6}{1 + x^2}\,dx$

En los problemas 31 y 32, use una identidad trigonométrica para evaluar la integral indefinida dada.

31. $\int \tan^2 x\,dx$ **32.** $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$

En los problemas 33-40, use diferenciación y la regla de la cadena para comprobar el resultado de integración dado.

33. $\int \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}\,dx = \sqrt{2x + 1} + C$

34. $\int (2x^2 - 4x)^9(x - 1)\,dx = \frac{1}{40}(2x^2 - 4x)^{10} + C$

35. $\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + C$

36. $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$

37. $\int x\operatorname{sen} x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

38. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + C$

39. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

40. $\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$

En los problemas 41 y 42, efectúe las operaciones indicadas.

41. $\frac{d}{dx}\int (x^2 - 4x + 5)\,dx$ **42.** $\int \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 5)\,dx$

En los problemas 43-48, resuelva la ecuación diferencial dada.

43. $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2 + 9$

44. $\dfrac{dy}{dx} = 10x + 3\sqrt{x}$

45. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2}$

46. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2 + x)^2}{x^5}$

47. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - 2x + \operatorname{sen} x$

48. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

49. Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica pase por el punto (2, 3) y que también satisfaga la ecuación diferencial $dy/dx = 2x - 1$.

50. Encuentre una función $y = f(x)$ de modo que $dy/dx = 1/\sqrt{x}$ y $f(9) = 1$.

51. Si $f''(x) = 2x$, encuentre $f'(x)$ y $f(x)$.

52. Encuentre una función f tal que $f''(x) = 6$, $f'(-1) = 2$ y $f(-1) = 0$.

53. Encuentre una función f tal que $f''(x) = 12x^2 + 2$ para la cual la pendiente de la recta tangente a su gráfica en (1, 1) es 3.

54. Si $f^{(n)}(x) = 0$, ¿cuál es f?

En los problemas 55 y 56 se muestra la gráfica de una función f. De las gráficas de las funciones F, G y H, ¿cuál función es la gráfica de una antiderivada de f? Justifique su razonamiento.

55.

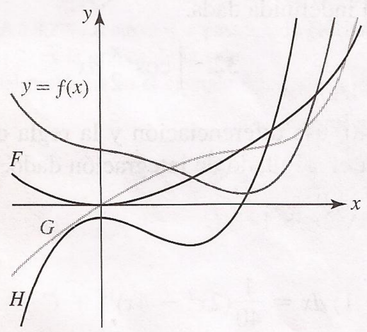


FIGURA 1.3.3 Gráficas para el problema 55

56.

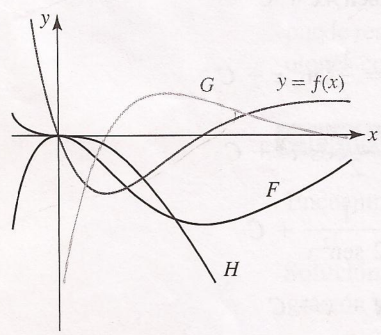


FIGURA 1.3.4 Gráficas para el problema 56

≡ Aplicaciones

57. Un cubo que contiene un líquido gira alrededor de un eje vertical a velocidad angular constante ω. La forma de la sección transversal del líquido giratorio en el plano xy está determinada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x.$$

Con ejes de coordenadas como se muestra en la FIGURA 1.3.5, encuentre $y = f(x)$.

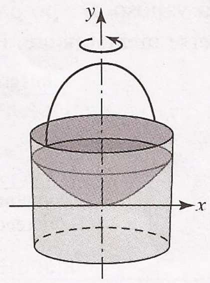


FIGURA 1.3.5 Cubo en el problema 57

58. Los extremos de una viga de longitud L están sobre dos soportes como se muestra en la FIGURA 1.3.6. Con una carga uniforme sobre la viga, su forma (o curva elástica) está determinada a partir de

$$EIy'' = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2,$$

donde E, I y q son constantes. Encuentre $y = f(x)$ si $f(0) = 0$ y $f'(L/2) = 0$.

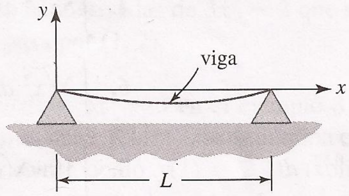


FIGURA 1.3.6 Viga en el problema 58

≡ Piense en ello

En los problemas 59 y 60, determine f.

59. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \ln|\ln x| + C$

60. $\displaystyle\int f(x)\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

61. Encuentre una función f tal que $f'(x) = x^2$ y $y = 4x + 7$ sea una recta tangente a la gráfica de f.

62. Simplifique la expresión $e^{4\int dx/x}$ tanto como sea posible.

63. Determine cuál de los dos resultados siguientes es correcto:

$$\int (x + 1)^3\,dx = \frac{1}{4}(x + 1)^4 + C$$

o

$$\int (x + 1)^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C.$$

64. Dado que $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} \pi x = \pi \cos \pi x$, encuentre una antiderivada F de $\cos \pi x$ que tenga la propiedad de que $F\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

1.4 Integración por sustitución u

Introducción En la sección anterior se analizó el hecho de que para cada fórmula para la derivada de una función hay una fórmula de antiderivada o integral indefinida correspondiente. Por ejemplo, al interpretar cada una de las funciones

$$x^n \quad (n \neq -1), \qquad x^{-1} \qquad \text{y} \qquad \cos x$$

como una antiderivada, se encuentra que la "reversa de la derivada" correspondiente es una familia de antiderivadas:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C. \tag{1}$$

En la siguiente exposición se analiza la "reversa de la regla de la cadena". En este análisis, el concepto de **diferencial** de una función desempeña un papel importante. Recuerde que si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces su diferencial es $du = g'(x)\,dx$.

Se empieza con un ejemplo.

Potencia de una función Si deseamos encontrar una función F tal que

$$\int (5x+1)^{1/2}\,dx = F(x) + C,$$

debemos tener

$$F'(x) = (5x+1)^{1/2}.$$

Al razonar "hacia atrás", podemos argumentar que para obtener $(5x+1)^{1/2}$ necesitamos haber diferenciado $(5x+1)^{3/2}$. Entonces, parecería que es posible proceder como en la primera fórmula en (1); a saber: incrementar la potencia por 1 y dividir entre la nueva potencia:

$$\int (5x+1)^{1/2}\,dx = \frac{(5x+1)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + C. \tag{2}$$

Lamentablemente, la "respuesta" en (2) no concuerda, puesto que con la regla de la cadena, en la forma de la regla de potencias para funciones, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + C\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(5x+1)^{1/2}\cdot 5 = 5(5x+1)^{1/2} \neq (5x+1)^{1/2}. \tag{3}$$

Para tomar en cuenta el factor 5 faltante en (2) usamos el teorema 1.3.2*i*) y un poco de perspicacia:

$$\begin{aligned}
\int (5x+1)^{1/2}\,dx &= \int (5x+1)^{1/2}\boxed{\frac{1}{5}\cdot 5}\,dx \leftarrow \frac{5}{5} = 1\\
&= \frac{1}{5}\int \boxed{(5x+1)^{1/2}\,5}\,dx \leftarrow \text{derivada de } \frac{2}{3}(5x+1)^{3/2}\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + C \leftarrow \text{por (3)}\\
&= \frac{2}{15}(5x+1)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Ahora, usted debe comprobar por diferenciación que la última función es, en efecto, una antiderivada de $(5x+1)^{1/2}$.

La clave para evaluar integrales indefinidas como

$$\int (5x+1)^{1/2}\,dx, \qquad \int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int \operatorname{sen} 10x\,dx \tag{4}$$

reside en el *reconocimiento* de que los integrandos en (4),

$$(5x+1)^{1/2}, \qquad \frac{x}{(4x^2+3)^6} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} 10x$$

son resultado de diferenciar una función compuesta por medio de la regla de la cadena. Para hacer este reconocimiento es útil realizar una sustitución en una integral indefinida.

Teorema 1.4.1 Regla de la sustitución u

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I, f es una función continua sobre I y F es una antiderivada de f sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du. \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$$

y entonces por la definición de antiderivada tenemos

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Puesto que F es un antiderivada de f, es decir, si $F' = f$, entonces la línea precedente se vuelve

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du = \int f(u)\,du. \tag{6}$$ ■

La interpretación del resultado en (6) y su resumen en (5) es sutil. En la sección 1.3, el símbolo dx se usó simplemente como un indicador de que la integración es con respecto a la variable x. En (6) observamos que es permisible interpretar dx y du como *diferenciales*.

Uso de la sustitución *u* La idea básica consiste en poder reconocer una integral indefinida en una variable x (como la proporcionada en (4)) que sea la reversa de la regla de la cadena al convertirla en una integral indefinida diferente en la variable u por medio de la sustitución $u = g(x)$. Por conveniencia, a continuación se enumeran algunas directrices para evaluar $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ al efectuar una sustitución u.

Directrices para efectuar una sustitución u

i) En la integral $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ identifique las funciones $g(x)$ y $g'(x)\,dx$.

ii) Exprese la integral *totalmente* en términos del símbolo u al sustituir u y du por $g(x)$ y $g'(x)\,dx$ respectivamente. En la sustitución no debe haber variables x; déjelas en la integral.

iii) Efectúe la integración con respecto a la variable u.

iv) Finalmente, vuelva a sustituir $g(x)$ por el símbolo u.

Integral indefinida de la potencia de una función La derivada de la potencia de una función era un caso especial de la regla de la cadena. Recuerde que si $F(x) = x^{n+1}/(n+1)$, donde n es un número real, $n \neq -1$ y si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$F(g(x)) = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}F(g(x)) = [g(x)]^n g'(x).$$

Entonces, por el teorema 1.4.1 de inmediato se deduce que

$$\int [g(x)]^n g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C. \tag{7}$$

En términos de sustituciones

$$u = g(x) \qquad \text{y} \qquad du = g'(x)\,dx,$$

(7) puede resumirse como sigue:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1. \tag{8}$$

En el siguiente ejemplo se evalúa la segunda de las tres integrales indefinidas en (4).

EJEMPLO 1 Uso de (8)

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx$.

Solución La integral vuelve a escribirse como

$$\int (4x^2+3)^{-6}x\,dx$$

y se hace la identificación

$$u = 4x^2+3 \qquad \text{y} \qquad du = 8x\,dx.$$

Luego, para obtener la forma precisa $\int u^{-6}\,du$ es necesario ajustar el integrando al multiplicar y dividir entre 8:

$$\begin{aligned}
\int (4x^2+3)^{-6}x\,dx &= \frac{1}{8}\int \overbrace{(4x^2+3)^{-6}}^{u^{-6}}\overbrace{(8x\,dx)}^{du} \leftarrow \text{sustitución}\\
&= \frac{1}{8}\int u^{-6}\,du \qquad \leftarrow \text{ahora use (8)}\\
&= \frac{1}{8}\cdot\frac{u^{-5}}{-5}+C\\
&= -\frac{1}{40}(4x^2+3)^{-5}+C. \leftarrow \text{otra sustitución}
\end{aligned}$$

Comprobación por diferenciación: Por la regla de potencias para funciones,

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{40}(4x^2+3)^{-5}+C\right] = \left(-\frac{1}{40}\right)(-5)(4x^2+3)^{-6}(8x) = \frac{x}{(4x^2+3)^6}.$$

EJEMPLO 2 Uso de (8)

Evalúe $\displaystyle\int (2x-5)^{11}\,dx$.

Solución Si $u = 2x-5$, entonces $du = 2\,dx$. La integral se ajusta al multiplicar y dividir entre 2 para obtener la forma correcta de la diferencial du:

$$\begin{aligned}
\int (2x-5)^{11}\,dx &= \frac{1}{2}\int \overbrace{(2x-5)^{11}}^{u^{11}}\overbrace{(2\,dx)}^{du} \qquad \leftarrow \text{sustitución}\\
&= \frac{1}{2}\int u^{11}du \qquad \leftarrow \text{ahora use (8)}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{12}}{12}+C\\
&= \frac{1}{24}(2x-5)^{12}+C. \qquad \leftarrow \text{otra sustitución}
\end{aligned}$$

En los ejemplos 1 y 2, el integrando se "arregló" o ajustó al multiplicar y dividir por una constante a fin de obtener la du idónea. Este procedimiento funciona bien si de inmediato se reconoce $g(x)$ en $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ y que a $g'(x)\,dx$ simplemente le falta un múltiplo constante idóneo. El siguiente ejemplo ilustra una técnica algo diferente.

EJEMPLO 3 Uso de (8)

Evalúe $\displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución Para recalcar, volvemos a escribir el integrando como $\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x\,dx$. Una vez que se hace la identificación $u = \cos x$, se obtiene $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Al despejar el producto sen x dx de la última diferencial obtenemos sen $x\,dx = -du$. Luego,

$$\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x\, dx = \int \overbrace{(\cos x)^4}^{u^4} \overbrace{(\operatorname{sen} x\, dx)}^{-du} \leftarrow \text{sustitución}$$

$$= -\int u^4\, du \qquad \leftarrow \text{ahora use (8)}$$

$$= -\frac{u^5}{5} + C$$

$$= -\frac{1}{5}\cos^5 x + C. \qquad \leftarrow \text{otra sustitución}$$

De nuevo, se solicita que el lector diferencie el último resultado. ■

En los ejemplos que restan en esta sección se alternará entre los métodos empleados en los ejemplos 1 y 3.

En un nivel práctico no siempre es evidente que se está tratando con una integral de la forma $\int [g(x)]^n g'(x)\, dx$. Cuando trabaje cada vez más problemas, observará que las integrales no siempre son lo que parecen a primera vista. Por ejemplo, usted debe convencerse de que al usar sustituciones en u la integral $\int \cos^2 x\, dx$ *no* es de la forma $\int [g(x)]^n g'(x)\, dx$. En un sentido más general, en $\int f(g(x))g'(x)\, dx$ no siempre es evidente qué funciones deben escogerse como u y du.

Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces las fórmulas de diferenciación

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(-\cos u) = \operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$$

conducen, a su vez, a las fórmulas de integración

$$\int \cos u \frac{du}{dx}\, dx = \operatorname{sen} u + C \tag{9}$$

y

$$\int \operatorname{sen} u \frac{du}{dx}\, dx = -\cos u + C. \tag{10}$$

Puesto que $du = g'(x)\, dx = \dfrac{du}{dx}\, dx$, (9) y (10) son, respectivamente, equivalentes a

$$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C, \tag{11}$$

$$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C. \tag{12}$$

EJEMPLO 4 Uso de (11)

Evalúe $\displaystyle\int \cos 2x\, dx$.

Solución Si $u = 2x$, entonces $du = 2\, dx$ y $dx = \frac{1}{2}\, du$. En consecuencia, escribimos

$$\int \cos 2x\, dx = \int \cos \overbrace{2x}^{u}\, \overbrace{(dx)}^{\frac{1}{2}du} \leftarrow \text{sustitución}$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos u\, du \qquad \leftarrow \text{ahora use (11)}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C. \leftarrow \text{otra sustitución}$$ ■

Las fórmulas de integración (8), (11) y (12) son los análogos de la regla de la cadena de las fórmulas de integración 2, 4 y 5 en la tabla 1.3.1. En la tabla 1.4.1 que se muestra a continuación se resumen los análogos de la regla de la cadena de las 16 fórmulas de integración de la tabla 1.3.1.

TABLA 1.4.1

Fórmulas de integración

1. $\int du = u + C$	**2.** $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \dfrac{1}{u}\,du = \ln\lvert u\rvert + C$	**4.** $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
5. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$	**6.** $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
7. $\int \csc^2 du = -\cot u + C$	**8.** $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
9. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$	**10.** $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1} u + C$
11. $\int \dfrac{1}{1+u^2}\,du = \tan^{-1} u + C$	**12.** $\int \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,du = \sec^{-1}\lvert u\rvert + C$
13. $\int b^u\,du = \dfrac{b^u}{\ln b} + C$	**14.** $\int e^u\,du = e^u + C$
15. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$	**16.** $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

En otros libros de texto, fórmulas como 3, 10, 11 y 12 en la tabla 1.4.1 suelen escribirse con el diferencial du como numerador:

$$\int \frac{du}{u}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \int \frac{du}{1+u^2}, \quad \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

Pero como a lo largo del tiempo hemos encontrado que estas últimas fórmulas a menudo se malinterpretan en un entorno de aula, aquí se prefieren las formas proporcionadas en la tabla.

EJEMPLO 5 Uso de la tabla 1.4.1

Evalúe $\int \sec^2(1-4x)\,dx$.

Solución Reconocemos que la integral indefinida tiene la forma de la fórmula de integración 6 en la tabla 1.4.1. Si $u = 1 - 4x$, entonces $du = -4\,dx$. Ajustar el integrando para obtener la forma correcta de la diferencial requiere multiplicar y dividir entre -4:

$$\begin{aligned}
\int \sec^2(1-4x)\,dx &= -\frac{1}{4}\int \sec^2(\overbrace{1-4x}^{u})(\overbrace{-4\,dx}^{du}) \\
&= -\frac{1}{4}\int \sec^2 u\,du \quad \leftarrow \text{fórmula 6 en la tabla 1.4.1} \\
&= -\frac{1}{4}\tan u + C \\
&= -\frac{1}{4}\tan(1-4x) + C.
\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 6 Uso de la tabla 1.4.1

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx$.

Solución Si $u = x^3 + 5$, entonces $du = 3x^2\,dx$ y $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx &= \int \frac{1}{x^3+5}(x^2\,dx)\\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du\\ &= \frac{1}{3}\ln|u| + C \quad \leftarrow \text{fórmula 3 en la tabla 1.4.1}\\ &= \frac{1}{3}\ln|x^3+5| + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Vuelta a escribir y uso de la tabla 1.4.1

Evalúe $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\,dx$.

Solución La integral dada no se ve como ninguna de las fórmulas de integración en la tabla 1.4.1. No obstante, si el numerador y el denominador se multiplican por e^{2x}, obtenemos

$$\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Si $u = e^{2x} + 1$, entonces $du = 2e^{2x}\,dx$, de modo que por la fórmula 3 de la tabla 1.4.1,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^{2x}+1}(2e^{2x}\,dx)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C.\end{aligned}$$

Observe que el símbolo de valor absoluto puede eliminarse porque $e^{2x} + 1 > 0$ para todos los valores de x.

EJEMPLO 8 Uso de la tabla 1.4.1

Evalúe $\displaystyle\int e^{5x}\,dx$.

Solución Sea $u = 5x$ de modo que $du = 5\,dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int e^{5x}\,dx &= \frac{1}{5}\int e^{5x}(5\,dx)\\ &= \frac{1}{5}\int e^u\,du \quad \leftarrow \text{fórmula 14 en la tabla 1.4.1}\\ &= \frac{1}{5}e^u + C\\ &= \frac{1}{5}e^{5x} + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Uso de la tabla 1.4.1

Evalúe $\displaystyle\int \frac{e^{4/x}}{x^2}\,dx$.

Solución Si hacemos $u = 4/x$, entonces $du = (-4/x^2)\,dx$ y $(1/x^2)\,dx = -\frac{1}{4}\,du$.

De nuevo a partir de la fórmula 14 de la tabla 1.4.1 observamos que

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{4/x}}{x^2}\,dx &= \int e^{4/x}\left(\frac{1}{x^2}\,dx\right)\\ &= \int e^u\left(-\frac{1}{4}\,du\right)\\ &= -\frac{1}{4}\int e^u\,du\\ &= -\frac{1}{4}e^u + C\\ &= -\frac{1}{4}e^{4/x} + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 10 Uso de la tabla 1.4.1

Evalúe $\displaystyle\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx.$

Solución Como en el ejemplo 7, a primera vista la integral dada no se ve como ninguna de las fórmulas en la tabla 1.4.1. Pero si la sustitución u se intenta con $u = \tan^{-1}x$ y $du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$, entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx &= \int \overbrace{(\tan^{-1}x)^2}^{u}\,\overbrace{\frac{1}{1+x^2}\,dx}^{du}\\ &= \int u^2\,du \quad \leftarrow \text{fórmula 2 en la tabla 1.4.1}\\ &= \frac{u^3}{3} + C\\ &= \frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3 + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 11 Uso de la tabla 1.4.1

Evalúe $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}\,dx.$

Solución Al factorizar 100 del radical e identificar $u = \frac{1}{10}x$ y $du = \frac{1}{10}\,dx$, el resultado se obtiene a partir de la fórmula 10 de la tabla 1.4.1:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{10}\right)^2}}\left(\frac{1}{10}\,dx\right)\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du\\ &= \operatorname{sen}^{-1}u + C\\ &= \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{10} + C.\end{aligned}$$

Tres fórmulas alternas Por razones de conveniencia, las fórmulas de integración 10, 11 y 12 en la tabla 1.4.1 se extienden como sigue. Para $a > 0$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C. \tag{15}$$

Para adquirir práctica, compruebe estos resultados por diferenciación. Observe que la integral indefinida en el ejemplo 11 puede evaluarse rápidamente al identificar $u = x$ y $a = 10$ en (13).

Integrales trigonométricas especiales Las fórmulas de integración que se proporcionan en seguida, que relacionan algunas funciones trigonométricas con el logaritmo natural, a menudo ocurren en la práctica, por lo que merecen atención especial:

En tablas de fórmulas de integrales a menudo observamos (16) escrita como $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$. Por las propiedades de los logaritmos $-\ln|\cos x| = \ln|\cos x|^{-1} = \ln|\sec x|$.

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \tag{16}$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C \tag{17}$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{18}$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C. \tag{19}$$

Para encontrar (16) escribimos

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx \tag{20}$$

y se identifica $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$, de modo que

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx &= -\int \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x\,dx)\\ &= -\int \frac{1}{u}\,du\\ &= -\ln|u| + C\\ &= -\ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

Para obtener (18) escribimos

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \sec x\,\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx\\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx.\end{aligned}$$

Si hacemos $u = \sec x + \tan x$, entonces $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\,dx$ y así,

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \frac{1}{\sec x + \tan x}(\sec^2 x + \sec x \tan x)\,dx\\ &= \int \frac{1}{u}\,du\\ &= \ln|u| + C\\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

También, cada una de las fórmulas (16)-(19) podemos escribirlas en una forma general:

$$\int \tan u\,dx = -\ln|\cos u| + C \tag{21}$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C \tag{22}$$

$$\int \sec u\,dx = \ln|\sec u + \tan u| + C \tag{23}$$

y

$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C. \tag{24}$$

Identidades útiles Cuando se trabaja con funciones trigonométricas, a menudo es necesario usar una identidad trigonométrica para resolver un problema. Las fórmulas de la mitad de un ángulo para el coseno y el seno en la forma

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{25}$$

son particularmente útiles en problemas que requieren antiderivadas de $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$.

EJEMPLO 12 Uso de la fórmula de la mitad de un ángulo

Evalúe $\int \cos^2 x\, dx$.

Solución Es necesario comprobar que la integral *no* es de la forma $\int u^2\, du$. Luego, al usar la fórmula de la mitad de un ángulo $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x(2\, dx)\right] \leftarrow \text{vea el ejemplo 4} \\
&= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right] + C \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.
\end{aligned}$$

Por supuesto, el método ilustrado en el ejemplo 12 funciona igualmente bien para encontrar antiderivadas como $\int \cos^2 5x\, dx$ y $\int \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x\, dx$. Con x sustituida por $5x$ y luego con x sustituida por $\frac{1}{2}x$, las fórmulas en (25) permiten escribir, respectivamente,

$$\int \cos^2 5x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 10x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}\operatorname{sen} 10x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos x)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C.$$

En la unidad 2 abordaremos antiderivadas de potencias más complicadas de funciones trigonométricas.

∫ NOTAS DESDE EL AULA

El siguiente ejemplo ilustra un procedimiento común, pero *totalmente incorrecto*, para evaluar una integral indefinida. Ya que $2x/2x = 1$,

$$\begin{aligned}
\int (4 + x^2)^{1/2}\, dx &= \int (4 + x^2)^{1/2}\frac{2x}{2x}\, dx \\
&= \frac{1}{2x}\int (4 + x^2)^{1/2}\, 2x\, dx \\
&= \frac{1}{2x}\int u^{1/2}\, du \\
&= \frac{1}{2x}\cdot\frac{2}{3}(4 + x^2)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Usted debe comprobar que la diferenciación de la última función *no* produce $(4 + x^2)^{1/2}$. El error está en la primera línea de la "solución". Las variables, en este caso $2x$, no pueden sacarse del símbolo de la integral. Si $u = x^2 + 4$, entonces al integrando le falta la función $du = 2x\, dx$; de hecho, no hay ninguna forma de arreglar el problema para adecuarse a la forma dada en (8). Con las "herramientas" con que contamos en este momento, simplemente no es posible evaluar la integral $\int (4 + x^2)^{1/2}\, dx$.

1.4 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-3.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-50, evalúe la integral indefinida dada usando una sustitución u idónea.

1. $\int \sqrt{1-4x}\,dx$
2. $\int (8x+2)^{1/3}\,dx$
3. $\int \frac{1}{(5x+1)^3}\,dx$
4. $\int (7-x)^{49}\,dx$
5. $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx$
6. $\int \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+9}}\,dt$
7. $\int \operatorname{sen}^5 3x \cos 3x\,dx$
8. $\int \operatorname{sen} 2\theta \cos^4 2\theta\,d\theta$
9. $\int \tan^2 2x \sec^2 2x\,dx$
10. $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x\,dx$
11. $\int \operatorname{sen} 4x\,dx$
12. $\int 5\cos\frac{x}{2}\,dx$
13. $\int \left(\sqrt{2t}-\cos 6t\right)dt$
14. $\int \operatorname{sen}(2-3x)\,dx$
15. $\int x\operatorname{sen} x^2\,dx$
16. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx$
17. $\int x^2\sec^2 x^3\,dx$
18. $\int \csc^2(0.1x)\,dx$
19. $\int \frac{\csc\sqrt{x}\cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
20. $\int \tan 5v \sec 5v\,dv$
21. $\int \frac{1}{7x+3}\,dx$
22. $\int (5x+6)^{-1}\,dx$
23. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$
24. $\int \frac{x^2}{5x^3+8}\,dx$
25. $\int \frac{x}{x+1}\,dx$
26. $\int \frac{(x+3)^2}{x+2}\,dx$
27. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$
28. $\int \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\theta+\cos\theta}\,d\theta$
29. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$
30. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$
31. $\int e^{10x}\,dx$
32. $\int \frac{1}{e^{4x}}\,dx$
33. $\int x^2 e^{-2x^3}\,dx$
34. $\int \frac{e^{1/x^3}}{x^4}\,dx$
35. $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
36. $\int \sqrt{e^x}\,dx$
37. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$
38. $\int e^{3x}\sqrt{1+2e^{3x}}\,dx$
39. $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$
40. $\int \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}}\,dx$
41. $\int \frac{1}{1+25x^2}\,dx$
42. $\int \frac{1}{2+9x^2}\,dx$
43. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$
44. $\int \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^4}}\,d\theta$
45. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
46. $\int \frac{x-8}{x^2+2}\,dx$
47. $\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$
48. $\int \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{1-x^2}}\,dx$
49. $\int \tan 5x\,dx$
50. $\int e^x\cot e^x\,dx$

En los problemas 51-56, use las identidades en (25) para evaluar la integral indefinida dada.

51. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$
52. $\int \cos^2 \pi x\,dx$
53. $\int \cos^2 4x\,dx$
54. $\int \operatorname{sen}^2\frac{3}{2}x\,dx$
55. $\int (3-2\operatorname{sen} x)^2\,dx$
56. $\int (1+\cos 2x)^2\,dx$

En los problemas 57 y 58, resuelva la ecuación diferencial dada.

57. $\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{1-x}$
58. $\frac{dy}{dx}=\frac{(1-\tan x)^5}{\cos^2 x}$

59. Encuentre una función $y=f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $(\pi,-1)$ y también satisfaga $dy/dx = 1 - 6\operatorname{sen} 3x$.

60. Encuentre una función f tal que $f''(x) = (1+2x)^5$, $f(0)=0$ y $f'(0)=0$.

61. Demuestre que:
    a) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C_1$
    b) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2$
    c) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_3$.

62. En el problema 61:
    a) Compruebe que la derivada de cada respuesta en los incisos *a*), *b*) y *c*) es sen x cos x.
    b) Use una identidad trigonométrica para demostrar que el resultado en el inciso *b*) puede obtenerse a partir de la respuesta en el inciso *a*).
    c) Sume los resultados de los incisos *a*) y *b*) para obtener el resultado en el inciso *c*).

≡ Aplicaciones

63. Considere el péndulo plano mostrado en la FIGURA 1.4.1, que oscila entre los puntos A y C. Si B es el punto medio entre A y C, es posible demostrar que

$$\frac{dt}{ds}=\sqrt{\frac{L}{g\left(s_C^2-s^2\right)}},$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad.

a) Si $t(0) = 0$, demuestre que el tiempo necesario para que el péndulo vaya de B a P es

$$t(s) = \sqrt{\frac{L}{g}}\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{s}{s_C}\right).$$

b) Use el resultado del inciso *a*) para determinar el tiempo de recorrido de B a C.

c) Use *b*) para determinar el periodo T del péndulo; es decir, el tiempo para hacer una oscilación de A a C y de regreso a A.

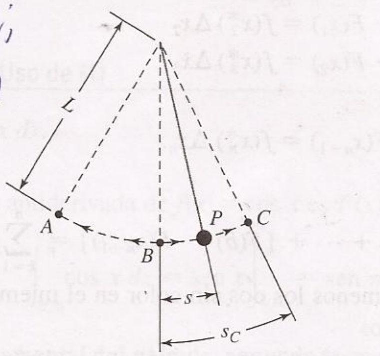


FIGURA 1.4.1 Péndulo en el problema 63

≡ Piense en ello

64. Encuentre una función $y = f(x)$ para la cual $f(\pi/2) = 0$ y $\dfrac{dy}{dx} = \cos^3 x$. [*Sugerencia*: $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x$.]

En los problemas 65 y 66, use las identidades en (25) para evaluar la integral indefinida dada.

65. $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx$ **66.** $\displaystyle\int \mathrm{sen}^4 x\, dx$

En los problemas 67 y 68, evalúe la integral indefinida dada.

67. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4 - 16}}\, dx$ **68.** $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}\, dx$

En los problemas 69 y 70, evalúe la integral indefinida dada.

69. $\displaystyle\int \frac{1}{1 - \cos x}\, dx$ **70.** $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \mathrm{sen}\, 2x}\, dx$

En los problemas 71-74, evalúe la integral indefinida dada. Suponga que f es una función diferenciable.

71. $\displaystyle\int f'(8x)\, dx$ **72.** $\displaystyle\int x f'(5x^2)\, dx$

73. $\displaystyle\int \sqrt{f(2x)}\, f'(2x)\, dx$ **74.** $\displaystyle\int \frac{f'(3x + 1)}{f(3x + 1)}\, dx$

75. Evalúe $\displaystyle\int f''(4x)\, dx$ si $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$.

76. Evalúe $\displaystyle\int \left\{ \int \sec^2 3x\, dx \right\} dx$.

1.5 Teorema fundamental del cálculo

Introducción Al final de la sección 1.2 se indicó que hay una forma más sencilla para evaluar una integral definida que calculando el límite de una suma. Esta "manera más sencilla" se logra por medio del **teorema fundamental del cálculo**. En esta sección verá que hay dos formas de este importante teorema: la primera forma, que se presenta a continuación, permite evaluar muchas integrales definidas.

Teorema fundamental del cálculo: primera forma En el siguiente teorema se ve que el concepto de antiderivada de una función continua constituye el puente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Teorema 1.5.1 Teorema fundamental del cálculo: forma de antiderivada

Si f es una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ y F es una antiderivada de f sobre el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Se presentarán dos demostraciones del teorema 1.5.1. En la demostración que se proporciona se usa la premisa básica de que una integral definida es un límite de una suma. Después que se demuestre la segunda forma del teorema fundamental del cálculo, se volverá al teorema 1.5.1 y se presentará una demostración alterna.

DEMOSTRACIÓN Si F es una antiderivada de f, entonces por definición $F'(x) = f(x)$. Puesto que F es diferenciable sobre (a, b), el teorema del valor medio garantiza que existe un x_k^* en cada subintervalo (x_{k-1}, x_k) de la partición P:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{o} \quad F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Luego, para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ con el último resultado obtenemos

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) &= f(x_1^*)\,\Delta x_1 \\ F(x_2) - F(x_1) &= f(x_2^*)\,\Delta x_2 \\ F(x_3) - F(x_2) &= f(x_3^*)\,\Delta x_3 \\ &\vdots \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= f(x_n^*)\,\Delta x_n. \end{aligned}$$

Si sumamos las columnas precedentes,

$$[F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(b) - F(x_{n-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

vemos que la suma de todos los términos, menos los dos sin color en el miembro izquierdo de la igualdad, es igual a 0, con lo cual tenemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Pero $\lim_{\|P\|\to 0} [F(b) - F(a)] = F(b) - F(a)$, de modo que el límite de (2) cuando $\|P\| \to 0$ es

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k. \tag{3}$$

Por la definición 1.2.1, el miembro derecho de (3) es $\int_a^b f(x)\,dx$. ■

La diferencia $F(b) - F(a)$ en (1) suele representarse por el símbolo $F(x)\Big]_a^b$, es decir,

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\substack{\text{integral}\\ \text{definida}}} = \underbrace{\int f(x)\,dx\,\Big]_a^b}_{\substack{\text{integral}\\ \text{indefinida}}} = F(x)\Big]_a^b.$$

Puesto que el teorema 1.5.1 indica que F es *cualquier* antiderivada de f, siempre es posible escoger la constante de integración C como igual a cero. Observe que si $C \neq 0$, entonces

$$(F(x) + C)\Big]_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(x)\Big]_a^b.$$

EJEMPLO 1 Uso de (1)

En el ejemplo 4 de la sección 1.2 se apeló a la definición más bien larga de integral definida para demostrar que $\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\frac{15}{4}$. Puesto que $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ es una antiderivada de $f(x) = x^3$, a partir de (1) obtenemos inmediatamente

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-2)^4 = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$ ■

EJEMPLO 2 Uso de (1)

Evalúe $\displaystyle\int_1^3 x\,dx$.

Solución Una antiderivada de $f(x) = x$ es $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. En consecuencia, (1) del teorema 1.5.1 proporciona

$$\int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$ ■

EJEMPLO 3 Uso de (1)

Evalúe $\int_{-2}^{2} (3x^2 - x + 1)\, dx$.

Solución Aplicamos *ii*) del teorema 1.3.2 y la fórmula de integración 2 de la tabla 1.3.1 a cada término del integrando, y luego usamos el teorema fundamental:

$$\int_{-2}^{2} (3x^2 - x + 1)\, dx = \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big]_{-2}^{2}$$
$$= (8 - 2 + 2) - (-8 - 2 - 2) = 20. \qquad ■$$

EJEMPLO 4 Uso de (1)

Evalúe $\int_{\pi/6}^{\pi} \cos x\, dx$.

Solución Una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$. En consecuencia,

$$\int_{\pi/6}^{\pi} \cos x\, dx = \operatorname{sen} x \Big]_{\pi/6}^{\pi} = \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \qquad ■$$

Teorema fundamental del cálculo: segunda forma Suponga que f es continua sobre un intervalo $[a, b]$, por lo que se sabe que la integral $\int_a^b f(t)\, dt$ existe. Para toda x en el intervalo $[a, b]$, la integral definida

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{4}$$

representa un solo número. De esta forma, se ve que (4) es una función con dominio $[a, b]$. En la FIGURA 1.5.1 se muestra que f es una función positiva sobre $[a, b]$, y así cuando x varía a través del intervalo es posible interpretar $g(x)$ como un área bajo la gráfica sobre el intervalo $[a, x]$. En la segunda forma del teorema fundamental del cálculo se demostrará que $g(x)$ definida en (4) es una función diferenciable.

◀ Tenga en cuenta que una integral definida no depende de la variable de integración t.

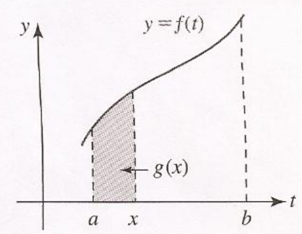


FIGURA 1.5.1 $g(x)$ como área

Teorema 1.5.2 Teorema fundamental del cálculo: forma de derivada

Sea f continua sobre $[a, b]$ y sea x cualquier número en el intervalo. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) y

$$g'(x) = f(x). \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN PARA $h > 0$ Sean x y $x + h$ en (a, b), donde $h > 0$. Por la definición de derivada,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h}. \tag{6}$$

Al usar las propiedades de la integral definida, la diferencia $g(x+h) - g(x)$ puede escribirse como

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt$$
$$= \int_a^{x+h} f(t)\, dt + \int_x^a f(t)\, dt \quad \leftarrow \text{por (8) de la sección 1.2}$$
$$= \int_x^{x+h} f(t)\, dt. \quad \leftarrow \text{por (10) de la sección 1.2}$$

Por tanto, (6) se vuelve

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt. \tag{7}$$

Puesto que f es continua sobre el intervalo cerrado $[x, x+h]$, por el teorema del valor extremo se sabe que f alcanza un valor mínimo m y un valor máximo M sobre el intervalo. Puesto que m y M son constantes con respecto a la integración sobre la variable t, por el teorema 1.2.7*ii*) se concluye que

$$\int_x^{x+h} m\,dt \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq \int_x^{x+h} M\,dt. \tag{8}$$

Con ayuda del teorema 1.5.1,

$$\int_x^{x+h} m\,dt = mt\Big]_x^{x+h} = m(x+h-x) = mh$$

y
$$\int_x^{x+h} M\,dt = Mt\Big]_x^{x+h} = M(x+h-x) = Mh.$$

Por tanto, la desigualdad en (8) se vuelve

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq Mh \quad \text{o} \quad m \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq M. \tag{9}$$

Puesto que f es continua sobre $[x, x+h]$ tiene sentido afirmar que $\lim_{h\to 0^+} m = \lim_{h\to 0^+} M = f(x)$. Al tomar el límite de la segunda expresión en (9) cuando $h \to 0^+$ obtenemos

$$f(x) \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(x).$$

Esto demuestra que $g'(x)$ existe y por $f(x) \leq g'(x) \leq f(x)$ concluimos que $g'(x) = f(x)$. Puesto que g es diferenciable, necesariamente es continua. Un razonamiento semejante se cumple para $h < 0$. ■

Otra forma más tradicional de expresar el resultado en (5) es

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{10}$$

EJEMPLO 5 Uso de (10)

Por (10),

a) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{-2}^{x} t^3\,dt = x^3$ *b*) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{1}^{x} \sqrt{t^2+1}\,dt = \sqrt{x^2+1}.$ ■

EJEMPLO 6 Regla de la cadena

Encuentre $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{\pi}^{x^3} \cos t\,dt.$

Solución Si identificamos $g(x) = \int_\pi^x \cos t\,dt$, entonces la integral dada es la composición $g(x^3)$. Realizamos la diferenciación al aplicar la regla de la cadena con $u = x^3$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_\pi^{x^3} \cos t\,dt &= \frac{d}{du}\left(\int_\pi^u \cos t\,dt\right)\frac{du}{dx}\\ &= \cos u \cdot \frac{du}{dx} = \cos x^3 \cdot 3x^2\\ &= 3x^2 \cos x^3.\end{aligned}$$ ■

Demostración alterna del teorema 1.5.1 Vale la pena examinar otra demostración del teorema 1.5.1 usando el teorema 1.5.2. Para una función f continua sobre $[a, b]$, la declaración $g'(x) = f(x)$ para $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ significa que $g(x)$ es una antiderivada del integrando f. Si F es cualquier antiderivada de f, por el teorema 1.3.1 sabemos que $g(x) - F(x) = C$ o $g(x) = F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria. Puesto que $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, para cualquier x en $[a, b]$ se concluye que

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C. \tag{11}$$

Si en (11) sustituimos $x = a$, entonces

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$

implica $C = -F(a)$, puesto que $\int_a^a f(t)\,dt = 0$. Así, (11) se vuelve

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Puesto que la última ecuación es válida en $x = b$, encontramos

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \qquad \blacksquare$$

Funciones continuas por partes Se dice que una función f es **continua por partes** sobre un intervalo $[a, b]$ si existe a lo más un número finito de puntos c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $(c_{k-1} < c_k)$ en los que f tiene una discontinuidad finita, o salto, sobre cada subintervalo abierto (c_{k-1}, c_k). Vea la FIGURA 1.5.2. Si una función f es continua por partes sobre $[a, b]$, está acotada sobre el intervalo, y entonces por el teorema 1.2.2, f es integrable sobre $[a, b]$. Una integral definida de una función continua por partes sobre $[a, b]$ puede evaluarse con ayuda del teorema 1.2.5:

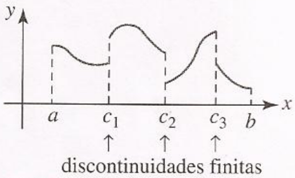


FIGURA 1.5.2 Función continua por partes

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_n}^b f(x)\,dx$$

y al tratar a los integrandos de las integrales definidas en el miembro derecho de la ecuación anterior simplemente como si fuesen continuos sobre los intervalos cerrados $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, $\ldots$, $[c_n, b]$.

EJEMPLO 7 Integración de una función continua por partes

Evalúe $\displaystyle\int_{-1}^4 f(x)\,dx$ donde

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

Solución La gráfica de una función f continua por partes se muestra en la FIGURA 1.5.3. Luego, por el análisis precedente y la definición de f:

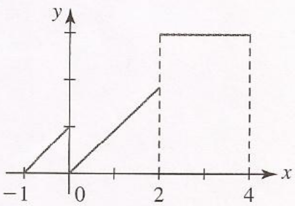


FIGURA 1.5.3 Gráfica de la función en el ejemplo 7

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 f(x)\,dx &= \int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^0 (x + 1)\,dx + \int_0^2 x\,dx + \int_2^4 3\,dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big]_{-1}^0 + \frac{1}{2}x^2\Big]_0^2 + 3x\Big]_2^4 = \frac{17}{2}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Integración de una función continua por partes

Evalúe $\displaystyle\int_0^3 |x - 2|\,dx$.

Solución Por la definición de valor absoluto,

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x - 2 \ge 0 \\ -(x - 2) & \text{si } x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \ge 2 \\ -x + 2 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

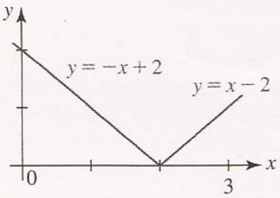


FIGURA 1.5.4 Gráfica de la función en el ejemplo 8

En la **FIGURA 1.5.4** se muestra la gráfica de $f(x) = |x - 2|$. Luego, debido a (10) del teorema 1.2.5, podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x-2|\,dx &= \int_0^2 |x-2|\,dx + \int_2^3 |x-2|\,dx\\ &= \int_0^2 (-x+2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx\\ &= \left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big]_0^2 + \left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big]_2^3\\ &= (-2+4) + \left(\frac{9}{2}-6\right) - (2-4) = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$ ■

Sustitución en una integral definida Recuerde por la sección 1.4 que algunas veces usamos una sustitución como ayuda para evaluar una integral indefinida de la forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Es necesario tener cuidado al usar una sustitución en una integral definida $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$, puesto que es posible proceder *de dos formas*.

Directrices para sustituir una integral definida

- Evalúe la integral indefinida $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ por medio de la sustitución $u = g(x)$. Vuelva a sustituir $u = g(x)$ en la antiderivada y luego aplique el teorema fundamental del cálculo usando los límites de integración originales $x = a$ y $x = b$.
- En forma alterna, la segunda sustitución puede evitarse al cambiar los límites de integración de modo que correspondan al valor de u en $x = a$ y u en $x = b$. El último método, que suele ser más rápido, se resume en el siguiente teorema.

Teorema 1.5.3 Sustitución en una integral definida

Sea $u = g(x)$ una función cuya derivada es continua sobre el intervalo $[a, b]$, y sea f una función continua sobre el rango de g. Si $F'(u) = f(u)$ y $c = g(a)$, $d = g(b)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(d) - F(c). \tag{12}$$

DEMOSTRACIÓN Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$. En consecuencia,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int_c^d f(u)\,du = F(u)\Big]_c^d = F(d) - F(c).$$ ■

EJEMPLO 9 Sustitución en una integral definida

Evalúe $\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx$.

Solución Primero se ilustrarán los dos procedimientos presentados en las directrices que preceden al teorema 1.5.3.

a) Para evaluar la integral indefinida $\int \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx$ usamos $u = 2x^2 + 1$ y $du = 4x\,dx$. Así,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx &= \frac{1}{4}\int \sqrt{2x^2+1}\,(4x\,dx) && \leftarrow \text{sustitución}\\ &= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{4}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C\\ &= \frac{1}{6}(2x^2+1)^{3/2} + C. && \leftarrow \text{otra sustitución}\end{aligned}$$

En consecuencia, por el teorema 1.5.1,

$$\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx = \frac{1}{6}(2x^2+1)^{3/2}\Big]_0^2$$

$$= \frac{1}{6}\,[9^{3/2} - 1^{3/2}]$$

$$= \frac{1}{6}\,[27-1] = \frac{13}{3}.$$

b) Si $u = 2x^2 + 1$, entonces $x = 0$ implica $u = 1$, mientras que con $x = 2$ obtenemos $u = 9$. Así, por el teorema 1.5.3,

$$\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx = \frac{1}{4}\overbrace{\int_1^9}^{u \text{ límites}} u^{1/2}\,du \leftarrow \text{integración con respecto a } u$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big]_1^9$$

$$= \frac{1}{6}\,[9^{3/2} - 1^{3/2}] = \frac{13}{3}.$$ ■

Cuando la gráfica de una función $y = f(x)$ es simétrica con respecto al eje y (función par) o al origen (función impar), entonces la integral definida de f sobre un intervalo simétrico $[-a, a]$, es decir, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, puede evaluarse por medio de un "atajo".

Teorema 1.5.4 Regla de la función par

Si f es una función par integrable sobre $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx. \qquad (13)$$

Se demostrará el siguiente teorema, pero la demostración del teorema 1.5.4 se deja como ejercicio.

Teorema 1.5.5 Regla de la función impar

Si f es una función impar integrable sobre $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \qquad (14)$$

DEMOSTRACIÓN Suponga que f es una función impar. Por la propiedad aditiva del intervalo, teorema 1.2.5, tenemos

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

En la primera integral en el miembro izquierdo, sea $x = -t$, de modo que $dx = -dt$, y cuando $x = -a$ y $x = 0$, entonces $t = a$ y $t = 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x)\,dx \leftarrow f(-t) = -f(t),\ f \text{ una función impar}$$

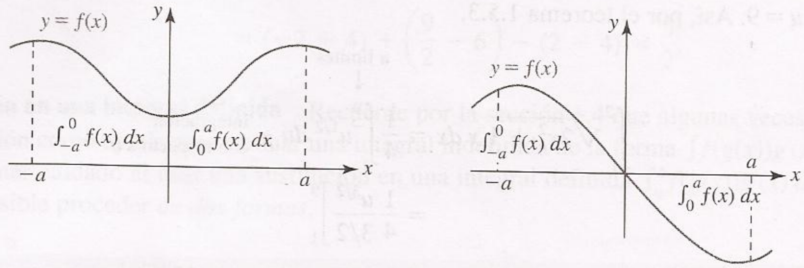
$$= \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= -\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx \qquad \leftarrow \text{por (8) de la sección 1.2}$$

$$= -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad \leftarrow t \text{ era una variable de integración “ficticia”}$$
$$= 0.$$

La cuestión importante en el teorema 1.5.5 es ésta: cuando una función integrable impar f se integra sobre un intervalo simétrico $[-a, a]$, no es necesario encontrar una antiderivada de f; el valor de la integral siempre es cero.

En la FIGURA 1.5.5 se muestran motivaciones geométricas para los resultados en los teoremas 1.5.4 y 1.5.5.



a) Función par: el valor de la integral definida sobre $[-a, 0]$ es el mismo que el valor sobre $[0, a]$

b) Función impar: el valor de la integral definida sobre $[-a, 0]$ es el opuesto que el valor sobre $[0, a]$

FIGURA 1.5.5 Regla de la función par en *a*); regla de la función impar en *b*)

EJEMPLO 10 Uso de la regla de la función par

Evalúe $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^4 + x^2)\,dx.$

Solución El integrando $f(x) = x^4 + x^2$ es una función polinomial cuyas potencias son todas pares, de modo que f necesariamente es una función par. Puesto que el intervalo de integración es el intervalo simétrico $[-1, 1]$, por el teorema 1.5.4 se concluye que es posible integrar sobre $[0, 1]$ y multiplicar el resultado por 2:

$$\int_{-1}^{1} (x^4 + x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x^4 + x^2)\,dx$$
$$= 2\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{15}.$$

EJEMPLO 11 Uso de la regla de la función impar

Evalúe $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx.$

Solución En este caso $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función impar sobre el intervalo simétrico $[-\pi/2, \pi/2]$. Así, por el teorema 1.5.5 de inmediato tenemos

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = 0.$$

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

La forma de antiderivada del teorema fundamental del cálculo constituye una herramienta extremadamente importante y poderosa para evaluar integrales definidas. ¿Por qué molestarse con un burdo límite de una suma cuando el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ puede encontrarse al calcular $\int f(x)\,dx$ en los dos números a y b? Esto es cierto hasta cierto punto; no obstante, ya es hora de aprender otro hecho de las matemáticas. Hay funciones continuas para las cuales la antiderivada $\int f(x)\,dx$ *no* puede expresarse en términos de *funciones elementales*: sumas, productos, cocientes y potencias de funciones polinomiales, trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas y exponenciales. La simple función continua $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ no tiene antiderivada que sea una función elemental. Sin embargo, aunque por el teorema 1.2.1 es posible afirmar que la integral definida $\int_0^1 \sqrt{x^3+1}\,dx$ existe, el teorema 1.5.1 no es de ninguna ayuda para encontrar su valor. La integral $\int_0^1 \sqrt{x^3+1}\,dx$ se denomina **no elemental**. Las integrales no elementales son importantes y aparecen en muchas aplicaciones como teoría de probabilidad y óptica. A continuación se presentan algunas integrales no elementales:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx, \quad \int \operatorname{sen} x^2\,dx, \quad \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{y} \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx.$$

Vea los problemas 71 y 72 en los ejercicios 1.5.

1.5 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-3.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-42, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 1.5.1 para evaluar la integral definida dada.

1. $\int_3^7 dx$
2. $\int_2^{10} (-4)\,dx$
3. $\int_{-1}^{2} (2x+3)\,dx$
4. $\int_{-5}^{4} t^2\,dt$
5. $\int_1^3 (6x^2-4x+5)\,dx$
6. $\int_{-2}^{1} (12x^5-36)\,dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$
8. $\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta$
9. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 3t\,dt$
10. $\int_{1/2}^{1} \operatorname{sen} 2\pi x\,dx$
11. $\int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{u^2}\,du$
12. $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x}\,dx$
13. $\int_{-1}^{1} e^x\,dx$
14. $\int_0^2 (2x-3e^x)\,dx$
15. $\int_0^2 x(1-x)\,dx$
16. $\int_3^2 x(x-2)(x+2)\,dx$
17. $\int_{-1}^{1} (7x^3-2x^2+5x-4)\,dx$
18. $\int_{-3}^{-1} (x^2-4x+8)\,dx$
19. $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$
20. $\int_2^4 \frac{x^2+8}{x^2}\,dx$
21. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$
22. $\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$
23. $\int_{-4}^{12} \sqrt{z+4}\,dz$
24. $\int_0^{7/2} (2x+1)^{-1/3}\,dx$
25. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}\,dx$
26. $\int_{-2}^{1} \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt$
27. $\int_{1/2}^{1} \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^2}\,dx$
28. $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{1+4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
29. $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$
30. $\int_{-1}^{1} \frac{u^3+u}{(u^4+2u^2+1)^5}\,du$
31. $\int_0^{\pi/8} \sec^2 2x\,dx$
32. $\int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/2}} x\csc x^2 \cot x^2\,dx$
33. $\int_{-1/2}^{3/2} (x-\cos\pi x)\,dx$
34. $\int_1^4 \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$
35. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\,\operatorname{sen} x\,dx$
36. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen} x\cos x\,dx$
37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\cos\theta}{(\theta+\operatorname{sen}\theta)^2}\,d\theta$
38. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec x+\tan x)^2\,dx$
39. $\int_0^{3/4} \operatorname{sen}^2 \pi x\,dx$
40. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$
41. $\int_1^5 \frac{1}{1+2x}\,dx$
42. $\int_{-1}^{1} \tan x\,dx$

En los problemas 43-48, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 1.5.2 para encontrar la derivada indicada.

43. $\frac{d}{dx}\int_0^x te^t\,dt$
44. $\frac{d}{dx}\int_1^x \ln t\,dt$
45. $\frac{d}{dt}\int_2^t (3x^2-2x)^6\,dx$
46. $\frac{d}{dx}\int_x^9 \sqrt[3]{u^2+2}\,du$
47. $\frac{d}{dx}\int_3^{6x-1} \sqrt{4t+9}\,dt$
48. $\frac{d}{dx}\int_\pi^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t^2\,dt$

En los problemas 49 y 50, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 1.5.2 para encontrar $F'(x)$. [*Sugerencia*: Use dos integrales.]

49. $F(x) = \int_{3x}^{x^2} \frac{1}{t^3+1}\,dt$
50. $F(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{5x} \sqrt{t^2+1}\,dt$

En los problemas 51 y 52, compruebe el resultado dado al evaluar primero la integral definida y luego diferenciando.

51. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x (6t^2 - 8t + 5)\, dt = 6x^2 - 8x + 5$

52. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\pi^t \operatorname{sen}\frac{x}{3}\, dx = \operatorname{sen}\frac{t}{3}$

53. Considere la función $f(x) = \int_1^x \ln(2t + 1)\, dt$. Encuentre el valor funcional indicado.

a) $f(1)$ *b)* $f'(1)$
c) $f''(1)$ *d)* $f'''(1)$

54. Suponga que $G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ y $G'(x) = f(x)$. Encuentre la expresión dada.

a) $G(x^2)$ *b)* $\dfrac{d}{dx}G(x^2)$

c) $G(x^3 + 2x)$ *d)* $\dfrac{d}{dx}G(x^3 + 2x)$

En los problemas 55 y 56, evalúe $\int_{-1}^2 f(x)\, dx$ para la función f dada.

55. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

56. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases}$

En los problemas 57-60, evalúe la integral definida de la función f continua por partes.

57. $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx$, donde $f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

58. $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\, dx$, donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ \cos x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

59. $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\, dx$, donde $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < -1 \\ 4, & -1 \leq x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

60. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\, dx$, donde $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es la función entero mayor

En los problemas 61-66, proceda como en el ejemplo 8 para evaluar la integral definida dada.

61. $\displaystyle\int_{-3}^1 |x|\, dx$ **62.** $\displaystyle\int_0^4 |2x - 6|\, dx$

63. $\displaystyle\int_{-8}^3 \sqrt{|x| + 1}\, dx$ **64.** $\displaystyle\int_0^2 |x^2 - 1|\, dx$

65. $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi |\operatorname{sen} x|\, dx$ **66.** $\displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\, dx$

En los problemas 67-70, proceda como en el inciso *b)* del ejemplo 9 y evalúe la integral definida dada usando la sustitución u indicada.

67. $\displaystyle\int_{1/2}^e \frac{(\ln 2t)^5}{t}\, dt$; $u = \ln 2t$

68. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1}{(\tan^{-1} x)(1 + x^2)}\, dx$; $u = \tan^{-1} x$

69. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{e^{-2x} + 1}\, dx$; $u = e^{-2x} + 1$

70. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$; $u = x^2$

≡ Aplicaciones

71. En matemáticas aplicadas, algunas funciones importantes se definen en términos de integrales no elementales. Una de estas funciones especiales se denomina **función error**, que se define como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

a) Demuestre que $\operatorname{erf}(x)$ es una función creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

b) Demuestre que la función $y = e^{x^2}[1 + \sqrt{\pi}\operatorname{erf}(x)]$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 2,$$

y que $y(0) = 1$.

72. Otra función especial definida por una integral no elemental es la **función integral seno**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$$

La función $\operatorname{Si}(x)$ tiene una infinidad de puntos fronterizos relativos.

a) Encuentre los cuatro primeros números críticos para $x > 0$. Use la prueba de la segunda derivada para determinar si estos números críticos corresponden a un máximo o a un mínimo relativo.

b) Use un SAC para obtener la gráfica de $\operatorname{Si}(x)$. [*Sugerencia*: En *Mathematica*, la función integral seno se denota por SinIntegral[*x*].]

≡ Piense en ello

En los problemas 73 y 74, sean P una partición del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Determine el valor del límite dado.

73. $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^n (2x_k^* + 5)\,\Delta x_k$; $[-1, 3]$

74. $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^n \cos\frac{x_k^*}{4}\,\Delta x_k$; $[0, 2\pi]$

En los problemas 75 y 76, sean P una partición regular del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Establezca el resultado dado.

75. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \operatorname{sen} x_k^* = 2$; $[0, \pi]$

76. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^n x_k^* = 0$; $[-1, 1]$

En los problemas 77 y 78, evalúe la integral definida dada.

77. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{1}^{x} 12t^2\,dt\right\}dx$ **78.** $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\left\{\int_{0}^{t} \operatorname{sen} x\,dx\right\}dt$

79. Demuestre la prueba de la función par, teorema 1.5.4.

80. Suponga que f es una función impar definida sobre un intervalo $[-4, 4]$. Además, suponga que f es diferenciable sobre el intervalo, $f(-2) = 3.5$, que f tiene ceros en -3 y 3 y números críticos -2 y 2.

a) ¿Cuál es $f(0)$?

b) Trace la gráfica aproximada de f.

c) Suponga que F es una función definida sobre $[-4, 4]$ por $F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$. Encuentre $F(-3)$ y $F(3)$.

d) Trace una gráfica aproximada de F.

e) Encuentre los números críticos y los puntos de inflexión de F.

81. Determine si el siguiente razonamiento es correcto:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\,dt = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t\,dt)$$

$$= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\operatorname{sen} t\,dt) \leftarrow \begin{cases} u = \cos t \\ du = -\operatorname{sen} t\,dt \end{cases}$$

$$= -\int_{0}^{0} \sqrt{1-u^2}\,du = 0. \leftarrow \begin{cases} \text{Teorema 1.5.3} \\ \text{Definición 1.2.2}i) \end{cases}$$

82. Calcule las derivadas.

a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\,x\int_{1}^{2x}\sqrt{t^3+7}\,dt$ *b*) $\displaystyle\frac{d}{dx}\,x\int_{1}^{4}\sqrt{t^3+7}\,dt$

≡ Problemas con calculadora/SAC

83. *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $f(x) = \cos^3 x$ y $g(x) = \operatorname{sen}^3 x$.

b) Con base en su interpretación de área neta con signo, use las gráficas del inciso *a*) para conjeturar los valores de $\int_0^{2\pi}\cos^3 x\,dx$ y $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3 x\,dx$.

≡ Proyectos

84. Integración por dardos En este problema se ilustra un método para aproximar el área bajo una gráfica al "lanzar dardos". Suponga que deseamos encontrar el área A bajo la gráfica de $f(x) = \cos^3(\pi x/2)$ sobre el intervalo $[0, 1]$; es decir, se quiere aproximar $A = \int_0^1 \cos^3(\pi x/2)\,dx$.

Si se lanza, sin ningún intento particular de ser experto, un gran número de dardos, por ejemplo N, hacia el blanco cuadrado de 1×1 mostrado en la FIGURA 1.5.6 y n dardos se insertan en la región bajo la gráfica de $f(x) = \cos^3(\pi x/2)$, entonces es posible demostrar que la probabilidad de que un dardo se inserte en la región está dada por la relación de dos áreas:

$$\frac{\text{área de la región}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{A}{1}.$$

Además, esta probabilidad teórica es aproximadamente la misma que la probabilidad empírica n/N:

$$\frac{A}{1} \approx \frac{n}{N} \quad \text{o} \quad A \approx \frac{n}{N}.$$

Para simular el lanzamiento de dardos hacia el blanco, use un SAC como *Mathematica* y su función de números aleatorios para generar una tabla de N pares ordenados (x, y), $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

a) Sea $N = 50$. Trace los puntos y la gráfica de f sobre el mismo conjunto de ejes coordenados. Use la figura para contar el número de éxitos n. Construya por lo menos 10 tablas diferentes de puntos aleatorios y gráficas. Para cada gráfica calcule la razón n/N.

b) Repita el inciso *a*) para $N = 100$.

c) Use el SAC para encontrar el valor exacto del área A y compare este valor con las aproximaciones obtenidas en los incisos *a*) y *b*).

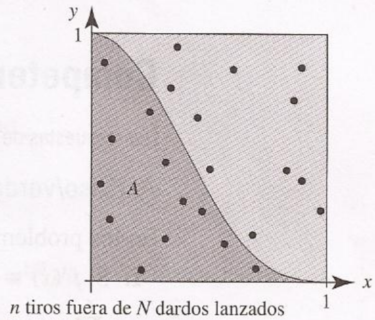


FIGURA 1.5.6 Blanco en el problema 84

85. Derrame de petróleo en expansión Un modelo matemático que puede usarse para determinar el tiempo t necesario para que un derrame de petróleo se evapore está dado por la fórmula

$$\frac{RT}{Pv} = \int_0^t \frac{KA(u)}{V_0}\,du,$$

donde $A(u)$ es el área del derrame en el instante u, RT/Pv es un término termodinámico adimensional, K es un coeficiente de transferencia de masa y V_0 es el volumen inicial del derrame.

a) Suponga que el derrame de petróleo se expande en forma circular cuyo radio inicial es r_0. Vea la FIGURA 1.5.7. Si el radio r del derrame crece a razón $dr/dt = C$ (en metros por segundo), resuelva para t en términos de los otros símbolos.

b) Valores típicos para RT/Pv y K son 1.9×10^6 (para el tridecano) y 0.01 mm/s, respectivamente. Si $C = 0.01$ m/s^2, $r_0 = 100$ m y $V_0 = 10\,000$ m^3, determine en cuánto tiempo se evapora el petróleo.

c) Use el resultado en el inciso *b*) para determinar al área final del derrame de petróleo.

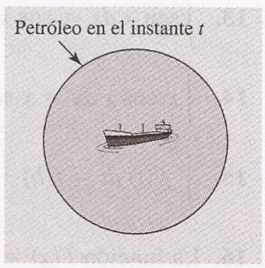
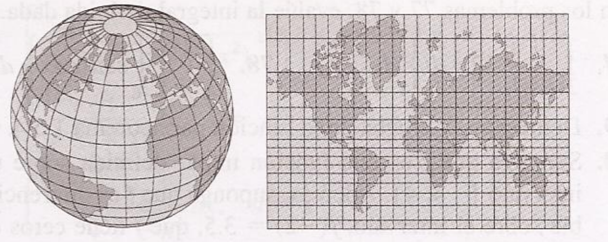


FIGURA 1.5.7 Derrame circular del petróleo en el problema 85

86. Proyección de Mercator y la integral de sec x En términos generales, un mapa de Mercator es una representación de un mapa global tridimensional sobre una superficie tridimensional. Vea la FIGURA 1.5.8. Encuentre y estudie el artículo "Mercator's World Map and the Calculus", Phillip M. Tuchinsky, UMAP, Unit 206, Newton, MA, 1978. Escriba un informe breve que resuma el artículo y por qué **Gerhardus Mercator** (c. 1569) necesitaba el valor de la integral definida $\int_0^{\theta_0} \sec x\, dx$ para llevar a cabo sus construcciones.



a) Globo *b)* Mapa de Mercator

FIGURA 1.5.8 Globo y proyección de Mercator en el problema 86

Competencia final de la unidad 1

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-3.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-16, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Si $f'(x) = 3x^2 + 2x$, entonces $f(x) = x^3 + x^2$. _____
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{6}(2k - 3) = \sum_{j=0}^{4}(2j + 1)$ _____
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} 5 = \sum_{k=1}^{20} 10$ _____
4. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{t^2 + 7}\, dt = -\int_3^1 \sqrt{t^2 + 7}\, dt$ _____
5. Si f es continua, entonces $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt + \int_1^0 f(x)\, dx = 0$. _____
6. Si f es integrable, entonces f es continua. _____
7. $\displaystyle\int_0^1 (x - x^3)\, dx$ es el área bajo la gráfica de $y = x - x^3$ sobre el intervalo $[0, 1]$. _____
8. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx > 0$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ es el área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$. _____
9. Si P es una partición de $[a, b]$ en n subintervalos, entonces $n \to \infty$ implica $\|P\| \to 0$. _____
10. Si $F'(x) = 0$ para toda x, entonces $F(x) = C$ para toda x. _____
11. Si f es una función impar integrable sobre $[-\pi, \pi]$, entonces $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0$. _____
12. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\, dx = 2\int_0^1 x\, dx$ _____
13. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = \cos x + C$ _____
14. $\displaystyle\int x\cos x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$ _____
15. $\displaystyle\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$ _____
16. La función $F(x) = \displaystyle\int_{-5}^{2x} (t + 4)e^{-t}\, dt$ es creciente sobre el intervalo $[-2, \infty)$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-16, llene los espacios en blanco.

1. Si G es una antiderivada de una función f, entonces $G'(x) =$ ______.
2. $\int \frac{d}{dx} x^2\, dx =$ ______.
3. Si $\int f(x)\, dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$, entonces $f(x) =$ ______.
4. El valor de $\frac{d}{dx}\int_3^x \sqrt{t^2+5}\, dt$ en $x = 1$ es ______.
5. Si g es diferenciable, entonces $\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^b f(t)\, dt =$ ______.
6. $\frac{d}{dx}\int_{5x}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, dt =$ ______.
7. Al usar notación sigma, la suma $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \frac{5}{11}$ puede expresarse como ______.
8. El valor numérico de $\sum_{k=1}^{15}(3k^2 - 2k)$ es ______.
9. Si $u = t^2 + 1$, entonces la integral definida $\int_2^4 t(t^2+1)^{1/3}\, dt$ se vuelve $\frac{1}{2}\int_{\_\_}^{\_\_} u^{1/3}\, du$.
10. El área bajo la gráfica de $f(x) = 2x$ sobre el intervalo $[0, 2]$ es ______, y el área neta con signo entre la gráfica de $f(x) = 2x$ y el eje x sobre $[-1, 2]$ es ______.
11. Si el intervalo $[1, 6]$ se parte en cuatro subintervalos determinados por $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 5$ y $x_4 = 6$, la norma de la partición es ______.
12. Una partición de un intervalo $[a, b]$ donde todos los subintervalos tienen el mismo ancho se denomina partición ______.
13. Si P es una partición de $[0, 4]$ y x_k^* es un número en el k-ésimo subintervalo, entonces $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k^*}\,\Delta x_k$ es la definición de la integral definida ______. Por el teorema fundamental del cálculo, el valor de esta integral definida es ______.
14. Si $\int_0^6 f(x)\, dx = 11$ y $\int_0^4 f(x)\, dx = 15$, entonces $\int_4^6 f(x)\, dx =$ ______.
15. $\int_{-1}^1 \left\{\int_0^x e^{-t}\, dt\right\} dx =$ ______ y $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx}\left\{\int_0^x e^{-t}\, dt\right\} dx =$ ______.
16. Para $t > 0$, el área neta con signo $\int_0^t (x^3 - x^2)\, dx = 0$ cuando $t =$ ______.

C. Ejercicios

En los problemas 1-20, evalúe la integral dada.

1. $\int_{-1}^1 (4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)\, dx$
2. $\int_1^9 \frac{6}{\sqrt{x}}\, dx$
3. $\int (5t+1)^{100}\, dt$
4. $\int w^2\sqrt{3w^3+1}\, dw$
5. $\int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} 2x - 5\cos 4x)\, dx$
6. $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz$
7. $\int_4^4 (-2x^2 + x^{1/2})\, dx$
8. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x\, dx$

9. $\int \cot^6 8x \csc^2 8x\, dx$

10. $\int \csc 3x \cot 3x\, dx$

11. $\int (4x^2 - 16x + 7)^4(x - 2)\, dx$

12. $\int (x^2 + 2x - 10)^{2/3}(5x + 5)\, dx$

13. $\int \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x - 16}}\, dx$

14. $\int \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 16}\, dx$

15. $\int_0^4 \dfrac{x}{16 + x^2}\, dx$

16. $\int_0^4 \dfrac{1}{16 + x^2}\, dx$

17. $\int_0^2 \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$

18. $\int_0^2 \dfrac{x}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$

19. $\int \tan 10x\, dx$

20. $\int \cot 10x\, dx$

21. Suponga que $\int_0^5 f(x)\, dx = -3$ y $\int_0^7 f(x)\, dx = 2$. Evalúe $\int_5^7 f(x)\, dx$.

22. Suponga que $\int_1^4 f(x)\, dx = 2$ y $\int_4^9 f(x)\, dx = -8$. Evalúe $\int_1^9 f(x)\, dx$.

En los problemas 23-28, evalúe la integral dada.

23. $\int_0^3 (1 + |x - 1|)\, dx$

24. $\int_0^1 \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{10t^4}{(2t^3 + 6t + 1)^2}\right] dt$

25. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{\operatorname{sen}^{10} t}{16t^7 + 1}\, dt$

26. $\int_{-1}^1 t^5 \operatorname{sen} t^2\, dt$

27. $\int_{-1}^1 \dfrac{1}{1 + 3x^2}\, dx$

28. $\int_{-2}^2 f(x)\, dx$, donde $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

En los problemas 29 y 30, encuentre el límite dado.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$

31. En la FIGURA 1.R.1 se muestra un cubo con las dimensiones dadas (en pies) que se llena a razón constante de $dV/dt = \frac{1}{4}$ pies^3/min. Cuando $t = 0$, en la balanza se lee 31.2 lb. Si el agua pesa 62.4 lb/pie^3, ¿cuál es la lectura de la balanza luego de 8 minutos? ¿Y cuando el cubo está lleno? [*Sugerencia*: Vea la página FM-2 para la fórmula para el volumen del tronco de un cono. También ignore el peso del cubo.]

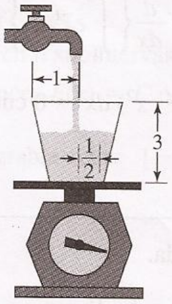


FIGURA 1.R.1 Cubo y balanza en el problema 31

32. La **torre de Hanoi** es una pila de discos circulares, cada uno de los cuales es más grande que el de arriba, colocados en un mástil. Vea la FIGURA 1.R.2. Una vez, un antiguo rey ordenó que esta torre debía construirse con discos de oro con las siguientes especificaciones: el ancho de cada disco debía ser un dedo más grande que el del disco de arriba. El hueco por los centros de los discos debía medir un dedo de ancho de diámetro, y el disco superior debía medir dos dedos de diámetro. Suponga que el ancho de un dedo es 1.5 cm, que el oro pesa 19.3 g/cm^3 y que su valor es \$14 por gramo.

a) Encuentre una fórmula para el valor del oro en la torre de Hanoi del rey si la torre tiene n discos.

b) El número normal de discos de oro en la torre de Hanoi es 64. ¿Cuál es el valor del oro en la torre?

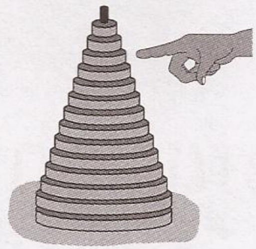


FIGURA 1.R.2 Torre de Hanoi en el problema 32

33. Considere la función uno a uno $f(x) = x^3 + x$ sobre el intervalo $[1, 2]$. Vea la FIGURA 1.R.3. Sin encontrar f^{-1}, determine el valor de

$$\int_{f(1)}^{f(2)} f^{-1}(x)\,dx.$$

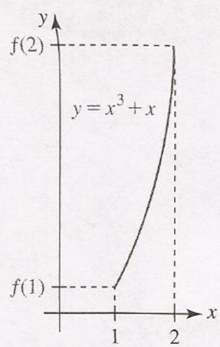
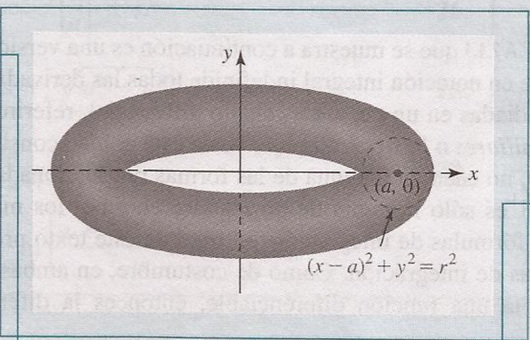
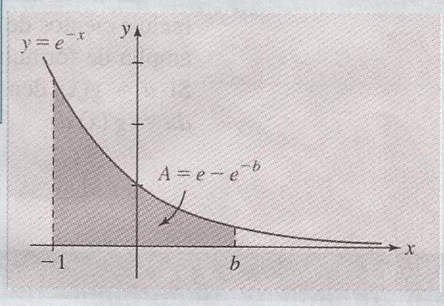


FIGURA 1.R.3 Gráfica para el problema 33

Unidad 2

Métodos de integración





En esta unidad A menudo uno se encuentra una integral que no puede clasificarse en una forma conocida como $\int u^n\,du$ o $\int e^u\,du$. Por ejemplo, no es posible evaluar $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ mediante la aplicación inmediata de cualquiera de las fórmulas enumeradas en la tabla de integrales 2.1.1. No obstante, al aplicar una **técnica de integración** algunas veces es posible reducir una integral como ésta a una o más de estas formas conocidas.

Competencias específicas

- Determinar una función primitiva.
- Discernir qué método puede ser más adecuado para resolver una integral dada y aplicarlo.

2.1 Integración: tres recursos

Introducción En esta unidad vamos a resumir el estudio de antiderivadas que empezó en la unidad 1, en donde mostramos superficialmente cómo obtener antiderivadas de una función f. Recuerde que una integral definida

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

es una familia $F(x) + C$ de antiderivadas de la función f; es decir, F está relacionada con f por el hecho de que $F'(x) = f(x)$. De esta manera, a la derivada de una función específica (sen x, cos x, e^x, ln x, etc.) corresponde una integral indefinida análoga. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \text{implica} \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$$

Tablas La TABLA 2.1.1 que se muestra a continuación es una versión ampliada de la tabla 1.4.1. Puesto que resume en notación integral indefinida todas las derivadas de la regla de la cadena de las funciones estudiadas en un curso de cálculo diferencial, referiremos las entradas de la tabla 2.1.1 a formas *familiares* o *básicas*. El objetivo de esta unidad consiste en evaluar integrales que, en su mayor parte, no caen en ninguna de las formas proporcionadas en la tabla.

La tabla 2.1.1 es sólo la punta de un *iceberg* enorme; los manuales de referencia solían incluir cientos de fórmulas de integración. Al final de este texto proporcionamos una tabla más amplia de fórmulas de integración. Como de costumbre, en ambas se usa notación diferencial. Si $u = g(x)$ denota una función diferenciable, entonces la diferencial de u es el producto $du = g'(x)\,dx$.

TABLA 2.1.1

Fórmulas de integración

Integrandos constantes

1. $\displaystyle\int du = u + C$
2. $\displaystyle\int k\,du = ku + C$

Integrandos que son potencias

3. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
4. $\displaystyle\int u^{-1}\,du = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Integrandos exponenciales

5. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$
6. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$

Integrandos trigonométricos

7. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
8. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
9. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
10. $\displaystyle\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
11. $\displaystyle\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
12. $\displaystyle\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
13. $\displaystyle\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
14. $\displaystyle\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
15. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
16. $\displaystyle\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

(continúa)

Integrandos hiperbólicos

17. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

18. $\displaystyle\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

19. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

20. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

21. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

22. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

Integrandos algebraicos

23. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\, du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

24. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + u^2}\, du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}}\, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u + a}{u - a}\right| + C$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$

30. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}}\, du = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 + u^2}}\, du = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u}\right| + C$

Aunque estas fórmulas de integración se han designado como *familiares* o *básicas*, tal vez usted observe que puede no estar *familiarizado* con algunas de ellas, especialmente las fórmulas 17-22 y 26-31. Debido a que los profesores a veces prestan poca atención a las funciones hiperbólicas, se le sugiere revisar (o, en caso de ser necesario, estudiar por primera vez) este tipo de funciones. Las fórmulas 26-31, que semejan a las fórmulas 23-25, son las formas de integral indefinida de las fórmulas de diferenciación para las funciones hiperbólicas inversas combinadas con el hecho de que toda función hiperbólica inversa es un logaritmo natural.

Técnicas de integración En las siguientes secciones, las integrales que analizaremos no pueden clasificarse como una simple forma familiar como $\int u^n\, du$, $\int e^u\, du$ o $\int \operatorname{sen} u\, du$. A pesar de ello, la tabla 2.1.1 es importante; a medida que avance en esta unidad, necesariamente se le hará referencia a esa tabla. Una gran cantidad de integrales puede evaluarse al ejecutar operaciones específicas sobre el integrando —denominada **técnica de integración**— y reducir una integral dada a *una o más* de las formas familiares en la tabla. Por ejemplo, no es posible evaluar $\int \ln x\, dx$ al identificarla con cualquiera de las fórmulas de integración en la tabla 2.1.1. No obstante, en la sección 2.3 veremos que al aplicar una técnica de integración, $\int \ln x\, dx$ puede evaluarse en pocos segundos al usar la derivada de $\ln x$ junto con la fórmula 1 en la tabla.

Para efecto de repaso, se solicita al lector que trabaje los problemas en los ejercicios 2.1. Por medio de una sustitución u idónea, cada problema puede hacerse corresponder con una de las fórmulas en la tabla 2.1.1.

Pero ni una tabla, sin importar cuán grande sea, ni las técnicas de integración, sin importar lo poderosas que sean, constituye un remedio para todos los problemas de integración. Mientras algunas integrales, como $\int e^{x^2}\, dx$, desafían por completo a las tablas y técnicas de integración, otras sólo *parecen* desafiar tales recursos. Por ejemplo, la integral $\int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} 2x\, dx$ no aparece en ninguna tabla pero *es posible* evaluarla por medio de una técnica de integración. El problema aquí es que no resulta evidente de forma inmediata *cuál* técnica puede aplicarse. Algunas veces se espera que el lector proporcione algunas ideas para replantear un integrando en una forma más receptiva para una técnica de integración.

◀ En la sección 1.5 se indicó que una función continua f puede no tener una antiderivada que sea una función elemental.

Tecnología Unas palabras sobre tecnología: si usted no ha trabajado con un sistema algebraico computarizado (SAC) como *Mathematica*, *Maple*, *Derive* o *Axiom*, debe corregir esta deficiencia lo más pronto posible. Un sistema algebraico computarizado es un programa extremadamente sofisticado diseñado para realizar una amplia gama de operaciones matemáticas simbólicas como álgebra normal, álgebra matricial, aritmética con números complejos, resolver ecuaciones polinomiales, aproximar raíces de ecuaciones, diferenciación, integración, graficado de ecuaciones en dos o tres dimensiones, resolver ecuaciones diferenciales, manipular funciones especiales ya contempladas en el SAC, etcétera. Si usted piensa convertirse en un estudiante serio de matemáticas, ciencias o ingeniería, entonces una ayuda ideal para sus clases teóricas y prácticas (así como para su carrera futura) sería contar con una computadora portátil equipada con un programa como *Mathematica*, *Maple* o MATLAB. También verifique en los laboratorios de matemáticas de su departamento de matemáticas o física; las computadoras que ahí encuentre indudablemente cuentan con uno o más de estos programas.

A medida que conozca y se sienta cómodo al usar un SAC, tal vez se interese en investigar sitios en la web como:

http://scienceworld.wolfram.com
http://mathworld.wolfram.com

Wolfram Research es el desarrollador del sistema computacional de álgebra *Mathematica*.

2.1 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-3.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-32, use una sustitución u y la tabla 2.1.1 para evaluar la integral dada.

1. $\displaystyle\int 5^{-5x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\cos e^{-x}}{e^{x}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{25-4x^2}}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{25-4x^2}}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-25}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{25+4x^2}}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{25+4x^2}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x}{25+4x^2}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2-25}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+25}}\,dx$

13. $\displaystyle\int \cot 10x\,dx$

14. $\displaystyle\int x\csc^2 x^2\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{6}{(3-5t)^{2.2}}\,dx$

16. $\displaystyle\int x^2\sqrt{(1-x^3)^5}\,dx$

17. $\displaystyle\int \sec 3x\,dx$

18. $\displaystyle\int 2\csc 2x\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1} x}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln 9x)}{x}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\cosh^2 x^4}\,dx$

24. $\displaystyle\int \tanh x\,dx$

25. $\displaystyle\int \tan 2x\sec 2x\,dx$

25. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\operatorname{sen}(\cos x)\,dx$

27. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\csc(\cos x)\cot(\cos x)\,dx$

28. $\displaystyle\int \cos x\csc^2(\operatorname{sen} x)\,dx$

29. $\displaystyle\int (1+\tan x)^2\sec^2 x\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}\,dx$

2.2 Integración por sustitución

Introducción En esta sección se ampliará la idea de **sustitución *u*** presentada en la sección 1.4, donde esta sustitución se usó básicamente como ayuda para identificar que una integral era una de las fórmulas de integración familiares como $\int u^n\,du$, $\int du/u$, $\int e^u\,du$, etcétera. Por ejemplo, con la sustitución $u = \ln x$ y $du = (1/x)\,dx$ reconocemos que

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx \quad \text{es lo mismo que} \quad \int u^2\,du.$$

Usted debe comprobar que $\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx$ no se ajusta a *ninguna* de las 31 fórmulas de integración de la tabla 2.1.1. No obstante, con ayuda de una sustitución es posible reducir la integral a *varios* casos de una de las fórmulas en la tabla 2.1.1.

El primer ejemplo ilustra la idea general.

EJEMPLO 1 Uso de una sustitución u

Evalúe $\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx$.

Solución Si se hace $u = 2x + 1$, entonces la integral dada puede replantearse en términos de la variable u. Para ello, observe que

$$x = \frac{1}{2}(u-1), \qquad dx = \frac{1}{2}\,du,$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(u-1)^2 = \frac{1}{4}(u^2-2u+1) \text{ y } \sqrt{2x+1} = u^{1/2}.$$

Al sustituir estas expresiones en la integral dada se obtiene:

$$\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx = \int \frac{1}{4}(u^2-2u+1)u^{1/2}\frac{1}{2}\,du,$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx &= \frac{1}{8}\int (u^2-2u+1)u^{1/2}\,du \\
&= \frac{1}{8}\int (u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2})\,du &&\leftarrow \text{tres aplicaciones de la fórmula 3 en la tabla 2.1.1} \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}u^{7/2}-\frac{4}{5}u^{5/2}+\frac{2}{3}u^{3/2}\right)+C &&\leftarrow \text{ahora se vuelve a sustituir para } u \\
&= \frac{1}{28}(2x+1)^{7/2}-\frac{1}{10}(2x+1)^{5/2}+\frac{1}{12}(2x+1)^{3/2}+C.
\end{aligned}$$

Usted debe comprobar que la derivada de la última línea en realidad es $x^2\sqrt{2x+1}$. ■

La elección de cuál sustitución usar, en caso de haber alguna, no siempre es evidente. En general, si el integrando contiene una potencia de una función, entonces una buena idea consiste en intentar que u sea esa función *o* potencia de la función en sí. En el ejemplo 1, la sustitución alterna $u = \sqrt{2x+1}$ o $u^2 = 2x + 1$ lleva a la integral diferente $\frac{1}{4}\int(1-u^2)^2u^2\,du$. La última puede evaluarse al desarrollar el integrando e integrar cada término.

EJEMPLO 2 Uso de una sustitución u

Evalúe $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

Solución Sea $u = \sqrt{x}$ de modo que $x = u^2$ y $dx = 2u\,du$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{1}{1+u}2u\,du \\
&= \int \frac{2u}{1+u}\,du &&\leftarrow \text{ahora se usa división larga} \\
&= \int \left(2-\frac{2}{1+u}\right)du &&\leftarrow \text{fórmulas 2 y 4 en la tabla 2.1.1} \\
&= 2u - 2\ln|1+u| + C &&\leftarrow \text{se vuelve a sustituir para } u \\
&= 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C.
\end{aligned}$$

■

Integrandos que contienen una expresión cuadrática Si un integrando contiene una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$, completar el cuadrado puede producir una integral que sea posible expresar en términos de una función trigonométrica inversa o una función hiperbólica inversa. Por supuesto, también es posible que integrales más complicadas produzcan otras funciones.

EJEMPLO 3 Completar el cuadrado

Evalúe $\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx.$

Solución Después de completar el cuadrado, la integral dada puede escribirse como

$$\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx = \int \frac{x+4}{(x+3)^2+9}\,dx.$$

Ahora, si $u = x + 3$, entonces $x = u - 3$ y $dx = du$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx &= \int \frac{u+1}{u^2+9}\,du \leftarrow \text{división término a término}\\
&= \int \frac{u}{u^2+9}\,du + \int \frac{1}{u^2+9}\,du\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+9}\,du + \int \frac{1}{u^2+9}\,du \quad \leftarrow \text{fórmulas 4 y 24 en la tabla 2.1.1}\\
&= \frac{1}{2}\ln(u^2+9) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln\left[(x+3)^2+9\right] + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+3}{3} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+18) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+3}{3} + C.
\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo ilustra una sustitución algebraica en una integral definida.

$x^{1/2}$

EJEMPLO 4 Una integral definida

Evalúe $\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx.$

Solución Si $u = 3x + 2$, entonces

$$x = \frac{1}{3}(u-2), \qquad dx = \frac{1}{3}\,du,$$
$$6x + 1 = 2(u-2) + 1 = 2u - 3 \text{ y } \sqrt[3]{3x+2} = u^{1/3}.$$

Puesto que se cambiará la variable de integración, es necesario convertir los límites de integración x en límites de integración u. Observe que cuando $x = 0$, $u = 2$ y cuando $x = 2$, $u = 8$. En consecuencia, la integral original se vuelve

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx &= \int_2^8 \frac{2u-3}{u^{1/3}}\frac{1}{3}\,du \leftarrow \text{de nuevo división término a término}\\
&= \int_2^8 \left(\frac{2}{3}u^{2/3} - u^{-1/3}\right)du\\
&= \left(\frac{2}{5}u^{5/3} - \frac{3}{2}u^{2/3}\right)\Big]_2^8\\
&= \left(\frac{2}{5}\cdot 2^5 - \frac{3}{2}\cdot 2^2\right) - \left(\frac{2}{5}\cdot 2^{5/3} - \frac{3}{2}\cdot 2^{2/3}\right)\\
&= \frac{34}{5} - \frac{2}{5}\cdot 2^{5/3} + \frac{3}{2}\cdot 2^{2/3} \approx 7.9112.
\end{aligned}$$

Se pide que el lector vuelva a trabajar el ejemplo 4. La segunda vez use $u = \sqrt[3]{3x+2}$.

∫ NOTAS DESDE EL AULA

i) Cuando trabaje los ejercicios presentados en esta unidad, no se preocupe demasiado si no siempre obtiene la misma respuesta que se proporciona en el texto. Al aplicar técnicas diferentes al mismo problema es posible obtener respuestas que parecen diferentes. Recuerde que dos antiderivadas de la misma función pueden diferir cuando mucho por una constante. Intente conciliar los conflictos que se presenten.

ii) También podría ser de utilidad en este punto recordar que la integración del cociente de dos funciones polinomiales, $p(x)/q(x)$, suele empezar con división larga si el grado de $p(x)$ es mayor que o igual al grado de $q(x)$. Vea el ejemplo 2.

iii) Busque problemas que sea posible resolver con métodos previos.

2.2 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-4.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-26, use una sustitución para evaluar la integral dada.

1. $\int x(x+1)^3\,dx$
2. $\int \dfrac{x^2}{(x+1)^3}\,dx$
3. $\int (2x+1)\sqrt{x-5}\,dx$
4. $\int (x^2-1)\sqrt{2x+1}\,dx$
5. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$
6. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x+2}}\,dx$
7. $\int \dfrac{x+3}{(3x-4)^{3/2}}\,dx$
8. $\int (x^2+x)\sqrt[3]{x+7}\,dx$
9. $\int \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$
10. $\int \dfrac{t}{\sqrt{t}+1}\,dt$
11. $\int \dfrac{\sqrt{t}-3}{\sqrt{t}+1}\,dt$
12. $\int \dfrac{\sqrt{r+3}}{r+3}\,dr$
13. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$
14. $\int \dfrac{x^5}{\sqrt[5]{x^2+4}}\,dx$
15. $\int \dfrac{x^2}{(x-1)^4}\,dx$
16. $\int \dfrac{2x+1}{(x+7)^2}\,dx$
17. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$
18. $\int \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$
19. $\int \sqrt{1-\sqrt{v}}\,dv$
20. $\int \dfrac{\sqrt{w}}{\sqrt{1-\sqrt{w}}}\,dw$
21. $\int \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$
22. $\int \sqrt{t}\sqrt{1+t\sqrt{t}}\,dt$
23. $\int \dfrac{2x+7}{x^2+2x+5}\,dx$
24. $\int \dfrac{6x-1}{4x^2+4x+10}\,dx$
25. $\int \dfrac{2x+5}{\sqrt{16-6x-x^2}}\,dx$
26. $\int \dfrac{4x-3}{\sqrt{11+10x-x^2}}\,dx$

En los problemas 27 y 28, use la sustitución $u = x^{1/6}$ para evaluar la integral.

27. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$
28. $\int \dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

En los problemas 29-40, use una sustitución para evaluar la integral definida dada.

29. $\int_0^1 x\sqrt{5x+4}\,dx$
30. $\int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}\,dx$
31. $\int_1^{16} \dfrac{1}{10+\sqrt{x}}\,dx$
32. $\int_4^9 \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$
33. $\int_2^9 \dfrac{5x-6}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$
34. $\int_{-\sqrt{3}}^0 \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
35. $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^{50}\,dx$
36. $\int_0^4 \dfrac{1}{(1+\sqrt{x})^3}\,dx$
37. $\int_1^8 \dfrac{1}{x^{1/3}+x^{2/3}}\,dx$
38. $\int_1^{64} \dfrac{x^{1/3}}{x^{2/3}+2}\,dx$
39. $\int_0^1 x^2(1-x)^5\,dx$
40. $\int_0^6 \dfrac{2x+5}{\sqrt{2x+4}}\,dx$

En los problemas 41 y 42, use una sustitución para establecer el resultado dado. Suponga $x > 0$.

41. $\int_1^{x^2} \dfrac{1}{t}\,dt = 2\int_1^x \dfrac{1}{t}\,dt$
42. $\int_1^{\sqrt{x}} \dfrac{1}{t}\,dt = \dfrac{1}{2}\int_1^x \dfrac{1}{t}\,dt$

≡ Repaso de aplicaciones

43. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \dfrac{1}{x^{1/3}+1}$ sobre el intervalo $[0, 1]$.
44. Encuentre el área acotada por la gráfica de $y = x^3\sqrt{x+1}$ y el eje x sobre el intervalo $[-1, 1]$.
45. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$, $x = 0$, $x = 4$ y $y = 0$ alrededor del eje y.
46. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar alrededor del eje x la región en el problema 45.
47. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \frac{4}{5}x^{5/4}$ en el intervalo $[0, 9]$.
48. La **ecuación diferencial de Bertalanffy** es un modelo matemático para el crecimiento de un organismo donde se supone que el metabolismo constructivo (anabolismo)

del organismo procede en razón proporcional al área superficial, mientras el metabolismo destructivo (catabolismo) procede en razón proporcional al volumen. Si también se supone que el área superficial es proporcional a la potencia dos tercios del volumen y que el peso w del organismo es proporcional al volumen, entonces es posible escribir la ecuación de Bertalanffy como

$$\frac{dw}{dt} = Aw^{2/3} - Bw,$$

donde A y B son parámetros positivos. A partir de esta ecuación puede concluirse que el tiempo necesario para que tal organismo aumente de peso desde w_1 hasta w_2 está dado por la integral definida

$$T = \int_{w_1}^{w_2} \frac{1}{Aw^{2/3} - Bw}\, dw.$$

Evalúe esta integral. Encuentre un límite superior sobre cuánto puede crecer el organismo.

2.3 Integración por partes

Introducción En esta sección desarrollaremos una fórmula importante que puede usarse a menudo para integrar el producto de dos funciones. Para aplicar la fórmula es necesario identificar una de las funciones en el producto como una diferencial. Recuerde que si $v = g(x)$, entonces su diferencial es la función $dv = g'(x)\, dx$.

Integración de productos Puesto que deseamos integrar un producto, parece razonable empezar con la regla de diferenciación del producto. Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones diferenciables, entonces la derivada de $f(x)g(x)$ es

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \tag{1}$$

A su vez, la integración de ambos miembros de (1),

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\, dx = \int f(x)g'(x)\, dx + \int g(x)f'(x)\, dx$$

o

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\, dx + \int g(x)f'(x)\, dx,$$

produce la fórmula

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx. \tag{2}$$

La fórmula (2) suele escribirse en términos de las diferenciales $du = f'(x)\, dx$ y $dv = g'(x)\, dx$:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \tag{3}$$

El procedimiento definido por la fórmula (3) se denomina **integración por partes**. La idea esencial detrás de (3) es evaluar la integral $\int u\, dv$ mediante la evaluación de otra, que se espera sea más simple, integral $\int v\, du$.

Directrices para la integración por partes

- El **primer paso** en este proceso de integración por partes consta en la elección e integración de dv en la integral dada. Como cuestión práctica, la función dv *suele ser* el factor más complicado en el producto que puede integrarse usando una de las fórmulas básicas en la tabla 2.1.1.
- El **segundo paso** es la diferenciación del factor restante u en la integral dada. Luego se forma

se diferencia

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

se integra

- El **tercer paso**, por supuesto, es la evaluación de $\int v\, du$.

Algunas veces los problemas de integración pueden efectuarse aplicando varios métodos. En el primer ejemplo, la integral puede evaluarse por medio de una sustitución algebraica (sección 2.2) así como por integración por partes.

EJEMPLO 1 Uso de (3)

Evalúe $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

Solución Primero, la integral se escribe como

$$\int x(x+1)^{-1/2}\,dx.$$

A partir de esta última forma vemos que para la función dv hay varias opciones. De las posibles opciones para dv,

$$dv = (x+1)^{-1/2}\,dx, \quad dv = x\,dx \quad \text{o} \quad dv = dx,$$

escogemos

$$dv = (x+1)^{-1/2}\,dx \quad \text{y} \quad u = x.$$

Luego, por integración de la fórmula 3 en la tabla 2.1.1 encontramos

$$v = \int (x+1)^{-1/2}\,dx = 2(x+1)^{1/2}.$$

Cuando se integra dv no se requiere ninguna constante de integración.

Al sustituir $v = 2(x+1)^{1/2}$ y $du = dx$ en (3) se obtiene

$$\int \overbrace{x}^{u}\overbrace{(x+1)^{-1/2}\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\cdot\overbrace{2(x+1)^{1/2}}^{v} - \int \overbrace{2(x+1)^{1/2}}^{v}\,\overbrace{dx}^{du}$$

$$= 2x(x+1)^{1/2} - 2\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C \leftarrow \text{se usó la fórmula 3 en la tabla 2.1.1}$$

$$= 2x(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

Comprobación por diferenciación Para verificar el resultado precedente se usa la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}\left(2x(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C\right) = 2x\cdot\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} + 2(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}(x+1)^{1/2}$$

$$= x(x+1)^{-1/2} + 2(x+1)^{1/2} - 2(x+1)^{1/2}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x+1}}.$$

■

La clave para que la integración por partes funcione consiste en hacer la elección "correcta" de la función dv. En las directrices antes del ejemplo 1 se afirmó que dv suele ser el factor más complicado en el producto que puede integrarse de inmediato por medio de una fórmula conocida de antemano. Sin embargo, esto no puede tomarse como una regla estricta. Considerando que la opción "correcta" para dv que se ha hecho a menudo se basa en retrospectiva pragmática, ¿la segunda integral $\int v\,du$ es menos complicada que la primera integral $\int u\,dv$? ¿Es posible evaluar esta segunda integral? Para ver qué ocurre cuando se hace una elección "mala", de nuevo se considerará el ejemplo 1, aunque esta vez se escoge

$$dv = x\,dx \quad \text{y} \quad u = (x+1)^{-1/2}$$

de modo que

$$v = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad du = -\frac{1}{2}(x+1)^{-3/2}\,dx.$$

En este caso, al aplicar (3) se obtiene

$$\int x(x+1)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2}x^2(x+1)^{-1/2} + \frac{1}{4}\int x^2(x+1)^{-3/2}\,dx.$$

Aquí la dificultad es evidente: la segunda integral $\int v\,du$ es más complicada que la original $\int u\,dv$. La selección alterna $dv = dx$ también conduce a un callejón sin salida.

EJEMPLO 2 Uso de (3)

Evalúe $\int x^3 \ln x\,dx$.

Solución De nuevo, hay varias opciones posibles para la función dv:

$$dv = \ln x\,dx, \quad dv = x^3\,dx \quad \text{o} \quad dv = dx. \tag{4}$$

Aunque la elección $dv = \ln x\,dx$ es indudablemente el factor más complicado en el producto $x^3 \ln x\,dx$, esta opción se rechaza porque no coincide con ninguna fórmula en la tabla 2.1.1. De las dos funciones restantes en (4), la segunda es la más "complicada", de modo que se escoge

$$dv = x^3\,dx \quad \text{y} \quad u = \ln x,$$

entonces

$$v = \frac{1}{4}x^4 \quad \text{y} \quad du = \frac{1}{x}\,dx.$$

Así, por (3),

$$\int x^3 \ln x\,dx = \overbrace{\ln x}^{u} \cdot \overbrace{\frac{1}{4}x^4}^{v} - \int \overbrace{\frac{1}{4}x^4}^{v} \cdot \overbrace{\frac{1}{x}\,dx}^{du} \leftarrow \text{se simplifica el integrando}$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx \qquad \leftarrow \text{se integra } x^3$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

■

EJEMPLO 3 Uso de (3)

Evalúe $\int x \tan^{-1} x\,dx$.

Solución La elección $dv = \tan^{-1} x\,dx$ no es prudente, puesto que no es posible integrar de inmediato esta función con base en un resultado previo conocido. Así, escogemos

$$dv = x\,dx \quad \text{y} \quad u = \tan^{-1} x$$

y se encuentra

$$v = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad du = \frac{1}{1 + x^2}\,dx.$$

En consecuencia, con (3) se obtiene

$$\int \overbrace{(\tan^{-1} x)}^{u}\,\overbrace{(x\,dx)}^{dv} = \overbrace{(\tan^{-1} x)}^{u}\,\overbrace{\frac{1}{2}x^2}^{v} - \int \overbrace{\frac{1}{2}x^2}^{v} \cdot \overbrace{\frac{1}{1 + x^2}\,dx}^{du}. \leftarrow \text{se simplifica el integrando}$$

Para evaluar la integral indefinida $\int x^2\,dx/(1 + x^2)$, usamos la división larga (vea el ejemplo 7 de la sección 1.3). Por tanto,

$$\int x \tan^{-1} x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C.$$

■

Integraciones sucesivas Un problema puede requerir integración por partes varias veces consecutivas. Como regla, integrales del tipo

$$\int p(x) \operatorname{sen} kx\,dx, \quad \int p(x) \cos kx\,dx \quad \text{y} \quad \int p(x) e^{kx}\,dx, \tag{5}$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ y k es una constante, requieren integración por partes n veces. Además, una integral como

$$\int x^k (\ln x)^n \, dx, \tag{6}$$

donde de nuevo n es un entero positivo, también requiere n aplicaciones de (3). La integral en el ejemplo 2 es de la forma (6) con $k = 3$ y $n = 1$.

EJEMPLO 4 Uso de (3) dos veces consecutivas

Evalúe $\int x^2 \cos x \, dx$.

Solución La integral $\int x^2 \cos x \, dx$ es la segunda de tres formas en (5) con $p(x) = x^2$ y $n = 2$. En consecuencia, (3) se aplica dos veces consecutivas. En la primera integración se usa

$$dv = \cos x \, dx \quad \text{y} \quad u = x^2$$

de modo que

$$v = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad du = 2x \, dx.$$

Por tanto, (3) se vuelve

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \underbrace{\int x \operatorname{sen} x \, dx}_{\text{se requiere integración por partes}}. \tag{7}$$

La segunda integral en (7) es la primera forma en (5) y sólo requiere una integración por partes, puesto que el grado del polinomio $p(x) = x$ es $n = 1$. En esta segunda integral se escoge $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ y $u = x$:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \operatorname{sen} x - 2\left[x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \right] \\
&= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx \leftarrow \text{fórmula 8 en la tabla 2.1.1} \\
&= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C.
\end{aligned} \tag{8}$$
■

El resultado en (8) puede obtenerse con un atajo sistemático. Si consideramos la integral en el ejemplo 4 como $\int f(x)g'(x) \, dx$ donde $f(x) = x^2$ y $g'(x) = \cos x$, entonces podemos mostrar las derivadas y la integral en un arreglo:

$$\begin{array}{ccc}
f(x) \text{ y sus derivadas} & & g'(x) \text{ y sus integrales} \\
x^2 & \xrightarrow{+} & \cos x \\
2x & \xrightarrow{-} & \operatorname{sen} x \\
2 & \xrightarrow{+} & -\cos x \\
0 & & -\operatorname{sen} x
\end{array}$$

Luego formamos los productos de las funciones unidas por las flechas y sumamos o restamos un producto según el signo algebraico:

$$\int x^2 \cos x \, dx = +x^2(\operatorname{sen} x) - 2x(-\cos x) + 2(-\operatorname{sen} x) + C.$$

El último cero en la columna de las derivadas indica que ya no es necesario integrar más $g'(x)$; los productos de ese punto son cero.

Esta técnica de integración sucesiva por partes funciona para todas las integrales del tipo mostrado en (5) y se denomina **integración tabular**. Para una integral como $\int x^4 e^{-2x} \, dx$ podríamos escoger $f(x) = x^4$ y $g'(x) = e^{-2x}$. Usted debe comprobar que con integración tabular se obtiene

$$\begin{aligned}
\int x^4 e^{-2x} \, dx &= +x^4\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - 4x^3\left(\frac{1}{4}e^{-2x}\right) + 12x^2\left(-\frac{1}{8}e^{-2x}\right) - 24x\left(\frac{1}{16}e^{-2x}\right) + 24\left(-\frac{1}{32}e^{-2x}\right) + C \\
&= -\frac{1}{2}x^4 e^{-2x} - x^3 e^{-2x} - \frac{3}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{3}{2}x e^{-2x} - \frac{3}{4}e^{-2x} + C.
\end{aligned}$$

Despeje de integrales Para ciertas integrales, una o más aplicaciones de la integración por partes puede resultar en una situación en que la integral original aparece en el miembro derecho. En este caso el problema de evaluar la integral se completa al *despejar* la integral original. El siguiente ejemplo ilustra la técnica.

EJEMPLO 5 Despeje de la integral original

Evalúe $\int \sec^3 x\,dx$.

Solución Al examinar la integral no se observa ninguna elección evidente para dv. No obstante, al escribir el integrando como el producto $\sec^3 x = \sec x \cdot \sec^2 x$, identificamos

$$dv = \sec^2 x\,dx \qquad \text{y} \qquad u = \sec x$$

de modo que $\quad v = \tan x \quad$ y $\quad du = \sec x \tan x\,dx.$

Por (3) se concluye que

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\,dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx \quad \leftarrow \text{identidad trigonométrica para } \tan^2 x \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x\,dx - \int \sec^3 x\,dx \\ &= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\,dx.\end{aligned}$$

Vea (18) en la sección 1.4 para la evaluación de la integral $\int \sec x\,dx$. También, vea la fórmula 15 en la tabla 2.1.1.

En la última ecuación despejamos $\int \sec^3 x\,dx$ y sumamos una constante de integración:

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

y así $$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$ ■

Integrales del tipo

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx \qquad \text{y} \qquad \int e^{ax} \cos bx\,dx \tag{9}$$

son importantes en ciertos aspectos de matemáticas aplicadas. Estas integrales requieren dos aplicaciones de la integración por partes antes de recuperar la integral original en el miembro derecho.

EJEMPLO 6 Despeje de la integral original

Evalúe $\int e^{2x} \cos 3x\,dx$.

Solución Si se escoge

$$dv = e^{2x}\,dx \qquad \text{y} \qquad u = \cos 3x,$$

entonces $\quad v = \frac{1}{2}e^{2x} \quad$ y $\quad du = -3 \operatorname{sen} 3x\,dx.$

Luego, la fórmula (3) de integración por partes proporciona

$$\int e^{2x} \cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x\,dx.$$

A la integral destacada en color le aplicamos de nuevo integración por partes con $dv = e^{2x}\,dx$ y $u = \text{sen } 3x$:

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\,\text{sen } 3x - \int \frac{1}{2}e^{2x}(3\cos 3x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\,\text{sen } 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

Al despejar $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ de la última ecuación se obtiene

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\,\text{sen } 3x.$$

Después de dividir entre $\frac{13}{4}$ y fijar una constante de integración obtenemos

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\,\text{sen } 3x + C.$$ ■

Al evaluar las integrales $\int e^{ax}\,\text{sen } bx\,dx$ y $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ no importa cuáles funciones se escojan como dv y u. En el ejemplo 6 escogimos $dv = e^{2x}\,dx$ y $u = \cos 3x$; se le solicita volver a trabajar este ejemplo usando $dv = \cos 3x\,dx$ y $u = e^{2x}$.

Integrales definidas Una integral definida puede evaluarse usando integración por partes como sigue:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Por conveniencia, la ecuación anterior suele escribirse como

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du, \qquad (10)$$

donde se entiende que los *límites de integración son valores de x* y las integraciones en las integrales se llevan a cabo con respecto a la variable x.

EJEMPLO 7 Área bajo la gráfica

Encuentre el área bajo la gráfica de $f(x) = \ln x$ sobre el intervalo $[1, e]$.

Solución Por la FIGURA 2.3.1 vemos que $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. Por tanto, el área A está dada por la integral definida

$$A = \int_1^e \ln x\,dx.$$

Al escoger $\quad dv = dx \quad$ y $\quad u = \ln x,$

entonces $\quad v = x \quad$ y $\quad du = \frac{1}{x}\,dx.$

Por (10) tenemos

$$A = x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e dx$$

$$= x\ln x\Big]_1^e - x\Big]_1^e$$

$$= e\ln e - \ln 1 - e + 1 = 1.$$

Aquí usamos $\ln e = 1$ y $\ln 1 = 0$. ■

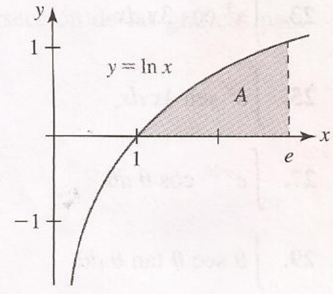


FIGURA 2.3.1 Área bajo la gráfica en el ejemplo 7

2.3 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-4.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-40, use integración por partes para evaluar la integral dada.

1. $\int x\sqrt{x+3}\,dx$
2. $\int \dfrac{x}{\sqrt{2x-5}}\,dx$
3. $\int \ln 4x\,dx$
4. $\int \ln(x+1)\,dx$
5. $\int x\ln 2x\,dx$
6. $\int x^{1/2}\ln x\,dx$
7. $\int \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx$
8. $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^3}}\,dx$
9. $\int (\ln t)^2\,dt$
10. $\int (t\ln t)^2\,dt$
11. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$
12. $\int x^2\tan^{-1}x\,dx$
13. $\int xe^{3x}\,dx$
14. $\int x^2e^{5x}\,dx$
15. $\int x^3e^{-4x}\,dx$
16. $\int x^5e^x\,dx$
17. $\int x^3e^{x^2}\,dx$
18. $\int x^5e^{2x^3}\,dx$
19. $\int t\cos 8t\,dt$
20. $\int x\operatorname{senh} x\,dx$
21. $\int x^2\operatorname{sen} x\,dx$
22. $\int x^2\cos\dfrac{x}{2}\,dx$
23. $\int x^3\cos 3x\,dx$
24. $\int x^4\operatorname{sen} 2x\,dx$
25. $\int e^x\operatorname{sen} 4x\,dx$
26. $\int e^{-x}\cos 5x\,dx$
27. $\int e^{-2\theta}\cos\theta\,d\theta$
28. $\int e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,dx$
29. $\int \theta\sec\theta\tan\theta\,d\theta$
30. $\int e^{2t}\cos e^t\,dt$
31. $\int \operatorname{sen} x\cos 2x\,dx$
32. $\int \cosh x\cosh 2x\,dx$
33. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$
34. $\int \dfrac{t^5}{(t^3+1)^2}\,dt$
35. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$
36. $\int \cos x\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$
37. $\int \csc^3 x\,dx$
38. $\int x\sec^{-1}x\,dx$
39. $\int x\sec^2 x\,dx$
40. $\int x\tan^2 x\,dx$

En los problemas 41-46, evalúe la integral definida dada.

41. $\int_0^2 x\ln(x+1)\,dx$
42. $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$
43. $\int_2^4 xe^{-x/2}\,dx$
44. $\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos x\,dx$
45. $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$
46. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \cos^{-1}x\,dx$

≡ Repaso de aplicaciones

47. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = 1 + \ln x$ sobre el intervalo $[e^{-1}, 3]$.
48. Encuentre el área acotada por la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ y el eje x sobre el intervalo $[-1, 1]$.
49. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $x = 5$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
50. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = e^x$, $x = 0$ y $y = 3$ gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
51. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = 0$, $0 \le x \le \pi$, gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
52. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \ln(\cos x)$ sobre el intervalo $[0, \pi/4]$.
53. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \tan^{-1}(x/2)$ sobre el intervalo $[0, 2]$.
54. Un cuerpo se mueve en línea recta con velocidad $v(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$, donde v se mide en cm/s. Encuentre la función posición $s(t)$ si se sabe que $s = 0$ cuando $t = 0$.
55. Un cuerpo se mueve en línea recta con aceleración $a(t) = te^{-t}$, donde a se mide en cm/s^2. Encuentre la función velocidad $v(t)$ y la función posición $s(t)$ si $v(0) = 1$ y $s(0) = -1$.
56. Un tanque de agua se forma al girar la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen}\pi x$ y $y = 0$, $0 \le x \le 1$, alrededor del eje x, que se toma en la dirección hacia abajo. El tanque contiene agua hasta una profundidad de $\frac{1}{2}$ pie. Determine el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta la parte superior del tanque.
57. Encuentre la fuerza provocada por la presión de un líquido sobre un lado de la placa vertical que se muestra en la FIGURA 2.3.2. Suponga que la placa está sumergida en agua y que las dimensiones están en pies.

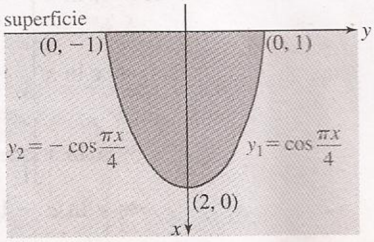


FIGURA 2.3.2 Placa sumergida en el problema 57

58. Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \text{sen}\, x$, $y = 0$ y $x = \pi/2$.

En los problemas 59-62, evalúe la integral usando primero una sustitución seguida de integración por partes.

59. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **60.** $\displaystyle\int xe^{\sqrt{x}}\,dx$

61. $\displaystyle\int \text{sen}\sqrt{x+2}\,dx$ **62.** $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{t}\,dt$

En los problemas 63-66, use integración por partes para establecer la **fórmula de reducción** dada.

63. $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int(\ln x)^{n-1}\,dx$

64. $\displaystyle\int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{\text{sen}^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\,dx$

65. $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x\,\text{sen}\, x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

66. $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2} x\tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$

En los problemas 67-70, use una fórmula de reducción para los problemas 63-66 para evaluar la integral dada.

67. $\displaystyle\int \text{sen}^3 x\,dx$ **68.** $\displaystyle\int \sec^4 x\,dx$

69. $\displaystyle\int \cos^3 10x\,dx$ **70.** $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$

71. Use el problema 64 para demostrar que para $n \geq 2$,
$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-2} x\,dx.$$

72. Demuestre cómo el uso repetido de la fórmula en el problema 71 sirve para obtener los siguientes resultados:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n},$
n par y $n \geq 2$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n},$
n impar y $n \geq 3$

73. Use el inciso *a)* del problema 72 para evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^8 x\,dx.$

74. Use el inciso *b)* del problema 72 para evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^5 x\,dx.$

≡ Piense en ello

En los problemas 75-82, la integración por partes es algo más desafiante. Evalúe la integral dada.

75. $\displaystyle\int e^{2x}\tan^{-1} e^x\,dx$ **76.** $\displaystyle\int (\text{sen}^{-1} x)^2\,dx$

77. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$ **78.** $\displaystyle\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\,dx$

79. $\displaystyle\int xe^x\,\text{sen}\, x\,dx$ **80.** $\displaystyle\int xe^{-x}\cos 2x\,dx$

81. $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ **82.** $\displaystyle\int e^{\text{sen}^{-1} x}\,dx$

≡ Problemas con calculadora/SAC

83. ***a)*** Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = 3 + 2\,\text{sen}^2 x - 5\,\text{sen}^4 x$.

b) Encuentre el área bajo la gráfica de la función dada en el inciso *a)* sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

84. ***a)*** Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $y = x\,\text{sen}\, x$ y $y = x\cos x$.

b) Encuentre el área de la región acotada por las gráficas sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, donde x_1 y x_2 son las coordenadas x positivas correspondientes a los puntos primero y segundo de intersección de las gráficas para $x > 0$.

2.4 Integración de potencias de funciones trigonométricas

Introducción En la sección 1.4 vimos cómo integrar $\text{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$. En esta sección veremos cómo integrar potencias superiores de sen x y cos x, determinados productos de potencias de sen x y cos x, y productos de potencias de sec x y tan x. Las técnicas ilustradas en esta sección dependen de identidades trigonométricas.

Integrales de la forma $\int \text{sen}^m x\cos^n x\,dx$ Para evaluar integrales del tipo
$$\int \text{sen}^m x\,\cos^n x\,dx, \tag{1}$$
distinguimos dos casos.

CASO I: *m* o *n* es un entero positivo impar

Primero suponemos que $m = 2k + 1$ en (1) es un entero positivo impar. Entonces:

- Empezamos por separar el factor $\operatorname{sen} x$ de $\operatorname{sen}^{2k+1} x$, es decir, se escribe $\operatorname{sen}^{2k+1} x = \operatorname{sen}^{2k} x$ $\operatorname{sen} x$, donde ahora $2k$ es par.
- Usamos la identidad pitagórica básica $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, para volver a escribir
$$\operatorname{sen}^{2k} x = (\operatorname{sen}^2 x)^k = (1 - \cos^2 x)^k.$$
- Desarrollamos el binomio $(1 - \cos^2 x)^k$.

De esta manera es posible expresar el integrando en (1) como una suma de potencias de $\cos x$ multiplicadas por $\operatorname{sen} x$. Así, la integral original puede expresarse como una suma de integrales, cada una de la cuales tiene la forma identificable

$$\int \cos^r x \operatorname{sen} x\, dx = -\int \overbrace{(\cos x)^r}^{u^r} \overbrace{(-\operatorname{sen} x\, dx)}^{du} = -\int u^r\, du.$$

Si $n = 2k + 1$ es un entero positivo impar en (1), entonces el procedimiento es el mismo, excepto que escribimos $\cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x \cos x$, usamos $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, y escribimos la integral como una suma de integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^r x \cos x\, dx = \int \overbrace{(\operatorname{sen} x)^r}^{u^r} \overbrace{(\cos x\, dx)}^{du} = \int u^r\, du.$$

Observamos que el exponente r no necesita ser un entero.

EJEMPLO 1 Caso I de la integral (1)

Evalúe $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx.$

Solución Empezamos por escribir la potencia de $\operatorname{sen} x$ como $\operatorname{sen}^5 x = \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= \int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int \cos^2 x (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx && \leftarrow \text{reemplace } \operatorname{sen}^2 x \text{ por } 1 - \cos^2 x \\
&= \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int \cos^2 x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x\, dx && \leftarrow \text{se escribe como tres integrales} \\
&= -\int \overbrace{(\cos x)^2}^{u^2} \overbrace{(-\operatorname{sen} x\, dx)}^{du} + 2\int \overbrace{(\cos x)^4}^{u^4} \overbrace{(-\operatorname{sen} x\, dx)}^{du} - \int \overbrace{(\cos x)^6}^{u^6} \overbrace{(-\operatorname{sen} x\, dx)}^{du} \\
&= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Caso I de la integral (1)

Evalúe $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx.$

Solución Como en el ejemplo 1, volvemos a escribir la potencia de $\operatorname{sen} x$ como $\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen} x\, dx + \int (\cos x)^2 (-\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Caso I de la integral (1)

Evalúe $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx$.

Solución En esta ocasión volvemos a escribir la potencia de $\cos x$ como $\cos^2 x \cos x$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \cos x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen}^4 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx \qquad \leftarrow \text{se escribe como dos integrales} \\
&= \int \overbrace{(\operatorname{sen} x)^4}^{u^4} \overbrace{(\cos x\, dx)}^{du} - \int \overbrace{(\operatorname{sen} x)^6}^{u^6} \overbrace{(\cos x\, dx)}^{du} \\
&= \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x - \frac{1}{7} \operatorname{sen}^7 x + C.
\end{aligned}$$

■

CASO II: *m* y *n* son ambos enteros no negativos pares

Cuando m y n son enteros no negativos pares, la evaluación de (1) depende de las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \tag{2}$$

En la sección 1.4 vimos las dos últimas identidades como las formas útiles para las fórmulas de la mitad de un ángulo para el seno y el coseno.

EJEMPLO 4 Uso de las identidades (2) en la integral (1)

Evalúe $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$.

Solución La integral se evaluará en dos formas. Empezamos por usar las fórmulas segunda y tercera en (2):

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{4} \int \left[1 - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right] dx \qquad \leftarrow \begin{array}{l}\text{tercera identidad en (2)} \\ \text{con } x \text{ sustituida por } 2x\end{array} \\
&= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx \\
&= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C.
\end{aligned}$$

Solución alterna Ahora usamos la primera fórmula en (2):

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx &= \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2\, dx \\
&= \int \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\, dx.
\end{aligned}$$

El resto de la solución es igual que antes. ■

EJEMPLO 5 Uso de las identidades (2) en la integral (1)

Evalúe $\int \cos^4 x\,dx$.

Solución Empezamos por volver a escribir $\cos^4 x$ como $(\cos^2 x)^2$ y luego usamos la tercera identidad en (2):

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\,dx &= \int (\cos^2 x)^2\,dx \\
&= \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx \quad \leftarrow \text{se usa la tercera fórmula en (2) por segunda ocasión} \\
&= \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right] dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C.
\end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ Para evaluar una integral que implique potencias de la secante y la tangente,

$$\int \tan^m x \sec^n x\,dx, \tag{3}$$

consideramos tres casos. El procedimiento en los dos primeros casos es semejante al caso I para la integral (1) en el sentido de que a partir del producto $\tan^m x \sec^n x$ descomponemos un factor para que funcione como parte de la diferencial du.

CASO I: *m* es un entero positivo impar

Cuando $m = 2k + 1$ es un entero positivo impar en (3), $2k$ es par. Entonces:

- Empezamos por separar el factor $\sec x \tan x$ a partir de $\tan^{2k+1} x \sec^n x$, es decir, escribimos $\tan^{2k+1} x \sec^n x = \tan^{2k} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x$, donde $2k$ ahora es par.
- Usamos la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para volver a escribir

$$\tan^{2k} x = (\tan^2 x)^k = (\sec^2 x - 1)^k.$$

- Desarrollamos el binomio $(\sec^2 x - 1)^k$.

De esta manera es posible expresar el integrando en (3) como una suma de potencias de $\sec x$ multiplicada por $\sec x \tan x$. Ahora, la integral original puede expresarse como una suma de integrales, cada una de las cuales tiene la forma identificable

$$\int \overbrace{(\sec x)^r}^{u^r}\overbrace{(\sec x \tan x\,dx)}^{du} = \int u^r\,du.$$

EJEMPLO 6 Caso I de la integral (3)

Evalúe $\int \tan^3 x \sec^7 x\,dx$.

Solución Al escribir $\tan^3 x \sec^7 x = \tan^2 x \sec^6 x \sec x \tan x$, la integral puede escribirse como dos integrales que pueden evaluarse:

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^7 x\,dx &= \int \tan^2 x \sec^6 x \sec x \tan x\,dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)\sec^6 x \sec x \tan x\,dx
\end{aligned}$$

$$= \int \overbrace{(\sec x)^8}^{u^8} \overbrace{(\sec x \tan x\, dx)}^{du} - \int \overbrace{(\sec x)^6}^{u^6} \overbrace{(\sec x \tan x\, dx)}^{du}$$

$$= \frac{1}{9}\sec^9 x - \frac{1}{7}\sec^7 x + C. \quad \blacksquare$$

CASO II: *n* es un entero positivo par

Sea $n = 2k$ un entero positivo par en (3). Entonces:

- Empezamos por separar el factor $\sec^2 x$ de $\sec^{2k} x \tan^m x$, es decir, escribimos $\sec^{2k} x \tan^m x = \sec^{2(k-1)} x \tan^m x \sec^2 x$.
- Usamos la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para volver a escribir

$$\sec^{2(k-1)} x = (\sec^2 x)^{k-1} = (1 + \tan^2 x)^{k-1}.$$

- Desarrollamos el binomio $(1 + \tan^2 x)^{k-1}$.

De esta manera es posible expresar el integrando en (3) como una suma de potencias de $\tan x$ multiplicadas por $\sec^2 x$. Así, la integral original puede expresarse como una suma de integrales, cada una de la cuales tiene la forma identificable

$$\int \overbrace{(\tan x)^r}^{u^r} \overbrace{(\sec^2 x\, dx)}^{du} = \int u^r\, du.$$

EJEMPLO 7 Caso II de la integral (3)

Evalúe $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x\, dx$.

Solución Volvemos a escribir el integrando usando $\sec^4 x = \sec^2 x \sec^2 x$:

$$\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\, dx = \int (\tan x)^{1/2} \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int (\tan x)^{1/2}(1 + \tan^2 x)\sec^2 x\, dx$$

$$= \int \overbrace{(\tan x)^{1/2}}^{u^{1/2}} \overbrace{(\sec^2 x\, dx)}^{du} + \int \overbrace{(\tan x)^{5/2}}^{u^{5/2}} \overbrace{(\sec^2 x\, dx)}^{du}$$

$$= \frac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + \frac{2}{7}(\tan x)^{7/2} + C. \quad \blacksquare$$

CASO III: *m* es par y *n* es impar

Finalmente, si m es un entero positivo par y n es un entero positivo impar, escribimos el integrando de (3) en términos de $\sec x$ y usamos integración por partes.

EJEMPLO 8 Caso III de la integral (3)

Evalúe $\int \tan^2 x \sec x\, dx$.

Solución Al escribir

$$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx$$

$$= \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx$$

encontramos dos integrales que ya fueron evaluadas:

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C_1, \tag{4}$$

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C_2. \tag{5}$$

◀ Para el resultado en (4), vea el ejemplo 5 en la sección 2.3. Para (5), vea (18) en la sección 1.4.

Al restar los resultados en (4) y (5) se llega al resultado deseado:

$$\int \tan^2 x \sec x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

Integrales del tipo

$$\int \cot^m x \csc^n x\,dx \qquad (6)$$

se manejan de manera análoga a (3). En este caso usamos la identidad $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$.

2.4 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-4.

Fundamentos

En los problemas 1-40, evalúe la integral indefinida. Observe que algunas integrales no caen, hablando estrictamente, en ninguno de los casos considerados en esta sección. Usted debe evaluar estas integrales aplicando métodos previos.

1. $\int (\operatorname{sen} x)^{1/2}\cos x\,dx$
2. $\int \cos^4 5x \operatorname{sen} 5x\,dx$
3. $\int \cos^3 x\,dx$
4. $\int \operatorname{sen}^3 4x\,dx$
5. $\int \operatorname{sen}^5 t\,dt$
6. $\int \cos^5 t\,dt$
7. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^3 x\,dx$
8. $\int \operatorname{sen}^5 2x\cos^2 2x\,dx$
9. $\int \operatorname{sen}^4 t\,dt$
10. $\int \cos^6\theta\,d\theta$
11. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx$
12. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$
13. $\int \operatorname{sen}^4 x\cos^4 x\,dx$
14. $\int \operatorname{sen}^2 3x\cos^2 3x\,dx$
15. $\int \tan^3 2t\sec^4 2t\,dt$
16. $\int (2 - \sqrt{\tan x})^2\sec^2 x\,dx$
17. $\int \tan^2 x\sec^3 x\,dx$
18. $\int \tan^2 3x\sec^2 3x\,dx$
19. $\int \tan^3 x(\sec x)^{-1/2}\,dx$
20. $\int \tan^3\frac{x}{2}\sec^3\frac{x}{2}\,dx$
21. $\int \tan^3 x\sec^5 x\,dx$
22. $\int \tan^5 x\sec x\,dx$
23. $\int \sec^5 x\,dx$
24. $\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$
25. $\int \cos^2 x\cot x\,dx$
26. $\int \operatorname{sen} x\sec^7 x\,dx$
27. $\int \cot^{10} x\csc^4 x\,dx$
28. $\int (1 + \csc^2 t)^2\,dt$
29. $\int \frac{\sec^4(1-t)}{\tan^8(1-t)}\,dt$
30. $\int \frac{\operatorname{sen}^3\sqrt{t}\cos^2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$
31. $\int (1 + \tan x)^2\sec x\,dx$
32. $\int (\tan x + \cot x)^2\,dx$
33. $\int \tan^4 x\,dx$
34. $\int \tan^5 x\,dx$
35. $\int \cot^3 t\,dt$
36. $\int \csc^5 t\,dt$
37. $\int (\tan^6 x - \tan^2 x)\,dx$
38. $\int \cot 2x\csc^{5/2} 2x\,dx$
39. $\int x\operatorname{sen}^3 x^2\,dx$
40. $\int x\tan^8(x^2)\sec^2(x^2)\,dx$

En los problemas 41-46, evalúe la integral definida dada.

41. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\sqrt{\cos\theta}\,d\theta$
42. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\cos^5 x\,dx$
43. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 2t\,dt$
44. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x\cos^2 x\,dx$
45. $\int_0^{\pi/4} \tan y\sec^4 y\,dy$
46. $\int_0^{\pi/3} \tan x\sec^{3/2} x\,dx$

En los problemas 47-52, use las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} mx\cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$$

$$\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

para evaluar la integral trigonométrica dada.

47. $\int \operatorname{sen} x\cos 2x\,dx$
48. $\int \cos 3x\cos 5x\,dx$

49. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x\, dx$ **50.** $\int \dfrac{5 - 3 \operatorname{sen} 2x}{\sec 6x}\, dx$

51. $\int_0^{\pi/6} \cos 2x \cos x\, dx$ **52.** $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \frac{3}{2}x \operatorname{sen} \frac{1}{2}x\, dx$

53. Demuestre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

54. Evalúe $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx.$

≡ Repaso de aplicaciones

En los problemas 55 y 56 se proporcionan las gráficas de $f(x) = \sec^2(x/2)$ (problema 55) y $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (problema 56). Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región R acotada por la función de f sobre el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ alrededor del eje indicado.

55. El eje x:

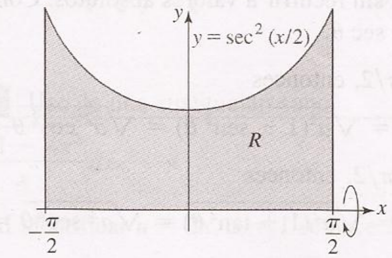


FIGURA 2.4.1 Región en el problema 55

56. La recta $y = 1$;

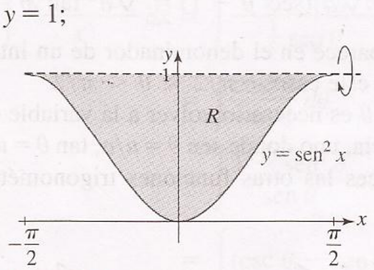


FIGURA 2.4.2 Región en el problema 56

57. Encuentre el área de la región R acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen}^3 x$ y $y = \cos^3 x$ sobre el intervalo $[-3\pi/4, \pi/4]$. Vea la FIGURA 2.4.3.

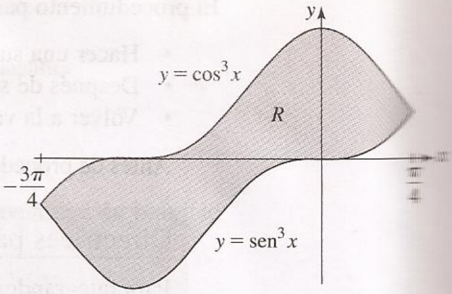


FIGURA 2.4.3 Gráficas para el problema 57

58. La gráfica de la ecuación $r = |\operatorname{sen} 4\theta \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta|$, $0 \le \theta \le 2\pi$, encierra una región que es un modelo matemático para la forma de una hoja de castaño. Vea la FIGURA 2.4.4. Se puede mostrar que el área acotada por esta gráfica está dada por $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta$. Encuentre esta área. [*Sugerencia*: Use una de las identidades dadas en las instrucciones para los problemas 47-52.]

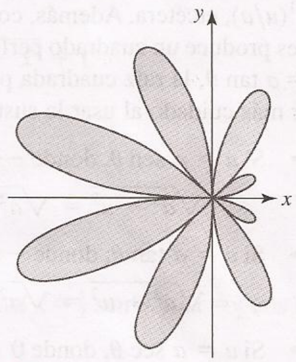
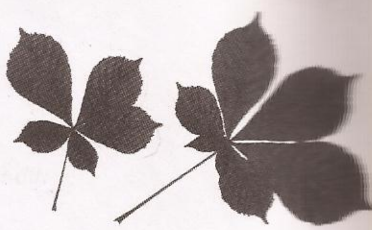


FIGURA 2.4.4 Región en el problema 58



Hojas de castaño

≡ Problemas con calculadora/SAC

59. Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $y = \cos^3 x$, $y = \cos^5 x$ y $y = \cos^7 x$ sobre el intervalo $[0, \pi]$. Use las gráficas para conjeturar los valores de las integrales definidas

$$\int_0^{\pi} \cos^3 x\, dx, \quad \int_0^{\pi} \cos^5 x\, dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\pi} \cos^7 x\, dx.$$

60. En el problema 59, ¿cuál cree que es el valor de $\int_0^{\pi} \cos^n x\, dx$, donde n es un entero positivo impar? Demuestre su conjetura.

2.5 Integración por sustituciones trigonométricas

Introducción Cuando un integrando contiene potencias enteras de x y potencias enteras de

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \quad \sqrt{a^2 + u^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{u^2 - a^2},\ a > 0 \qquad (1)$$

podemos evaluar la integral por medio de sustituciones trigonométricas. Los tres casos que consideramos en esta sección dependen, a su vez, de las identidades pitagóricas fundamentales escritas en la forma:

$$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta, \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \text{y} \qquad \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta.$$

El procedimiento para una integral indefinida es semejante al análisis en las secciones 1.4 y 2.2:

- Hacer una sustitución en una integral.
- Después de simplificar, efectuar la integración con respecto a la nueva variable.
- Volver a la variable original por resustitución.

Antes de proceder, se harán corresponder la sustitución trigonométrica y los radicales en (1).

Directrices para las sustituciones trigonométricas

Para integrandos que contienen

- $\sqrt{a^2 - u^2}, a > 0$, sea $u = a$ sen θ, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.
- $\sqrt{a^2 + u^2}, a > 0$, sea $u = a \tan \theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.
- $\sqrt{u^2 - a^2}, a > 0$, sea $u = a \sec \theta$, donde $\begin{cases} 0 \le \theta < \pi/2, & \text{si } u \ge a \\ \pi/2 < \theta \le \pi, & \text{si } u \le -a. \end{cases}$

Vea los formularios básicos para un repaso de las funciones trigonométricas inversas.

En cada caso, la restricción impuesta sobre la variable θ es precisamente la que acompaña a la función trigonométrica inversa correspondiente. En otras palabras, si queremos escribir $\theta = \text{sen}^{-1}(u/a)$, etcétera. Además, con ayuda de las identidades anteriores, cada una de estas sustituciones produce un cuadrado perfecto. Con la restricción sobre θ para las sustituciones $u = a$ sen θ y $u = a \tan \theta$, la raíz cuadrada puede tomarse sin recurrir a valores absolutos. Como verá, debe tener más cuidado al usar la sustitución $u = a \sec \theta$.

- Si $u = a$ sen θ, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, entonces
$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta.$$
- Si $u = a \tan \theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, entonces
$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta.$$
- Si $u = a \sec \theta$, donde $0 \le \theta < \pi/2$ o $\pi/2 < \theta \le \pi$, entonces
$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a|\tan \theta|.$$

Cuando una expresión como $\sqrt{a^2 - u^2}$ aparece en el denominador de un integrando, hay una restricción adicional sobre la variable θ; en este caso, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Después de llevar a cabo la integración en θ es necesario volver a la variable original x. Si se construye un triángulo rectángulo de referencia, uno donde sen $\theta = u/a$, $\tan \theta = u/a$, o $\sec \theta = u/a$ como se muestra en la FIGURA 2.5.1, entonces las otras funciones trigonométricas pueden expresarse fácilmente en términos de u.

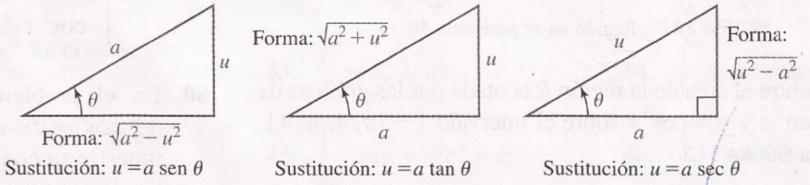


FIGURA 2.5.1 Triángulos rectángulos de referencia usados para expresar funciones trigonométricas en términos de una expresión algebraica en u y a

En los dos primeros ejemplos, el integrando contiene la forma radical $\sqrt{a^2 - u^2}$.

EJEMPLO 1 Uso de una sustitución seno

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx$.

Solución Al identificar $u = x$ y $a = 3$ se llega a las sustituciones

$$x = 3 \operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad dx = 3 \cos \theta \, d\theta,$$

donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. La integral se vuelve

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{9\,\text{sen}^2\,\theta}{\sqrt{9-9\,\text{sen}^2\,\theta}}(3\cos\theta\,d\theta) \leftarrow \text{se simplifica}$$
$$= 9\int \text{sen}^2\,\theta\,d\theta.$$

Recuerde que para evaluar esta última integral trigonométrica usamos la identidad de la mitad del ángulo $\text{sen}^2\,\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{9}{2}\int (1-\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\text{sen}\,2\theta + C$$
$$= \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{2}\text{sen}\,\theta\cos\theta + C. \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble}$$

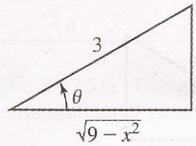


FIGURA 2.5.2 Triángulo rectángulo en el ejemplo 1

Para expresar este resultado de nuevo en términos de la variable x, usamos $\text{sen}\,\theta = x/3$ y $\theta = \text{sen}^{-1}(x/3)$. Luego, por el triángulo rectángulo de referencia en la FIGURA 2.5.2 vemos que $\cos\theta = \sqrt{9-x^2}/3$, de modo que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{9}{2}\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C.$$ ■

EJEMPLO 2 Uso de una sustitución seno

Evalúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}\,dx$.

Solución Al identificar $u = 2x$, $a = 1$ se hace $2x = \text{sen}\,\theta$, y así $x = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta$ y $dx = \frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta$. Entonces

$$\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-\text{sen}^2\,\theta}}{\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta}\left(\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta\right) \leftarrow \text{se simplifica}$$
$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta}\,d\theta$$
$$= \int \frac{1-\text{sen}^2\,\theta}{\text{sen}\,\theta}\,d\theta \leftarrow \text{se usa división término a término}$$
$$= \int (\csc\theta - \text{sen}\,\theta)\,d\theta \leftarrow \text{fórmulas 16 y 7 en la tabla 2.1.1}$$
$$= \ln|\csc\theta - \cot\theta| + \cos\theta + C.$$

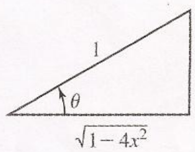


FIGURA 2.5.3 Triángulo rectángulo en el ejemplo 2

En la FIGURA 2.5.3 se ha construido un triángulo rectángulo para el cual $\text{sen}\,\theta = 2x$ y $\cos\theta = \sqrt{1-4x^2}$. En consecuencia, $\csc\theta = 1/\text{sen}\,\theta = 1/(2x)$ y $\cot\theta = \cos\theta/\text{sen}\,\theta = \sqrt{1-4x^2}/(2x)$. Por tanto, el resultado obtenido al integrar con respecto a θ puede escribirse en términos de x como

$$\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}\,dx = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}\right| + \sqrt{1-4x^2} + C.$$ ■

Como recordatorio para las habilidades de integración, se solicita que el lector compruebe periódicamente que la derivada de la antiderivada que obtuvo es el integrando de la integral original. La derivada de la respuesta final en el ejemplo 2,

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}\right| + \sqrt{1-4x^2} + C\right] = -\frac{-1+4x^2+\sqrt{1-4x^2}}{x(-1+\sqrt{1-4x^2})},$$

está antes, no en el integrando en el ejemplo 2. Use álgebra para resolver la diferencia entre este resultado y el integrando $\sqrt{1-4x^2}/x$.

En los dos ejemplos siguientes, el integrando contiene una potencia entera de la forma radical $\sqrt{a^2 + u^2}$.

EJEMPLO 3 Uso de una sustitución tangente

Evalúe $\displaystyle\int \frac{1}{(4 + x^2)^{3/2}}\, dx$.

Solución Observe que el integrando es una potencia entera de $\sqrt{4 + x^2}$, puesto que $(4 + x^2)^{3/2} = \left(\sqrt{4 + x^2}\right)^3$. Luego, cuando $u = x$, $x = 2\tan\theta$ y $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$ se tiene $\sqrt{4 + x^2} = \sqrt{4\sec^2\theta} = 2\sec\theta$ y $(4 + x^2)^{3/2} = 8\sec^3\theta$. Por tanto,

$$\int \frac{1}{(4 + x^2)^{3/2}}\, dx = \int \frac{1}{8\sec^3\theta}(2\sec^2\theta\, d\theta)$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta + C.$$

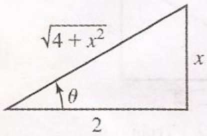


FIGURA 2.5.4 Triángulo rectángulo en el ejemplo 3

A partir del triángulo en la FIGURA 2.5.4, vemos que sen $\theta = x/\sqrt{4 + x^2}$. Por tanto,

$$\int \frac{1}{(4 + x^2)^{3/2}}\, dx = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} + C.$$

EJEMPLO 4 Longitud de arco

Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ sobre el intervalo $[0, 1]$.

Solución Recuerde que la fórmula para la longitud de arco es $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$. Puesto que $dy/dx = x$, tenemos

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx.$$

Luego, si $u = x$, entonces se sustituye $x\tan\theta$ y $dx = \sec^2\theta\, d\theta$. Los límites de integración θ en la integral trigonométrica definida se obtienen a partir de los límites x en la integral original:

$$x = 0: \qquad \theta = \tan^{-1} 0 = 0$$

y $\qquad x = 1: \qquad \theta = \tan^{-1} 1 = \pi/4.$

En consecuencia, $\displaystyle L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2\theta}\,\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\, d\theta.$$

La integral definida de $\sec^3\theta$ se encontró en el ejemplo 5 de la sección 2.3 usando integración por partes:

$$L = \left(\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta|\right)\Bigg]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\left|\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) \approx 1.1478.$$

En los dos ejemplos siguientes, los integrandos contienen una potencia entera de la forma radical $\sqrt{u^2 - a^2}$.

EJEMPLO 5 Uso de una sustitución secante

Evalúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^4}\, dx$ suponiendo que $x > 4$.

Solución Si $u = x$ y $x = 4\sec\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$, y $dx = 4\sec\theta\tan\theta\, d\theta$, la integral se vuelve

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}\,dx = \int \frac{\sqrt{16\sec^2\theta - 16}}{256\sec^4\theta}(4\sec\theta\tan\theta\, d\theta)$$
$$= \frac{1}{16}\int \frac{\tan^2\theta}{\sec^3\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^3\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int (\operatorname{sen}\theta)^2(\cos\theta\, d\theta)$$
$$= \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3\theta + C.$$

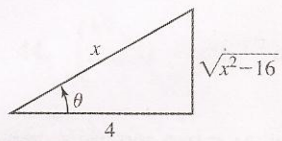


FIGURA 2.5.5 Triángulo rectángulo en el ejemplo 5

El triángulo rectángulo en la FIGURA 2.5.5 se construyó de modo que $\sec\theta = x/4$ o $\cos\theta = 4/x$, por lo que vemos que $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{x^2-16}/x$. Debido a que $\operatorname{sen}^3 x = (\sqrt{x^2-16})^3/x^3$, se concluye que

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}\,dx = \frac{1}{48}\frac{(x^2-16)^{3/2}}{x^3} + C.$$ ■

EJEMPLO 6 Una integral definida

Evalúe $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$

Solución Se identifica $u = x$ y $a = 1$ y usamos las sustituciones $x = \sec\theta$ y $dx = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$. En este caso suponemos que $\pi/2 < \theta \le \pi$ puesto que el intervalo de integración indica que $x \le -a$, donde $-a = -1$. Vea la FIGURA 2.5.6 para una gráfica del integrando $f(x) = \sqrt{x^2-1}/x$.

Así como en el ejemplo 4, obtenemos los límites θ de integración a partir de los límites de integración originales:

$$x = -2: \quad \theta = \sec^{-1}(-2) = \frac{2\pi}{3}$$
$$x = -1: \quad \theta = \sec^{-1}(-1) = \pi.$$

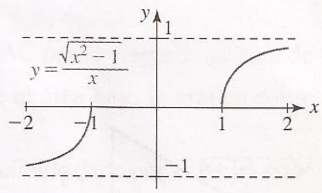


FIGURA 2.5.6 Gráfica del integrando en el ejemplo 6

En consecuencia, $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}(\sec\theta\tan\theta\, d\theta)$

$$= \int_{2\pi/3}^{\pi} \sqrt{\tan^2\theta}(\tan\theta\, d\theta).$$

Porque $\pi/2 < \theta \le \pi$, $\tan\theta \le 0$, $\sqrt{\tan^2\theta} = |\tan\theta| = -\tan\theta$, la última integral se vuelve

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int_{2\pi/3}^{\pi} \sqrt{\tan^2\theta}(\tan\theta\, d\theta)$$
$$= -\int_{2\pi/3}^{\pi} \tan^2\theta\, d\theta \leftarrow \text{se usa una identidad trigonométrica}$$
$$= -\int_{2\pi/3}^{\pi} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta$$
$$= -(\tan\theta - \theta)\Big]_{2\pi/3}^{\pi}$$
$$= -\left[(0-\pi) - \left(-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.6849.$$

La respuesta negativa tiene sentido, puesto que en la figura 2.5.6 vemos que $f(x) \le 0$ sobre el intervalo $[-2, -1]$. ■

Integrandos que contienen una cuadrática Una sustitución trigonométrica también puede usarse cuando un integrando contiene una potencia entera de la raíz cuadrada de una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$. Al completar el cuadrado, el radical puede expresarse como una de las formas:

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \quad \sqrt{a^2 + u^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{u^2 - a^2}.$$

Si, por ejemplo, el integrando contiene una potencia entera de

$$\sqrt{x^2 + 4x + 7} = \sqrt{3 + (x + 2)^2},$$

es necesario identificar $u = x + 2$, $a = \sqrt{3}$, y usar la sustitución $x + 2 = \sqrt{3}\tan\theta$.

EJEMPLO 7 Completar el cuadrado

Evalúe $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + 8x + 25)^{3/2}}\,dx$.

Solución Al completar el cuadrado en x, reconocemos que el integrando contiene una potencia entera de $a^2 + u^2$,

$$\int \frac{1}{(x^2 + 8x + 25)^{3/2}}\,dx = \int \frac{1}{[9 + (x + 4)^2]^{3/2}}\,dx,$$

donde $u = x + 4$ y $a = 3$. Al usar las sustituciones $x + 4 = 3\tan\theta$ y $dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$ encontramos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 + 8x + 25)^{3/2}} &= \int \frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{[9 + 9\tan^2\theta]^{3/2}}\\ &= \frac{1}{9}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}\,d\theta\\ &= \frac{1}{9}\int \cos\theta\,d\theta\\ &= \frac{1}{9}\operatorname{sen}\theta + C.\end{aligned}$$

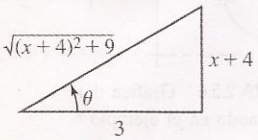


FIGURA 2.5.7 Triángulo rectángulo en el ejemplo 7

El examen del triángulo en la FIGURA 2.5.7 indica cómo expresar sen θ en términos de x. Se concluye que

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 8x + 25)^{3/2}} = \frac{1}{9}\frac{x + 4}{\sqrt{(x + 4)^2 + 9}} + C = \frac{x + 4}{9\sqrt{x^2 + 8x + 25}} + C.$$

NOTAS DESDE EL AULA

Integrales de la forma

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}\,du, \quad \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\,du \quad \text{y} \quad \int \frac{1}{u^2 - a^2}\,du$$

pueden evaluarse rápidamente por medio de sustituciones trigonométricas. Al analizar la tabla 2.1.1 de fórmulas integrales vemos que cada una de estas fórmulas es un logaritmo. Pero quienes tienen una buena memoria deben reconocer que éstas son las formas integrales indefinidas de las fórmulas de diferenciación para tres de las funciones hiperbólicas inversas:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}\frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a^2 - u^2}\frac{du}{dx}.$$

Toda función hiperbólica inversa puede expresarse como un logaritmo natural.

2.5 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-5.

Fundamentos

En los problemas 1-38, evalúe la integral indefinida dada por medio de una sustitución trigonométrica cuando así convenga. Usted debe evaluar algunas de las integrales sin una sustitución.

1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$
2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-36}}\,dx$
4. $\int \sqrt{3-x^2}\,dx$
5. $\int x\sqrt{x^2+7}\,dx$
6. $\int (1-x^2)^{3/2}\,dx$
7. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$
8. $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$
9. $\int \frac{1}{(x^2-4)^{3/2}}\,dx$
10. $\int (9-x^2)^{3/2}\,dx$
11. $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$
12. $\int \frac{x}{25+x^2}\,dx$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$
14. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-25}}\,dx$
15. $\int \frac{1}{x\sqrt{16-x^2}}\,dx$
16. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$
17. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$
18. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$
19. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$
20. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx$
21. $\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}}\,dx$
22. $\int \frac{x^2}{(4+x^2)^{3/2}}\,dx$
23. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$
24. $\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}\,dx$
25. $\int \frac{1}{(4+x^2)^{5/2}}\,dx$
26. $\int \frac{x^3}{(1-x^2)^{5/2}}\,dx$
27. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx$
28. $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$
29. $\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^2}\,dx$
30. $\int \frac{1}{(11-10x-x^2)^2}\,dx$
31. $\int \frac{x-3}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\,dx$
32. $\int \frac{1}{(x^2+2x)^{3/2}}\,dx$
33. $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}\,dx$
34. $\int \frac{1}{4+(x-3)^2}\,dx$
35. $\int \frac{x^2}{x^2+16}\,dx$
36. $\int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x}\,dx$
37. $\int \sqrt{6x-x^2}\,dx$
38. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$

En los problemas 39-44, evalúe la integral definida dada.

39. $\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx$
40. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
41. $\int_0^5 \frac{1}{(x^2+25)^{3/2}}\,dx$
42. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$
43. $\int_1^{6/5} \frac{16}{x^4\sqrt{4-x^2}}\,dx$
44. $\int_0^{1/2} x^3(1+x^2)^{-1/2}\,dx$

En los problemas 45 y 46, use integración por partes seguida de una sustitución trigonométrica.

45. $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$
46. $\int x\cos^{-1} x\,dx$

Repaso de aplicaciones

47. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{x\sqrt{3+x^2}}$. Encuentre el área bajo la gráfica sobre el intervalo $[1, \sqrt{3}]$.

48. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = x^5\sqrt{1-x^2}$. Encuentre el área bajo la gráfica sobre el intervalo [0, 1].

49. Demuestre que el área de un círculo dado por $x^2 + y^2 = a^2$ es πa^2.

50. Demuestre que el área de una elipse dada por $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ es πab.

51. La región descrita en el problema 47 gira alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

52. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \frac{4}{4+x^2}$, $x = 2$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

53. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = x\sqrt{4+x^2}$, $x = 2$ y $y = 0$ gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

54. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x = 1$ y $y = 0$ gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

55. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \ln x$ sobre el intervalo $[1, \sqrt{3}]$.

56. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ sobre el intervalo [1, 2].

57. Una mujer, M, empezando en el origen, se mueve en la dirección del eje y positivo jalando una masa a lo largo de la curva C, denominada **tractriz**, indicada en la FIGURA 2.5.8. La masa, que inicialmente está sobre el eje x en

$(a, 0)$, es jalada por una cuerda de longitud constante a que mantiene durante todo el movimiento.

a) Demuestre que la ecuación diferencial de la tractriz es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

b) Resuelva la ecuación en el inciso *a*). Suponga que el punto inicial sobre el eje x es $(10, 0)$ y que la longitud de la cuerda es $a = 10$ pies.

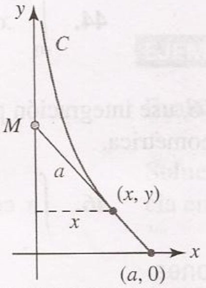


FIGURA 2.5.8 Tractriz en el problema 57

58. La región acotada por la gráfica de $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, $r < a$, gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución o **toroide**. Vea la FIGURA 2.5.9.

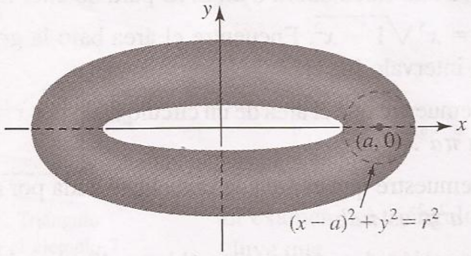


FIGURA 2.5.9 Toroide en el problema 58

59. Encuentre la fuerza del fluido sobre un lado de la placa vertical mostrada en la FIGURA 2.5.10. Suponga que la placa está sumergida en agua y que las dimensiones están en pies.

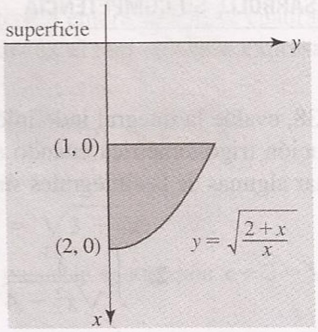


FIGURA 2.5.10 Placa sumergida en el problema 59

60. Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$.

Piense en ello

61. Evalúe las siguientes integrales por medio de una sustitución trigonométrica idónea.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int \sqrt{e^{2x} - 1}\,dx$

62. Encuentre el área de la región en forma creciente sombreada en la FIGURA 2.5.11. La región comprendida fuera del círculo de radio a pero dentro del círculo de radio b, $a \neq b$, se denomina **luna**.

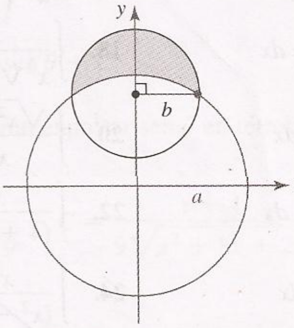


FIGURA 2.5.11 Luna en el problema 62

2.6 Fracciones parciales

Introducción Cuando se suman dos funciones racionales, por ejemplo $g(x) = 2/(x + 5)$ y $h(x) = 1/(x + 1)$, los términos se combinan por medio de un denominador común:

$$g(x) + h(x) = \frac{2}{x + 5} + \frac{1}{x + 1} = \frac{2}{x + 5}\left(\frac{x + 1}{x + 1}\right) + \frac{1}{x + 1}\left(\frac{x + 5}{x + 5}\right). \tag{1}$$

Al sumar los denominadores en el miembro derecho de (1) obtenemos la función racional simple

$$f(x) = \frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}. \tag{2}$$

Ahora suponga que es necesario integrar la función f. Por supuesto, la solución es evidente: usamos la igualdad de (1) y (2) para escribir

$$\int \frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}\,dx = \int \left[\frac{2}{x + 5} + \frac{1}{x + 1}\right] dx = 2\ln|x + 5| + \ln|x + 1| + C.$$

Este ejemplo ilustra un procedimiento para integrar ciertas funciones racionales $f(x) = p(x)/q(x)$. Este método consiste en invertir el proceso ilustrado en (1); en otras palabras, empezamos con una función racional —como (2)— y la separamos en fracciones componentes más simples $g(x) = 2/(x + 5)$ y $h(x) = 1/(x + 1)$, denominadas **fracciones parciales**. Luego evaluamos la integral término a término.

Fracciones parciales El proceso algebraico para separar una expresión racional, como (2), en fracciones parciales se denomina **descomposición en fracciones parciales**. Por conveniencia supondremos que la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, $q(x) \neq 0$, es una **fracción propia** o una **expresión racional propia**; es decir, que el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. También supondremos que $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes.

En esta sección estudiaremos cuatro casos de descomposición en fracciones parciales.

Factores lineales distintos El siguiente hecho del álgebra se plantea sin demostración. Si el denominador $q(x)$ contiene un producto de n factores lineales distintos,

$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n),$$

donde las a_i y b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de $f(x) = p(x)/q(x)$ contienen la suma

$$\frac{C_1}{a_1x + b_1} + \frac{C_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{C_n}{a_nx + b_n}.$$

En otras palabras, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada uno de los factores lineales $a_ix + b_i$.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)}\,dx$.

Solución Se establece la hipótesis de que el integrando puede escribirse como

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}.$$

Al combinar los términos del miembro derecho de la ecuación sobre un común denominador obtenemos

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A(x + 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)}.$$

Puesto que los denominadores son iguales, los numeradores de las dos expresiones deben ser idénticamente iguales:

$$2x + 1 = A(x + 3) + B(x - 1). \tag{3}$$

Puesto que la última línea es una identidad, los coeficientes de las potencias de x son los mismos

$$\overbrace{2x + 1x^0 = (A + B)x}^{\text{iguales}} + \underbrace{(3A - B)x^0}_{\text{iguales}}$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ 1 &= 3A - B. \end{aligned} \tag{4}$$

Al sumar las dos ecuaciones obtenemos $3 = 4A$, de modo que encontramos $A = \frac{3}{4}$. Luego, al sustituir este valor en cualquier ecuación de (4) obtenemos $B = \frac{5}{4}$. Por tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x - 1} + \frac{\frac{5}{4}}{x + 3}.$$

En consecuencia,

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}\,dx = \int \left[\frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{5}{4}}{x+3}\right] dx = \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{5}{4}\ln|x+3| + C. \quad ■$$

Un atajo que vale la pena conocer Si el denominador contiene, por ejemplo, tres factores lineales, como en $\dfrac{4x^2-x+1}{(x-1)(x+3)(x-6)}$, entonces la descomposición en fracciones parciales aparece como sigue:

$$\frac{4x^2-x+1}{(x-1)(x+3)(x-6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}.$$

Al seguir los mismos pasos que en el ejemplo 1, sería deseable encontrar que el análogo de (4) ahora son tres ecuaciones en las tres incógnitas A, B y C. La cuestión es ésta: mientras más fracciones lineales haya en el denominador, más grande es el sistema de ecuaciones que habrá que resolver. Hay un procedimiento algebraico que vale la pena conocer porque permite abreviar algo del álgebra. Para ilustrarlo, se volverá a la identidad (3). Puesto que la igualdad es cierta para todo valor de x, se cumple para $x=1$ y $x=-3$, *los ceros del denominador*. Al hacer $x=1$ en (3) obtenemos $3=4A$, a partir de lo cual se concluye de inmediato que $A=\frac{3}{4}$. En forma semejante, al hacer $x=-3$ en (3) obtenemos $-5=(-4)B$ o $B=\frac{5}{4}$.

Vea las *Notas desde el aula* al final de esta sección para consultar otro método rápido para determinar las constantes.

EJEMPLO 2 Área bajo una gráfica

Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$ sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$.

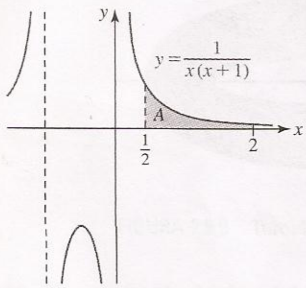


FIGURA 2.6.1 Área bajo la gráfica en el ejemplo 2

Solución El área en cuestión se muestra en la FIGURA 2.6.1. Puesto que $f(x)$ es positiva para toda x en el intervalo, el área es la integral definida

$$A = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x(x+1)}\,dx.$$

Al usar fracciones parciales

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

se concluye que

$$1 = A(x+1) + Bx. \tag{5}$$

Al seguir el atajo previo a este ejemplo, vemos, a la vez, que $x=0$ y $x=-1$ en (5) y obtenemos $A=1$ y $B=-1$. En consecuencia,

$$A = \int_{1/2}^{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] dx = \left(\ln|x| - \ln|x+1|\right)\Big]_{1/2}^{2}$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big]_{1/2}^{2} = \ln 2 \approx 0.6931. \quad ■$$

Factores lineales repetidos Si el denominador de la función racional $f(x)=p(x)/q(x)$ contiene un factor lineal repetido $(ax+b)^n$, $n>1$, donde a y b son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de f contiene la suma

$$\frac{C_1}{ax+b} + \frac{C_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(ax+b)^n}.$$

En otras palabras, la descomposición en fracciones parciales de f contiene una fracción parcial para cada potencia de $ax+b$.

EJEMPLO 3 Factor lineal repetido

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3}\,dx.$

Solución La descomposición del integrando contiene una fracción parcial para cada una de las tres potencias de $x+1$:

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}.$$

Al igualar los numeradores obtenemos

$$x^2+2x+4 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C = Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C). \qquad (6)$$

Observe que al hacer $x=-1$ (el único cero del denominador) en (6) obtenemos sólo $C=3$. Pero los coeficientes de x^2 y x en (6) producen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= A \\ 2 &= 2A + B. \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones vemos que $A=1$ y $B=0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3}\,dx &= \int \left[\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^3}\right] dx \\ &= \int \left[\frac{1}{x+1} + 3(x+1)^{-3}\right] dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{3}{2}(x+1)^{-2} + D. \end{aligned}$$

Cuando el denominador $q(x)$ contiene factores lineales y también repetidos, se combinan los dos casos que acaban de considerarse.

EJEMPLO 4 Factor repetido y factor distinto

Evalúe $\displaystyle\int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}\,dx.$

Solución Puesto que x es un factor lineal repetido en el denominador del integrando, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto contiene una fracción parcial para cada una de las tres potencias de x y una fracción parcial para el factor lineal distinto $2x-1$:

$$\frac{6x-1}{x^3(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{2x-1}.$$

Después de escribir el miembro derecho sobre un común denominador, se igualan los numeradores:

$$\begin{aligned} 6x-1 &= Ax^2(2x-1) + Bx(2x-1) + C(2x-1) + Dx^3 & (7) \\ &= (2A+D)x^3 + (-A+2B)x^2 + (-B+2C)x - C. & (8) \end{aligned}$$

Si $x=0$ y $x=\frac{1}{2}$ en (7), encontramos $C=1$ y $D=16$, respectivamente. Entonces, al igualar los coeficientes de x^3 y x^2 en (8) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2A + D \\ 0 &= -A + 2B. \end{aligned}$$

Puesto que conocemos el valor de D, la primera ecuación produce $A = -\frac{1}{2}D = -8$. Luego, con la segunda obtenemos $B = \frac{1}{2}A = -4$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}\,dx &= \int \left[-\frac{8}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{16}{2x-1}\right] dx \\ &= -8\ln|x| + 4x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + 8\ln|2x-1| + E \\ &= 8\ln\left|\frac{2x-1}{x}\right| + 4x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + E. \end{aligned}$$

La palabra *irreducible* significa que la expresión cuadrática no se factoriza sobre el conjunto de los números reales.

Factores cuadráticos distintos Si el denominador de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene un producto de n factores cuadráticos *irreductibles*

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2)\cdots(a_nx^2 + b_nx + c_n),$$

donde los coeficientes a_i, b_i y c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales para f contiene la suma

$$\frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}.$$

En forma análoga al caso en que $q(x)$ contiene un producto de factores lineales distintos, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada uno de los factores cuadráticos $a_ix^2 + b_ix + c_i$.

EJEMPLO 5 Factor lineal repetido y uno cuadrático distinto

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^4 + 9x^2}\,dx$.

Solución A partir de $x^4 + 9x^2 = x^2(x^2 + 9)$, vemos que el problema combina el factor cuadrático irreductible $x^2 + 9$ con el factor lineal repetido x. En consecuencia, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x+3}{x^2(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 9}.$$

Al proceder como de costumbre, encontramos

$$x + 3 = Ax(x^2 + 9) + B(x^2 + 9) + (Cx + D)x^2 \tag{9}$$

$$= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 9Ax + 9B. \tag{10}$$

Al hacer $x = 0$ en (9) obtenemos $B = \frac{1}{3}$. Luego, con (10) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= B + D \\ 1 &= 9A. \end{aligned}$$

A partir de este sistema obtenemos $A = \frac{1}{9}$, $C = -\frac{1}{9}$ y $D = -\frac{1}{3}$. Así se llega a

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{x^2(x^2+9)}\,dx &= \int \left[\frac{\frac{1}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{9}x - \frac{1}{3}}{x^2 + 9}\right] dx \\
&= \int \left[\frac{\frac{1}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2} - \frac{1}{18}\frac{2x}{x^2+9} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+9}\right] dx \\
&= \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{1}{18}\ln(x^2+9) - \frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{x}{3} + E \\
&= \frac{1}{18}\ln\frac{x^2}{x^2+9} - \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{x}{3} + E.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Factores cuadráticos distintos

Evalúe $\displaystyle\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}\,dx$.

Solución Puesto que cada factor cuadrático en el denominador del integrando es irreductible, escribimos

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3}$$

a partir de lo cual encontramos

$$\begin{aligned} 4x &= (Ax + B)(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x^2 + 1) \\ &= (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (3A + 2B + C)x + (3B + D). \end{aligned}$$

Puesto que el denominador del integrando no tiene ceros reales, se comparan los coeficientes de las potencias de x:

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= 2A + B + D \\ 4 &= 3A + 2B + C \\ 0 &= 3B + D. \end{aligned}$$

Al resolver las ecuaciones obtenemos $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$ y $D = -3$. En consecuencia,

$$\int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)}\,dx = \int \left[\frac{x + 1}{x^2 + 1} - \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3}\right] dx.$$

Ahora, la integral de cada término sigue representando un ligero desafío. Para el primer término en el integrando usamos división término a término para escribir

$$\frac{x + 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}, \tag{11}$$

y luego en el segundo término se completa el cuadrado:

$$\frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3} = \frac{x + 1 + 2}{(x + 1)^2 + 2} = \frac{1}{2}\frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 2} + \frac{2}{(x + 1)^2 + 2}. \tag{12}$$

En los miembros derechos de (11) y (12) identificamos que las integrales de los términos primero y segundo son, respectivamente, de las formas $\int du/u$ y $\int du/(u^2 + a^2)$. Por último, obtenemos

$$\begin{aligned} &\int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)}\,dx \\ &= \int \left[\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2}\frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 2} - \frac{2}{(x + 1)^2 + (\sqrt{2})^2}\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln\left[(x + 1)^2 + 2\right] - \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + E \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3}\right) + \tan^{-1} x - \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + E. \end{aligned}$$

■

Factores cuadráticos repetidos Si el denominador de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene un factor cuadrático irreductible repetido $(ax^2 + bx + c)^n$, $n > 1$, donde a, b y c son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de f contiene la suma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Es decir, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada potencia de $ax^2 + bx + c$.

EJEMPLO 7 Factor cuadrático repetido

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}\,dx.$

Solución La descomposición en fracciones parciales del integrando

$$\frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)^2}$$

lleva a
$$\begin{aligned} x^2 &= (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + (4B + D) \end{aligned}$$

y
$$\begin{aligned} 0 &= A \\ 1 &= B \\ 0 &= 4A + C \\ 0 &= 4B + D. \end{aligned}$$

A partir de este sistema encontramos $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ y $D = -4$. En consecuencia,

$$\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx = \int \left[\frac{1}{x^2+4} - \frac{4}{(x^2+4)^2}\right] dx.$$

La integral del primer término es una tangente inversa. No obstante, para evaluar la integral del segundo término, empleamos la sustitución trigonométrica $x = 2\tan\theta$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx &= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4\tan^2\theta + 4)^2} \\ &= \frac{1}{8}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,d\theta = \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\, d\theta \\ &= \frac{1}{16}\int (1 + \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{16}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right) \leftarrow \text{aquí se usa la fórmula del ángulo doble} \\ &= \frac{1}{16}(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) \\ &= \frac{1}{16}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right] \\ &= \frac{1}{16}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2+4}\right]. \end{aligned}$$

Por tanto, la integral original es

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} - 4\left[\frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\,\frac{x}{x^2+4}\right] + E \\ &= \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+4} + E. \end{aligned}$$ ■

Revise la sección 1.3.

Fracciones impropias En cada uno de los ejemplos precedentes el integrando $f(x) = p(x)/q(x)$ era una fracción propia. Recordemos que cuando $f(x) = p(x)/q(x)$ es una **fracción impropia**, es decir cuando el grado de $p(x)$ es mayor que o igual al grado de $q(x)$, procedemos con una división larga.

EJEMPLO 8 El integrando es una fracción impropia

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2}\,dx.$

Solución El integrando se identifica como una fracción impropia y el numerador se divide entre el denominador:

$$\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} = x - 3 + \frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2}.$$

Luego, como el denominador se factoriza como $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, el residuo se descompone en fracciones parciales:

$$\frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+2}.$$

Con esta información, la evaluación de la integral es inmediata:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2}\,dx &= \int \left[x - 3 + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+2}\right] dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + \ln|x + 1| + 4\ln|x + 2| + C. \end{aligned}$$ ■

∫ NOTAS DESDE EL AULA

Hay otra forma, denominada **método de encubrimiento**, para determinar los coeficientes en una descomposición en fracciones parciales en el caso especial cuando el denominador del integrando es el producto de factores lineales distintos:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)}.$$

Este método se ilustrará por medio de un ejemplo específico. A partir del análisis anterior sabemos que existen constantes únicas A, B y C tales que

$$\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3}. \qquad (13)$$

Suponga que multiplicamos por $x - 1$, que se simplifica y luego se hace $x = 1$, a ambos miembros de esta última expresión. Puesto que los coeficientes de B y C son cero, obtenemos

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 2)(x + 3)}\right|_{x=1} = A \quad \text{o} \quad A = -1.$$

Escrito de otra forma,

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{\boxed{(x - 1)}\,(x - 2)(x + 3)}\right|_{x=1} = A$$

donde sombreamos o cubrimos el factor que se cancela cuando el miembro izquierdo de (13) se multiplica por $x - 1$. *Este factor cubierto no se evalúa* en $x = 1$. Luego, para obtener B y C simplemente evaluamos el miembro izquierdo de (13) mientras se cubren, a la vez, $x - 2$ y $x + 3$:

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)\,\boxed{(x - 2)}\,(x + 3)}\right|_{x=2} = B \quad \text{o} \quad B = \frac{11}{5}$$

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)\,(x - 2)\,\boxed{(x + 3)}}\right|_{x=-3} = C \quad \text{o} \quad C = -\frac{1}{5}.$$

Por tanto, obtenemos la descomposición

$$\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{\frac{11}{15}}{x - 2} + \frac{-\frac{1}{5}}{x + 3}.$$

2.6 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-5.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-8, escriba la forma idónea de la descomposición en fracciones parciales de la expresión dada. No evalúe los coeficientes.

1. $\dfrac{x - 1}{x^2 + x}$

2. $\dfrac{9x - 8}{(x - 3)(2x - 5)}$

3. $\dfrac{x^3}{(x - 1)(x + 2)^3}$

4. $\dfrac{2x^2 - 3}{x^3 + 6x^2}$

5. $\dfrac{4}{x^3(x^2 + 3)}$

6. $\dfrac{-x^2 + 3x + 7}{(x + 2)^2(x^2 + x + 1)}$

7. $\dfrac{2x^3 - x}{(x^2 + 9)^2}$

8. $\dfrac{3x^2 - x + 4}{x^4 + 2x^3 + x}$

En los problemas 9-42, use fracciones parciales para evaluar la integral dada.

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x - 2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{x(2x + 3)}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{2x^2 - x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{3x + 10}{x^2 + 2x}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 - 16}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2 - 25}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2 + 5x + 2}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x + 5}{(x + 4)(x^2 - 1)}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 6}{x^3 - x}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - 4x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{(4x^2-1)(x+7)}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{4t^2+3t-1}{t^3-t^2}\,dt$

22. $\displaystyle\int \frac{2x-11}{x^3+2x^2}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{t-1}{t^4+6t^3+9t^2}\,dt$

25. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+1)^3}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2-4)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+6x+5)^2}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-x+9}{x^5+2x^4}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x(x-3)^2(x+2)^2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x(x^2+1)}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x^2+3)}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^3(x^2+4)}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+13x^2+36}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{81}{x^4+27x}\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{4x+12}{(x-2)(x^2+4x+8)}\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{(x^2+4)^2}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$

En los problemas 43 y 44, proceda como en el ejemplo 7 para evaluar la integral dada.

43. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x-3}{x^4+8x^2+16}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+3)^2}\,dx$

En los problemas 45 y 46, proceda como en el ejemplo 8 para evaluar la integral dada.

45. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+4}{(x+1)^2}\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{x^5-10x^3}{x^4-10x^2+9}\,dx$

En los problemas 47-54, evalúe la integral definida dada.

47. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx$

48. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$

49. $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x-1}{(x+3)^2}\,dx$

50. $\displaystyle\int_1^5 \frac{2x+6}{x(x+1)^2}\,dx$

51. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+x^2+2x+2}\,dx$

52. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+8x^2+16}\,dx$

53. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}\,dx$

54. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^5+4x^4+5x^3}\,dx$

En los problemas 55-58, evalúe la integral definida dada usando primero la sustitución indicada seguida por fracciones parciales.

55. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}\,dx;\quad u^2 = 1-x^2$

56. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx;\quad u^2 = \frac{x-1}{x+1}$

57. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,dx;\quad u^3 = x+1$

58. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx;\quad u^6 = x$

≡ Repaso de aplicaciones

En los problemas 59 y 60, encuentre el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función.

59. $y = \dfrac{1}{x^2+2x-3};\quad [2,4]$

60. $y = \dfrac{x^3}{(x^2+1)(x^2+2)};\quad [0,4]$

En los problemas 61 y 62, encuentre el área acotada por la gráfica de la función dada y el eje x sobre el intervalo indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función.

61. $y = \dfrac{x}{(x+2)(x+3)};\quad [-1,1]$

62. $y = \dfrac{3x^3}{x^3-8};\quad [-2,1]$

En los problemas 63-66, encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada en el primer cuadrante por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor del eje indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada.

63. $y = \dfrac{2}{x(x+1)},\ x=1,\ x=3,\ y=0;\quad$ eje x

64. $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x+4)}},\ x=0,\ x=2,\ y=0;\quad$ eje x

65. $y = \dfrac{4}{(x+1)^2},\ x=0,\ x=1,\ y=0;\quad$ eje y

66. $y = \dfrac{8}{(x^2+1)(x^2+4)},\ x=0,\ x=1,\ y=0;\quad$ eje y

≡ Piense en ello

En los problemas 67-70, evalúe la integral dada haciendo primero la sustitución seguida de una descomposición en fracciones parciales.

67. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x + 2}\,dx$

68. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - \cos^3 x}\,dx$

69. $\displaystyle\int \frac{e^t}{(e^t+1)^2(e^t-2)}\,dt$

70. $\displaystyle\int \frac{e^{2t}}{(e^t+1)^3}\,dt$

71. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = e^x$ sobre el intervalo $[0, \ln 2]$. [*Sugerencia*: Evalúe la integral empezando con una sustitución.]

72. Explique por qué una descomposición en fracciones parciales podría ser innecesaria o inadecuada para la integral dada. Analice cómo es posible evaluar estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2-1)(x^2+1)}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+4}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+5)^2}\,dx$ *d)* $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}\,dx$

73. Aunque para evaluar

$$\int \frac{x^5}{(x-1)^{10}(x+1)^{10}}\,dx$$

puede usarse descomposición en fracciones parciales, sería necesario resolver 20 ecuaciones en 20 incógnitas. Evalúe la integral usando una técnica de integración más sencilla.

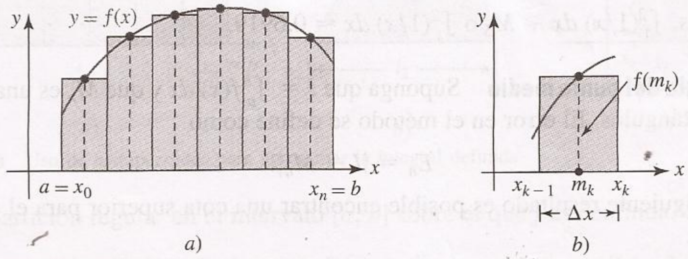
74. ¿Por qué la respuesta al problema 53 podría obtenerse *sin ningún trabajo*?

2.7 Integración aproximada

Introducción La vida en matemáticas podría ser bastante placentera si la antiderivada de cualquier función pudiera expresarse en términos de funciones elementales como funciones polinomiales, racionales, exponenciales o trigonométricas. Como se analizó en las *Notas desde el aula* en la sección 1.5, éste no es el caso. Por tanto, el teorema 1.5.1 no puede usarse para evaluar cualquier integral definida. Algunas veces lo mejor que podemos esperar es una aproximación del valor de una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. En esta última sección de la unidad consideraremos tres de estos procedimientos numéricos o de *integración aproximada*.

En el siguiente análisis, de nuevo será de utilidad interpretar la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ como el área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$. Aunque la continuidad de f es esencial, realmente no hay ningún requerimiento de que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo.

Regla del punto medio Una forma de aproximar una integral definida es proceder de la misma manera que en el análisis inicial sobre cómo encontrar el área bajo una gráfica; a saber: construir elementos rectangulares bajo la gráfica y sumar sus áreas. En particular, se supondrá que $y = f(x)$ es continua sobre $[a, b]$ y que este intervalo se divide en n subintervalos de la misma longitud $\Delta x = (b-a)/n$. (Recuerde que esta partición se denomina *partición regular*.) Una regla de aproximación sencilla, aunque razonablemente precisa, consiste en sumar las áreas de n elementos rectangulares cuyas longitudes se calculan en el punto medio de cada subintervalo. Vea la FIGURA 2.7.1*a*).



$x(x^2-2x+1)$

FIGURA 2.7.1 Uso de n rectángulos para aproximar la integral definida

Ahora, si $m_k = (x_{k-1} + x_k)/2$ es el punto medio de un subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces el área del elemento rectangular mostrado en la figura 2.7.1*b*) es

$$A_k = f(m_k)\,\Delta x = f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\Delta x.$$

Al identificar $a = x_0$ y $b = x_n$ y sumar las n áreas, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\Delta x + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\Delta x + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\Delta x.$$

Si Δx se sustituye por $(b-a)/n$, esta regla de aproximación del punto medio puede resumirse como sigue:

Definición 2.7.1 Regla del punto medio

La **regla del punto medio** es la aproximación $\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n$, donde

$$M_n = \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right] \quad (1)$$

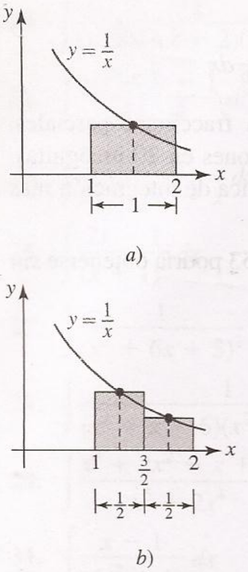


FIGURA 2.7.2 Rectángulos en el ejemplo 1

k	m_k	$f(m_k)$
1	$\frac{11}{10}$	$\frac{10}{11}$
2	$\frac{13}{10}$	$\frac{10}{13}$
3	$\frac{15}{10}$	$\frac{10}{15}$
4	$\frac{17}{10}$	$\frac{10}{17}$
5	$\frac{19}{10}$	$\frac{10}{19}$

Puesto que la función $f(x) = 1/x$ es continua sobre cualquier intervalo $[a, b]$ que no incluya el origen, se sabe que $\int_a^b (1/x)\,dx$ existe. Para efectos del siguiente ejemplo, olvide que sabe que $\ln|x|$ es una antiderivada de $1/x$.

EJEMPLO 1 Uso de (1)

Aproxime $\int_1^2 (1/x)\,dx$ por la regla del punto medio para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 5$.

Solución Como se muestra en la FIGURA 2.7.2*a*), el caso $n = 1$ es un rectángulo donde $\Delta x = 1$. El punto medio del intervalo es $m_1 = \frac{3}{2}$ y $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$. En consecuencia, por (1),

$$M_1 = 1 \cdot \frac{2}{3} \approx 0.6666.$$

Cuando $n = 2$, la figura 2.7.2*b*) muestra $\Delta x = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x = \frac{3}{2}$ y $x_2 = 1 + 2\Delta x = 2$. Los puntos medios de los intervalos $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ y $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ son, respectivamente, $m_1 = \frac{5}{4}$ y $m_2 = \frac{7}{4}$, de modo que $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{5}$ y $f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{4}{7}$. Por tanto, con (1) obtenemos

$$M_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{5} + \frac{4}{7}\right] \approx 0.6857.$$

Finalmente, para $n = 5$, $\Delta x = \frac{1}{5}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x = \frac{6}{5}$, $x_2 = 1 + 2\,\Delta x = \frac{7}{5}, \ldots, x_5 = 1 + 5\Delta x = 2$. Los puntos medios de los cinco subintervalos $\left[1, \frac{6}{5}\right], \left[\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right], \left[\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right], \left[\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right], \left[\frac{9}{5}, 2\right]$ y los valores funcionales correspondientes se proporcionan en la tabla de la derecha. Así, con la información en la tabla obtenemos

$$M_5 = \frac{1}{5}\left[\frac{10}{11} + \frac{10}{13} + \frac{10}{15} + \frac{10}{17} + \frac{10}{19}\right] \approx 0.6919.$$

En otras palabras, $\int_1^2 (1/x)\,dx \approx M_5$ o $\int_1^2 (1/x)\,dx \approx 0.6919$. ■

Error en la regla del punto medio Suponga que $I = \int_a^b f(x)\,dx$ y que M_n es una aproximación a I usando n rectángulos. El error en el método se define como

$$E_n = |I - M_n|.$$

Por medio del siguiente resultado es posible encontrar una cota superior para el error. Se omite la demostración.

Teorema 2.7.1 Cota para el error de la regla del punto medio

Si hay un número $M > 0$ tal que $|f''(x)| \le M$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$E_n \le \frac{M(b-a)^3}{24n^2}. \quad (2)$$

Observe que esta cota superior para el error E_n es inversamente proporcional a n^2. Por tanto, la precisión en el método mejora a medida que tomamos cada vez más rectángulos. Por ejemplo, si se duplica el número de rectángulos, el error E_{2n} es menor que un cuarto de la cota para el error para E_n. Así, vemos que $\lim_{n\to\infty} M_n = I$.

El siguiente ejemplo ilustra cómo la cota para el error (2) puede usarse para determinar el número de rectángulos con los que obtenemos una precisión prescrita.

EJEMPLO 2 Uso de (2)

Determine un valor de n de modo que (1) proporcione una aproximación a $\int_1^2 (1/x)\,dx$ precisa hasta dos cifras decimales.

Solución La regla del punto medio es precisa hasta dos cifras decimales para los valores de n para los cuales la cota superior $M(b-a)^3/24n^2$ para el error es estrictamente menor que 0.005. Para $f(x) = 1/x$, se tiene $f''(x) = 2/x^3$. Puesto que f'' decrece sobre $[1, 2]$, se concluye que $f''(x) \le f''(1) = 2$ para toda x en el intervalo. Así, con $M = 2$, $b - a = 1$, se tiene

Si se desea una precisión hasta tres cifras decimales, se usa 0.0005, etcétera.

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0.005 \qquad \text{o} \qquad n^2 > \frac{50}{3} \approx 16.67.$$

Al tomar $n \ge 5$ obtenemos la precisión deseada. ■

El ejemplo 2 indica que la tercera aproximación $\int_1^2 (1/x)\,dx \approx 0.6919$ obtenida en el ejemplo 1 es precisa hasta dos cifras decimales. Para efectos de comparación, el valor exacto de la integral, usando el teorema 1.5.1,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0.6931$$

es correcto hasta cuatro cifras decimales. Así, para $n = 5$ el error en el método E_n es aproximadamente 0.0012.

Regla trapezoidal Un método más conocido para aproximar una integral se basa en la validez de que es posible obtener una mejor estimación de $\int_a^b f(x)\,dx$ al sumar las áreas de trapezoides en lugar de rectángulos. Vea la FIGURA 2.7.3*a*). El área del trapezoide mostrado en la figura 2.7.3*b*) es $h(l_1 + l_2)/2$. Así, el área A_k del elemento trapezoidal mostrado en la figura 2.7.3*c*) es

$$A_k = \Delta x\,\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}.$$

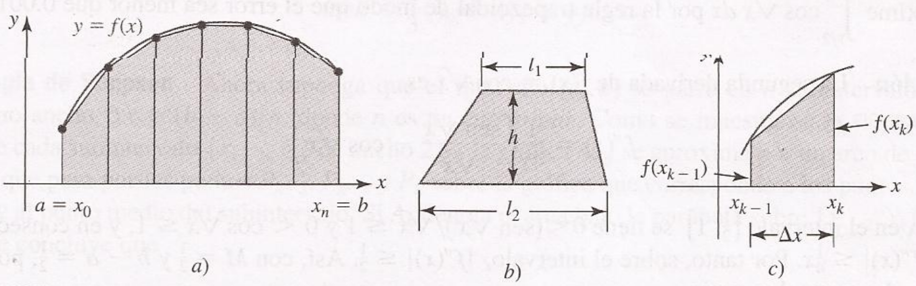


FIGURA 2.7.3 Uso de n trapezoides para aproximar la integral definida

Así, para una partición regular en el intervalo $[a, b]$ sobre el que f es continua, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x\,\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \Delta x\,\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + \Delta x\,\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}.$$

Esta nueva regla de aproximación se resume en la siguiente definición después de combinar términos semejantes y sustituir $\Delta x = (b-a)/n$.

Definición 2.7.2 Regla trapezoidal

La **regla trapezoidal** es la aproximación $\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n$, donde

$$T_n = \frac{b-a}{2n}\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \tag{3}$$

Error en la regla trapezoidal El error en el método para la regla trapezoidal está dado por $E_n = |I - T_n|$, donde $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Como lo demuestra el siguiente teorema, la cota del error para la regla trapezoidal es casi la misma que para la regla del punto medio.

Teorema 2.7.2 Cota para el error para la regla trapezoidal

Si existe un número $M > 0$ tal que $|f''(x)| \le M$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$E_n \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}. \tag{4}$$

k	x_k	$f(x_k)$
0	1	1
1	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{7}$
2	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$
5	$\frac{11}{6}$	$\frac{6}{11}$
6	2	$\frac{1}{2}$

EJEMPLO 3 Uso de (4) y (3)

Determine un valor de n de modo que la regla trapezoidal proporcione una aproximación a $\int_1^2 (1/x)\,dx$ precisa hasta dos cifras decimales. Aproxime la integral.

Solución Al usar la información en el ejemplo 2, de inmediato tenemos:

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0.005 \quad \text{o} \quad n^2 > \frac{100}{3} \approx 33.33.$$

En este caso se toma $n \ge 6$ para obtener la precisión deseada. Entonces, $\Delta x = \frac{1}{6}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x = \frac{7}{6}, \ldots, x_6 = 1 + 6\Delta x = 2$. Con la información en la tabla acompañante, (3) proporciona

$$T_6 = \frac{1}{12}\left[1 + 2\left(\frac{6}{7}\right) + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{6}{11}\right) + \frac{1}{2}\right] \approx 0.6949. \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Uso de (4) y (3)

Aproxime $\int_{1/2}^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ por la regla trapezoidal de modo que el error sea menor que 0.001.

Solución La segunda derivada de $f(x) = \cos\sqrt{x}$ es

$$f''(x) = \frac{1}{4x}\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \cos\sqrt{x}\right).$$

Para x en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ se tiene $0 < (\operatorname{sen}\sqrt{x})/\sqrt{x} \le 1$ y $0 < \cos\sqrt{x} \le 1$, y en consecuencia $|f''(x)| \le \frac{1}{4}x$. Por tanto, sobre el intervalo, $|f''(x)| \le \frac{1}{2}$. Así, con $M = \frac{1}{2}$ y $b - a = \frac{1}{2}$, por (4) se concluye que deseamos

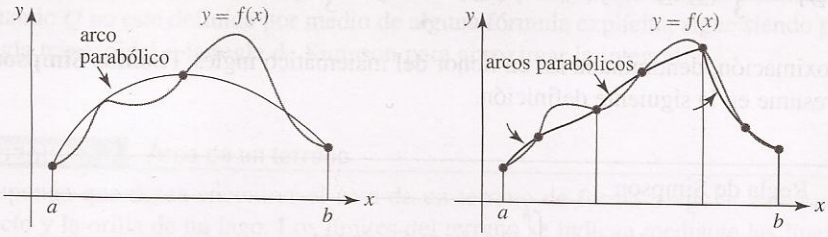
$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3}{12n^2} < 0.001 \quad \text{o} \quad n^2 > \frac{125}{24} \approx 5.21.$$

k	x_k	$f(x_k)$
0	$\frac{1}{2}$	0.7602
1	$\frac{2}{3}$	0.6848
2	$\frac{5}{6}$	0.6115
3	1	0.5403

Así, para obtener la precisión deseada es suficiente escoger $n = 3$ y $\Delta x = \frac{1}{6}$. Con ayuda de una calculadora para obtener la información en la tabla acompañante, a partir de (3) encontramos la siguiente aproximación para $\int_{1/2}^1 \cos\sqrt{x}\,dx$:

$$T_3 = \frac{1}{12}\left[\cos\sqrt{\frac{1}{2}} + 2\cos\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\cos\sqrt{\frac{5}{6}} + \cos 1\right] \approx 0.3244. \blacksquare$$

Aunque no es evidente a partir de una figura, un método mejorado de aproximación a una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ puede obtenerse al considerar una serie de arcos parabólicos en lugar de una serie de cuerdas usadas en la regla trapezoidal. Es posible demostrar, en ciertas condiciones, que un arco parabólico que pasa por *tres* puntos específicos "ajusta" la gráfica de f mejor que una sola línea recta. Vea la FIGURA 2.7.4. Al sumar las áreas bajo arcos parabólicos obtenemos una aproximación a la integral.



a) Un arco

b) Tres arcos

FIGURA 2.7.4 Ajuste de un arco parabólico a través de tres puntos consecutivos sobre la gráfica de una función

Para empezar, encontramos el área bajo un arco de una parábola que pasa por tres puntos $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, donde $x_0 < x_1 < x_2$ y $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$. Como se muestra en la FIGURA 2.7.5, esto puede hacerse al encontrar el área bajo la gráfica de $y = Ax^2 + Bx + C$ sobre el intervalo $[-h, h]$ de modo que P_0, P_1 y P_2 tienen coordenadas $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2), respectivamente. El intervalo $[-h, h]$ se escoge por simplicidad; el área en cuestión no depende de la ubicación del eje y. Al usar el teorema 1.5.1, el área es

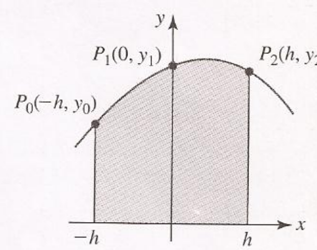


FIGURA 2.7.5 Área bajo un arco parabólico

$$\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C). \tag{5}$$

Pero, puesto que la gráfica pasa por $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2), debe tenerse

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C \tag{6}$$

$$y_1 = C \tag{7}$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C. \tag{8}$$

Al sumar (6) y (8) y usar (7), encontramos $2Ah^2 = y_0 + y_2 - 2y_1$. Por tanto, (5) puede expresarse como

$$\text{área} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{9}$$

Regla de Simpson Ahora suponga que el intervalo $[a, b]$ se parte en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n$, donde n es *un entero par*. Como se muestra en la FIGURA 2.7.6, sobre cada subintervalo $[x_{k-2}, x_k]$ de ancho $2\Delta x$ la gráfica de f se aproxima por un arco de parábola que pasa por los puntos P_{k-2}, P_{k-1} y P_k sobre la gráfica que corresponde a los puntos frontera y al punto medio del subintervalo. Si A_k denota el área bajo la parábola sobre $[x_{k-2}, x_k]$, por (9) se concluye que

$$A_k = \frac{\Delta x}{3}[f(x_{k-2}) + 4f(x_{k-1}) + f(x_k)].$$

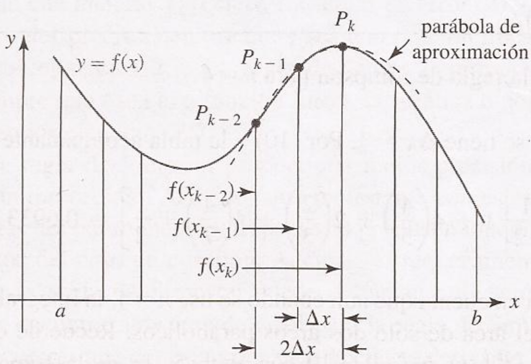


FIGURA 2.7.6 Aproximación de la función por un arco parabólico

Por tanto, al sumar todas las A_k obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] + \frac{\Delta x}{3}[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)] + \cdots + \frac{\Delta x}{3}[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)].$$

Esta regla de aproximación, denominada así en honor del matemático inglés **Thomas Simpson** (1710-1761), se resume en la siguiente definición.

Definición 2.7.3 Regla de Simpson

La **regla de Simpson** es la aproximación $\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n$, donde

$$S_n = \frac{b-a}{3n}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]. \quad (10)$$

De nuevo observamos que el entero n en (10) debe ser par, ya que cada A_k representa el área bajo un arco parabólico sobre un subintervalo de ancho $2\,\Delta x$.

Error en la regla de Simpson Si $I = \int_a^b f(x)\,dx$, el siguiente teorema establece una cota superior para el error en el método $E_n = |I - S_n|$ usando una cota superior para la cuarta derivada.

Teorema 2.7.3 Cota para el error para la regla de Simpson

Si hay un número $M > 0$ tal que $|f^{(4)}(x)| \le M$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$E_n \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}. \quad (11)$$

EJEMPLO 5 Uso de (11)

Determine un valor de n tal que (10) proporcione una aproximación a $\int_1^2 (1/x)\,dx$ precisa hasta dos cifras decimales.

Solución Para $f(x) = 1/x, f^{(4)}(x) = 24/x^5$ y sobre $[1, 2], f^{(4)}(x) \le f^{(4)}(1) = 24$. Así, con $M = 24$ se concluye de (11) que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0.005 \quad \text{o} \quad n^4 > \frac{80}{3} \approx 26.67$$

y así $n > 2.27$. Puesto que n debe ser un entero, es suficiente tomar $n \ge 4$. ■

EJEMPLO 6 Uso de (10)

Aproxime $\int_1^2 (1/x)\,dx$ por la regla de Simpson para $n = 4$.

Solución Cuando $n = 4$, se tiene $\Delta x = \frac{1}{4}$. Por (10) y la tabla acompañante obtenemos

k	m_k	$f(m_k)$
0	1	1
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{7}{4}$	$\frac{4}{7}$
4	2	$\frac{1}{2}$

$$S_4 = \frac{1}{12}\left[1 + 4\left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 4\left(\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{2}\right] \approx 0.6933.$$ ■

En el ejemplo 6, tenga en cuenta que aun cuando se use $n = 4$, la integral definida $\int_1^2 (1/x)\,dx$ se está aproximando por el área de sólo dos arcos parabólicos. Recuerde que con la regla del punto medio se obtuvo $\int_1^2 (1/x)\,dx \approx 0.6919$ con $n = 5$, la regla trapezoidal proporcionó $\int_1^2 (1/x)\,dx \approx 0.6949$ con $n = 6$, y 0.6931 es una aproximación de la integral correcta hasta cuatro cifras decimales.

En algunas aplicaciones sólo puede ser posible obtener valores numéricos de una cantidad $Q(x)$; por ejemplo, por medición o experimentación, en puntos específicos en algún intervalo $[a, b]$ y aun así ser necesario tener alguna idea del valor de la integral definida $\int_a^b Q(x)\,dx$. Aun cuando Q no esté definida por medio de alguna fórmula explícita, sigue siendo posible aplicar la regla trapezoidal o la regla de Simpson para aproximar la integral.

EJEMPLO 7 Área de un terreno

Suponga que desea encontrar el área de un terreno de forma irregular acotado por un camino recto y la orilla de un lago. Los límites del terreno se indican mediante las líneas trazadas en la FIGURA 2.7.7*a*). Suponga que la frontera de 1 milla a lo largo del camino se divide, por ejemplo, en $n = 8$ subintervalos y que luego, como se muestra en la figura 2.7.7*b*), se miden las distancias perpendiculares desde el camino hasta la orilla del lago. Ahora es posible aproximar el área del terreno $A = \int_a^b f(x)\,dx$ por medio de la regla de Simpson. Con $b - a = 1$ mi $= 5\,280$ pies, $\Delta x = (b - a)/n = 5\,280/8 = 660$ y las identificaciones $f(x_0) = 83, \ldots, f(x_8) = 28$, de (10) obtenemos la siguiente aproximación para A:

$$S_8 = \frac{660}{3}[83 + 4(82) + 2(96) + 4(100) + 2(82) + 4(55) + 2(63) + 4(54) + 28]$$
$$= 386\,540 \text{ pies}^2.$$

Sabiendo que 1 acre $= 43\,560$ pies^2, vemos que el terreno mide aproximadamente 8.9 acres.

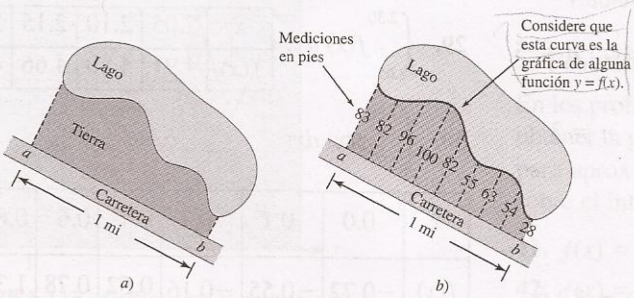


FIGURA 2.7.7 Orilla del lago en el ejemplo 7

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

i) A pesar de la popularidad de la regla trapezoidal, una comparación de las cotas de error (2) y (4) muestra que la regla del punto medio es más precisa que la trapezoidal. Específicamente, (2) sugiere que en algunos casos el error en la regla del punto medio puede ser la mitad que en la regla trapezoidal. Vea el problema 33 en los ejercicios 2.7.

ii) En algunas circunstancias, las reglas consideradas en el análisis previo proporcionan el valor *exacto* de una integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Las cotas de error (2) y (4) indican que M_n y T_n producirán el valor preciso siempre que f sea una función lineal. Vea los problemas 31, 32 y 35 en los ejercicios 2.7. La regla de Simpson proporciona el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$ siempre que f sea una función lineal, cuadrática o polinomial. Vea los problemas 34 y 36 en los ejercicios 2.7.

iii) En general, la regla de Simpson proporciona mejor precisión que la regla del punto medio y que la trapezoidal. Así, ¿por qué molestarse con estas dos reglas? En algunos casos, las reglas del punto medio y trapezoidal producen una precisión que es suficiente para los efectos del caso en cuestión. Además, el requerimiento de que n debe ser un entero par en la regla de Simpson puede evitar su aplicación a un problema dado. También, para encontrar una cota de error para la regla de Simpson es necesario calcular y luego encontrar una cota superior para la cuarta derivada. La expresión para $f^{(4)}(x)$ puede, por supuesto, ser muy complicada. Las cotas de error para las otras dos reglas dependen de la segunda derivada.

2.7 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-6.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, compare el valor exacto de la integral con la aproximación obtenida a partir de la regla del punto medio para el valor indicado de n.

1. $\displaystyle\int_1^4 (3x^2 + 2x)\,dx; \quad n = 3$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos x\,dx; \quad n = 4$

En los problemas 3 y 4, compare el valor exacto de la integral con la aproximación obtenida a partir de la regla trapezoidal para el valor indicado de n.

3. $\displaystyle\int_1^3 (x^3 + 1)\,dx; \quad n = 4$ **4.** $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x+1}\,dx; \quad n = 6$

En los problemas 5-12, use la regla del punto medio y la regla trapezoidal para obtener una aproximación a la integral dada para el valor indicado de n.

5. $\displaystyle\int_1^6 \frac{1}{x}\,dx; \quad n = 5$ **6.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{3x+1}\,dx; \quad n = 4$

7. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx; \quad n = 10$ **8.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx; \quad n = 5$

9. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}\,dx; \quad n = 6$ **10.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx; \quad n = 3$

11. $\displaystyle\int_0^2 \cos x^2\,dx; \quad n = 6$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx; \quad n = 5$ [*Sugerencia*: Defina $f(0) = 1$.]

En los problemas 13 y 14, compare el valor exacto de la integral con la aproximación obtenida a partir de la regla de Simpson para el valor indicado de n.

13. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx; \quad n = 4$ **14.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx; \quad n = 2$

En los problemas 15-22, use la regla de Simpson para obtener una aproximación a la integral dada para el valor indicado de n.

15. $\displaystyle\int_{1/2}^{5/2} \frac{1}{x}\,dx; \quad n = 4$ **16.** $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{x+2}\,dx; \quad n = 6$

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx; \quad n = 4$ **18.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+1}\,dx; \quad n = 2$

19. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}\,dx; \quad n = 6$ **20.** $\displaystyle\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx; \quad n = 4$

21. $\displaystyle\int_2^4 \sqrt{x^3+x}\,dx; \quad n = 4$ **22.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2+\operatorname{sen} x}\,dx; \quad n = 2$

23. Determine el número de rectángulos necesarios de modo que una aproximación a $\int_{-1}^2 dx/(x+3)$ sea precisa hasta dos cifras decimales.

24. Determine el número de trapezoides necesarios de modo que el error en una aproximación a $\int_0^{1.5} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ sea menor que 0.0001.

25. Use la regla trapezoidal de modo que una aproximación al área bajo la gráfica de $f(x) = 1/(1+x^2)$ sobre $[0, 2]$ sea precisa hasta dos cifras decimales. [*Sugerencia*: Analice $f'''(x)$.]

26. El dominio de $f(x) = 10^x$ es el conjunto de números reales y $f(x) > 0$ para toda x. Use la regla trapezoidal para aproximar el área bajo la gráfica de f sobre $[-2, 2]$ con $n = 4$.

27. Use la regla de Simpson para determinar n de modo que el error al aproximar $\int_1^3 dx/x$ sea menor que 10^{-5}. Compare con la n necesaria en la regla trapezoidal para obtener la misma precisión.

28. Encuentre una cota superior para el error al aproximar $\int_0^3 dx/(2x+1)$ por la regla de Simpson con $n = 6$.

En los problemas 29 y 30, use los datos proporcionados en la tabla y una norma para aproximar la integral definida indicada.

29. $\displaystyle\int_{2.05}^{2.30} f(x)\,dx;$

x	2.05	2.10	2.15	2.20	2.25	2.30
$f(x)$	4.91	4.80	4.66	4.41	3.93	3.58

30. $\displaystyle\int_0^{1.20} f(x)\,dx;$

x	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.00	1.20
$f(x)$	−0.72	−0.55	−0.16	0.62	0.78	1.34	1.47	1.61	1.51

31. Compare el valor exacto de la integral $\int_0^4 (2x+5)\,dx$ con la aproximación obtenida con la regla del punto medio con $n = 2$ y $n = 4$.

32. Repita el problema 31 usando la regla trapezoidal.

33. *a*) Encuentre el valor exacto de la integral $I = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2)\,dx$.

b) Use la regla del punto medio con $n = 8$ para encontrar una aproximación a I.

c) Use la regla trapezoidal con $n = 8$ para encontrar una aproximación a I.

d) Compare los errores $E_8 = |I - M_8|$ y $E_8 = |I - T_8|$.

34. Compare el valor exacto de la integral $\int_{-1}^3 (x^3 - x^2)\,dx$ con las aproximaciones obtenidas con la regla de Simpson con $n = 2$ y $n = 4$.

35. Demuestre que la regla trapezoidal proporciona el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando $f(x) = c_1x + c_0$, con c_0 y c_1 constantes. Geométricamente, ¿por qué esto tiene sentido?

36. Demuestre que la regla de Simpson proporciona el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$ donde $f(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$, con c_0, c_1, c_2 y c_3 constantes.

37. Use los datos mostrados en la FIGURA 2.7.8 y la regla de Simpson para encontrar una aproximación al área bajo la gráfica de la función continua f sobre el intervalo $[1, 4]$.

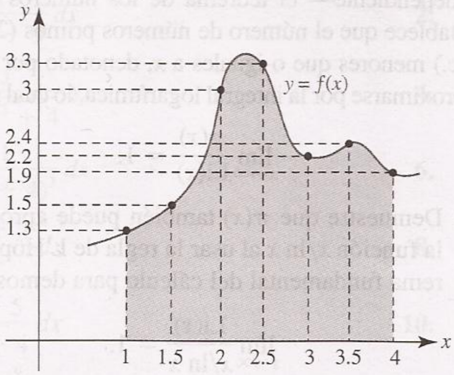


FIGURA 2.7.8 Gráfica para el problema 37

38. Use la regla trapezoidal con $n = 9$ para encontrar una aproximación al área bajo la gráfica en la FIGURA 2.7.9. ¿Proporciona esta regla el valor exacto del área?

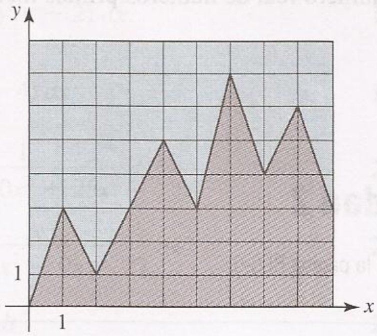


FIGURA 2.7.9 Gráfica para el problema 38

39. El gran estanque para peces en forma irregular que se muestra en la FIGURA 2.7.10 contiene agua hasta una profundidad uniforme de 4 pies. Use la regla de Simpson para encontrar una aproximación al número de galones de agua que hay en el estanque. Las medidas están en pies; la separación vertical entre las mediciones horizontales es 1.86 pies. En 1 pie^3 de agua hay 7.48 galones de agua.

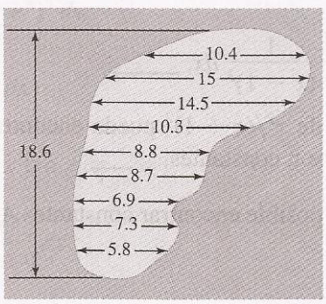
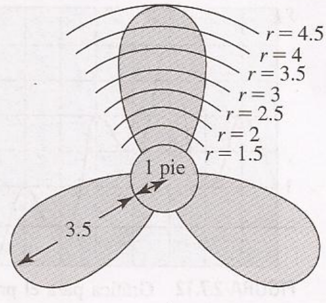


FIGURA 2.7.10 Estanque en el problema 39

40. El momento de inercia I de la hélice con tres aspas de un barco cuyas dimensiones se proporcionan en la FIGURA 2.7.11*a*) está dado por

$$I = \frac{3\rho\pi}{2g} + \frac{3\rho}{g}\int_1^{4.5} r^2 A\, dr,$$

donde ρ es la densidad del metal, g es la aceleración de la gravedad y A es el área de una sección transversal de la hélice a una distancia de r pies del centro del cubo. Si $\rho = 570$ lb/pie^3 para el bronce, use los datos en la figura 2.7.11*b*) y la regla trapezoidal para encontrar una aproximación a I.



a)

r (pies)	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
A (pies)	0.3	0.50	0.62	0.70	0.60	0.50	0.27	0

b)

FIGURA 2.7.11 Hélice en el problema 40

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 41 y 42, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Use la regla de Simpson para aproximar el área acotada por la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo indicado. Use $n = 10$.

41. $f(x) = \sqrt[5]{(5^{2.5} - |x|^{2.5})^2}$; $[-5, 5]$

42. $f(x) = 1 + |\text{sen}\, x|^x$; $[0, 2\pi]$ [*Sugerencia*: Use la gráfica para discernir $f(0)$.]

43. *a*) Demuestre que la integral convergente $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{1/x}}{x^{5/2}}\, dx$ puede escribirse como $\int_0^1 t^{1/2} e^t\, dt$.

b) Use el resultado en el inciso *a*) y la regla de Simpson con $n = 4$ para encontrar una aproximación a la integral impropia original.

44. Use la regla de Simpson con $n = 4$ para encontrar una aproximación a la longitud L de la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^3 + 1$ desde el punto $(0, 1)$ hasta $\left(2, \frac{11}{3}\right)$.

45. Use la regla trapezoidal con $n = 10$ para encontrar una aproximación a la longitud L de la gráfica de $y = x^2$ desde el origen $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 1)$.

46. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para encontrar una aproximación a la longitud L de la gráfica de $y = \ln x$ sobre el intervalo $[1, 2]$.

47. Use la regla del punto medio con $n = 5$ para encontrar una aproximación al área S de la superficie que se forma al girar la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ sobre el intervalo $[0, 2]$ alrededor del eje x.

48. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para encontrar una aproximación al área S de la superficie que se forma al girar la gráfica de $x = y^2 + 1$ para $-1 \le y \le 1$ alrededor del eje y.

≡ Piense en ello

49. *a*) Calcule la longitud L de la gráfica que se muestra en la FIGURA 2.7.12 sobre el intervalo $[1, 8]$.

b) Explique por qué usar la regla trapezoidal con $n = 7$ no es una buena idea.

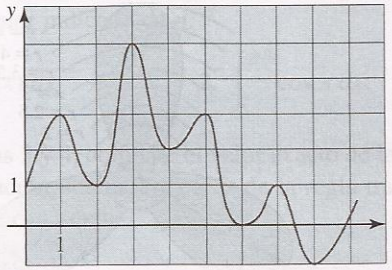


FIGURA 2.7.12 Gráfica para el problema 49

50. Un poco de historia La **función integral logarítmica**, $\text{Li}(x)$, se define por la integral

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\, dt$$

para $x > 2$. En 1896, el matemático francés **Jacques Hadamard** (1865-1963) y el matemático belga **Charles-Jean de la Vallée Poussin** (1886-1962) demostraron —de manera independiente— el teorema de los números primos, que establece que el número de números primos (2, 3, 5, 7, 11, etc.) menores que o iguales a x, denotado por $\pi(x)$, puede aproximarse por la integral logarítmica, lo cual significa que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\text{Li}(x)} = 1.$$

a) Demuestre que $\pi(x)$ también puede aproximarse por la función $x/\ln x$ al usar la regla de L'Hôpital y el teorema fundamental del cálculo para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{Li}(x)}{x/\ln x} = 1.$$

Puesto que hay una infinidad de números primos, $\text{Li}(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

b) Use la regla de Simpson para aproximar $\text{Li}(100)$. Calcule $x/\ln x$ para $x = 100$. Compare estas cifras con el número real de números primos menores que 100.

Competencia final de la unidad 2

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-6.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Bajo el cambio de variable $u = 2x + 3$, la integral $\displaystyle\int_1^5 \frac{4x}{\sqrt{2x+3}}\, dx$ se convierte en $\int_5^{13} (u^{1/2} - 3u^{-1/2})\, du$. _____

2. La sustitución trigonométrica $u = a \sec\theta$ es idónea para aquellas integrales que contienen $\sqrt{a^2 + u^2}$. _____

3. El método de integración por partes se obtiene a partir de la regla del producto para diferenciación. _____

4. $\int_1^e 2x \ln x^2\, dx = e^2 + 1$. _____

5. Las fracciones parciales no son aplicables a $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^3}\, dx$. _____

6. Una descomposición en fracciones parciales de $x^2/(x+1)^2$ puede encontrarse al tener la forma $A/(x+1) + B/(x+1)^2$, donde A y B son constantes. _____

7. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\, dx$, se supone que es posible encontrar constantes A, B, C y D tales que $\displaystyle\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{(x^2-1)^2}$. _____

8. Para evaluar $\int x^n e^x\, dx$, n un entero positivo, la integración por partes se usa $n - 1$ veces. _____

9. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$, es necesario usar $x = 3 \operatorname{sen}\theta$. _____

10. Cuando se evalúa, la integral $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$ puede expresarse como una suma de potencias de $\cos x$. _____

B. Ejercicios

En los problemas 1-80, use los métodos de esta unidad para evaluar la integral dada.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+9}\,dx$

2. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4)^3}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x(x^2-4)}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2+4}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+27}}{x}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^9}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int (\ln 3x)^2\,dx$

13. $\displaystyle\int t\,\text{sen}^{-1} t\,dt$

14. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(x-1)^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int (x+1)^3(x-2)\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^3(x-2)}\,dx$

17. $\displaystyle\int \ln(x^2+4)\,dx$

18. $\displaystyle\int 8te^{2t^2}\,dt$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+10x^3+25x^2}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+8x+25}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+3x^2-9x-27}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2-x)(x^2+3)}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}^2 t}{\cos^2 t}\,dt$

24. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}^3\theta}{(\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta$

25. $\displaystyle\int \tan^{10} x\sec^4 x\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x\tan x}{\cos x}\,dx$

27. $\displaystyle\int y\cos y\,dy$

28. $\displaystyle\int x^2\,\text{sen}\,x^3\,dx$

29. $\displaystyle\int (1+\text{sen}^2 t)\cos^3 t\,dt$

30. $\displaystyle\int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\,d\theta$

31. $\displaystyle\int e^w(1+e^w)^5\,dw$

32. $\displaystyle\int (x-1)e^{-x}\,dx$

33. $\displaystyle\int \cot^3 4x\,dx$

34. $\displaystyle\int (3-\sec x)^2\,dx$

35. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2 x\tan x\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \text{sen}^4 x\tan x\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,x}{1+\text{sen}\,x}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x}\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 2} \sqrt{e^x+1}\,dx$

41. $\displaystyle\int e^x\cos 3x\,dx$

42. $\displaystyle\int x(x-5)^9\,dx$

43. $\int \cos(\ln t)\, dt$

44. $\int \sec^2 x \ln(\tan x)\, dx$

45. $\int \cos \sqrt{x}\, dx$

46. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

47. $\int \cos x \operatorname{sen} 2x\, dx$

48. $\int (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\, dx$

49. $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx$

50. $\int \frac{1}{(8 - 2x - x^2)^{3/2}}\, dx$

51. $\int \tan^5 x \sec^3 x\, dx$

52. $\int \cos^4 \frac{x}{2}\, dx$

53. $\int \frac{t^5}{1 + t^2}\, dt$

54. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

55. $\int \frac{5x^3 + x^2 + 6x + 1}{(x^2 + 1)^2}\, dx$

56. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x^2}\, dx$

57. $\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

58. $\int (t + 1)^2 e^{3t}\, dt$

59. $\int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} 2x\, dx$

60. $\int e^x \tan^2 e^x\, dx$

61. $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\, dx$

62. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx$

63. $\int \operatorname{senh}^{-1} t\, dt$

64. $\int x \cot x^2\, dx$

65. $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x + 1}}\, dx$

66. $\int \frac{t + 3}{t^2 + 2t + 1}\, dt$

67. $\int \frac{\sec^4 3u}{\cot^{12} 3u}\, du$

68. $\int_0^2 x^5 \sqrt{x^2 + 4}\, dx$

69. $\int \frac{3 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$

70. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{5 + \cos^2 x}\, dx$

71. $\int x(1 + \ln x)^2\, dx$

72. $\int x \cos^2 x\, dx$

73. $\int e^x e^{e^x}\, dx$

74. $\int \frac{1}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}}\, dx$

75. $\int \frac{2t}{1 + e^{t^2}}\, dt$

76. $\int \cos x \cos 2x\, dx$

77. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - (5x + 2)^2}}\, dx$

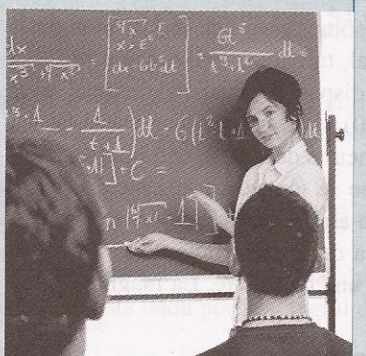
78. $\int (\ln 2x) \ln x\, dx$

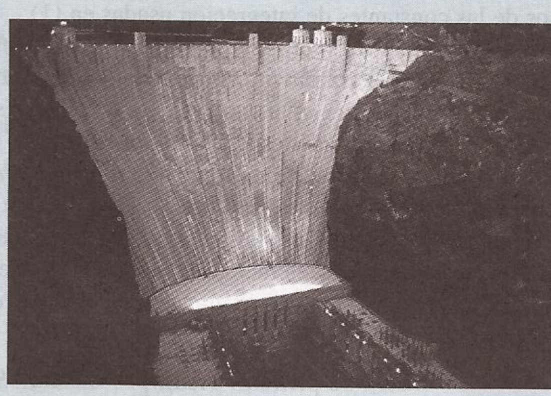
79. $\int \cos x \ln|\operatorname{sen} x|\, dx$

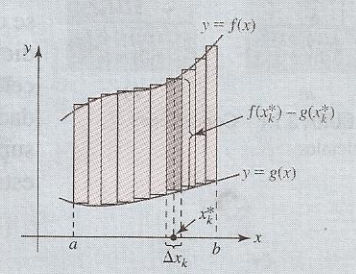
80. $\int \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) dx$

Unidad 3

Aplicaciones de la integral







En esta unidad Aunque en la sección 3.2 se volverá al problema de encontrar áreas por integración definida, en las secciones posteriores de esta unidad veremos que la integral definida tiene muchas otras interpretaciones, además del área.

La unidad empieza con una aplicación de la integral indefinida.

Competencias específicas

- Interpretar enunciados de problemas para construir la función que al ser integrada da la solución.
- Resolver problemas de cálculo de áreas, centroides. longitud de curvas y volúmenes de sólidos de revolución.
- Reconocer el potencial del cálculo integral en la ingeniería.

3.1 Otro repaso al movimiento rectilíneo

Introducción Una de las aplicaciones clásicas de la derivada es el estudio del movimiento rectilíneo. Si $s = f(t)$ es la función de posición de un objeto que se mueve en línea recta, entonces sabemos que

$$\text{velocidad} = v(t) = \frac{ds}{dt} \qquad \text{y} \qquad \text{aceleración} = a(t) = \frac{dv}{dt}.$$

Como una consecuencia inmediata de la definición de la antiderivada, las cantidades s y v pueden escribirse como integrales indefinidas

$$s(t) = \int v(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad v(t) = \int a(t)\,dt. \tag{1}$$

Si se conocen la **posición inicial** $s(0)$ y la **velocidad inicial** $v(0)$, es posible encontrar valores específicos de las constantes de integración usadas en (1).

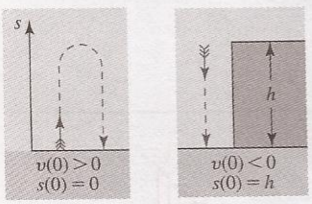


FIGURA 3.1.1 Condiciones iniciales

Recuerde que cuando el cuerpo se mueve horizontalmente sobre una recta, la dirección positiva es hacia la derecha. Para movimiento en una recta vertical, tomamos la dirección positiva hacia arriba. Como se muestra en la FIGURA 3.1.1, si una flecha se dispara hacia arriba desde el nivel del suelo, entonces las **condiciones iniciales** son $s(0) = 0$, $v(0) > 0$, mientras que si la flecha se dispara hacia abajo desde una altura inicial, por ejemplo h metros del suelo, entonces las condiciones iniciales son $s(0) = h$, $v(0) < 0$. Sobre un cuerpo que se mueve en una recta vertical cerca de la superficie terrestre, como la flecha disparada hacia arriba, actúa la fuerza de gravedad. Esta fuerza provoca la aceleración de los cuerpos. Cerca de la superficie de la Tierra se supone que la aceleración debida a la gravedad, $a(t) = -g$, es una constante. La magnitud g de esta aceleración es aproximadamente

$$32 \text{ pies/s}^2, \quad 9.8 \text{ m/s}^2 \quad \text{o bien,} \quad 980 \text{ cm/s}^2.$$

$\int_0^1 x^2 + 2x$

$\frac{x^3}{3} + x^2$

$\frac{1}{3} + 1$

EJEMPLO 1 Movimiento de un proyectil

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 49 m/s. ¿Cuál es la velocidad en $t = 2$ s? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil? ¿Cuánto tiempo permanece en el aire el proyectil? ¿Cuál es la velocidad de impacto?

Solución Si se empieza con $a(t) = -9.8$, por integración indefinida obtenemos

$$v(t) = \int (-9.8)\,dt = -9.8t + C_1. \tag{2}$$

A partir de la condición inicial dada $v(0) = 49$, vemos que (2) implica $C_1 = 49$. Por tanto,

$$v(t) = -9.8t + 49,$$

y así $v(2) = -9.8(2) + 49 = 29.4$ m/s. Observe que $v(2) > 0$ implica que el proyectil se desplaza hacia arriba.

$\int -16t^2 + 96t$

$\int_0^1 -\frac{16t^3}{3} + \frac{96t^2}{2}$

$\frac{16(1)}{3} + \frac{96(1)}{2}$

Luego, la altitud del proyectil, medida a partir del nivel del suelo, es la integral indefinida de la función velocidad,

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (-9.8t + 49)\,dt = -4.9t^2 + 49t + C_2. \tag{3}$$

Puesto que el proyectil inicia su movimiento a partir del nivel del suelo, $s(0) = 0$ y (3) proporcionan $C_2 = 0$. Por tanto,

$$s(t) = -4.9t^2 + 49t. \tag{4}$$

Cuando se ignora la resistencia del aire, la magnitud de la velocidad de impacto (rapidez) es la misma que la velocidad inicial hacia arriba desde el nivel del suelo. Vea el problema 32 en los ejercicios 3.1. Esto no es cierto cuando tomamos en consideración la resistencia del aire.

Cuando el proyectil alcanza su altura máxima, $v(t) = 0$. Luego, al resolver $-9.8t + 49 = 0$ obtenemos $t = 5$. Por (4) encontramos que la altura correspondiente es $s(5) = 122.5$ m.

Finalmente, para encontrar el instante en que el proyectil choca contra el suelo, resolvemos $s(t) = 0$ o $-4.9t^2 + 49t = 0$. Cuando la última ecuación se escribe como $-4.9t(t - 10) = 0$, vemos que el proyectil permanece en el aire 10 s. La velocidad de impacto es $v(10) = -49$ m/s. ■

EJEMPLO 2 Movimiento de un proyectil

Una pelota de tenis se lanza verticalmente hacia abajo desde una altura de 54 pies con una velocidad inicial de 8 pies/s. ¿Cuál es la velocidad de impacto si la pelota golpea en la cabeza a una persona de 6 pies de estatura? Vea la FIGURA 3.1.2.

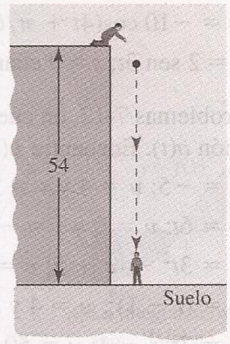


FIGURA 3.1.2 Lanzamiento de la pelota en el ejemplo 2

Solución En este caso $a(t) = -32$, $s(0) = 54$ y, puesto que la pelota se lanza hacia abajo, $v(0) = -8$. Luego,

$$v(t) = \int (-32)\, dt = -32t + C_1.$$

Al usar la velocidad inicial $v(0) = -8$ encontramos $C_1 = -8$. En consecuencia,

$$v(t) = -32t - 8.$$

Al continuar encontramos

$$s(t) = \int (-32t - 8)\, dt = -16t^2 - 8t + C_2.$$

Cuando $t = 0$, sabemos que $s = 54$ y así la última ecuación implica $C_2 = 54$. Entonces

$$s(t) = -16t^2 - 8t + 54.$$

Para determinar el instante que corresponde a $s = 6$, resolvemos

$$-16t^2 - 8t + 54 = 6.$$

Al simplificar obtenemos $-8(2t - 3)(t + 2) = 0$ y $t = \frac{3}{2}$. Entonces, la velocidad de la pelota cuando golpea a la persona es $v(\frac{3}{2}) = -56$ pies/s. ■

Distancia La **distancia total** que un objeto recorre rectilíneamente en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ está dada por la integral definida

$$\text{distancia total} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt. \tag{5}$$

En (5) se requiere el valor absoluto porque el objeto puede moverse a la izquierda, de modo que durante algún tiempo tiene velocidad negativa.

EJEMPLO 3 Distancia recorrida

La función de posición de un objeto que se mueve sobre una recta de coordenadas es $s(t) = t^2 - 6t$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[0, 9]$.

Solución La función velocidad $v(t) = ds/dt = 2t - 6 = 2(t - 3)$ muestra que el movimiento es como se indica en la FIGURA 3.1.3; a saber: $v < 0$ para $0 \le t < 3$ (movimiento a la izquierda) y $v \ge 0$ para $3 \le t \le 9$ (movimiento a la derecha). Entonces, por (5) la distancia recorrida es

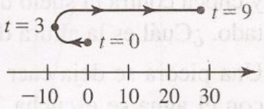


FIGURA 3.1.3 Representación del movimiento del objeto en el ejemplo 3

$$\begin{aligned}\int_0^9 |2t - 6|\, dt &= \int_0^3 |2t - 6|\, dt + \int_3^9 |2t - 6|\, dt \\ &= \int_0^3 -(2t - 6)\, dt + \int_3^9 (2t - 6)\, dt \\ &= (-t^2 + 6t)\Big]_0^3 + (t^2 - 6t)\Big]_3^9 = 45 \text{ cm.}\end{aligned}$$

Por supuesto, el último resultado debe ser consistente con la cifra obtenida al simplemente contar las unidades en la figura 3.1.3 entre $s(0)$ y $s(3)$, y entre $s(3)$ y $s(9)$. ■

3.1 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-7.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, un cuerpo se mueve en línea recta con velocidad $v(t)$. Encuentre la función posición $s(t)$.

1. $v(t) = 6$; $s = 5$ cuando $t = 2$

2. $v(t) = 2t + 1$; $s = 0$ cuando $t = 1$

3. $v(t) = t^2 - 4t$; $s = 6$ cuando $t = 3$

4. $v(t) = \sqrt{4t + 5}$; $s = 2$ cuando $t = 1$

5. $v(t) = -10\cos(4t + \pi/6)$; $s = \frac{5}{4}$ cuando $t = 0$
6. $v(t) = 2\,\text{sen}\,3t$; $s = 0$ cuando $t = \pi$

En los problemas 7-12, un cuerpo se mueve en línea recta con aceleración $a(t)$. Encuentre $v(t)$ y $s(t)$.

7. $a(t) = -5$; $v = 4$ y $s = 2$ cuando $t = 1$
8. $a(t) = 6t$; $v = 0$ y $s = -5$ cuando $t = 2$
9. $a(t) = 3t^2 - 4t + 5$; $v = -3$ y $s = 10$ cuando $t = 0$
10. $a(t) = (t-1)^2$; $v = 4$ y $s = 6$ cuando $t = 1$
11. $a(t) = 7t^{1/3} - 1$; $v = 50$ y $s = 0$ cuando $t = 8$
12. $a(t) = 100\cos 5t$; $v = -20$ y $s = 15$ cuando $t = \pi/2$

En los problemas 13-18, un objeto se mueve en línea recta según la función posición dada. Si s se mide en centímetros, encuentre la distancia total recorrida por el objeto en el instante de tiempo indicado.

13. $s(t) = t^2 - 2t$; $[0, 5]$
14. $s(t) = -t^2 + 4t + 7$; $[0, 6]$
15. $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$; $[0, 4]$
16. $s(t) = t^4 - 32t^2$; $[1, 5]$
17. $s(t) = 6\,\text{sen}\,\pi t$; $[1, 3]$
18. $s(t) = (t-3)^2$; $[2, 7]$

≡ Aplicaciones

19. El conductor de un automóvil que se desplaza en línea recta a velocidad constante de 60 mi/h aparta por 2 s la vista de la carretera. ¿Cuántos pies recorre el automóvil en este instante?
20. Una pelota se deja caer (a partir del reposo) desde una altura de 144 pies. ¿En cuánto tiempo la pelota llega al suelo? ¿A qué velocidad choca contra el suelo?
21. Un huevo se suelta desde la parte superior de un edificio y choca contra el suelo después de 4 s desde que fue soltado. ¿Cuál es la altura del edificio?
22. Una piedra se deja caer en un pozo y el choque de ésta con el agua se escucha 2 s después. Si la velocidad del sonido en el aire es 1 080 pies/s, encuentre la profundidad del pozo.
23. Una flecha se proyecta verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 24.5 m/s. ¿A qué altura llega?
24. ¿Cuán alto llegaría la flecha en el problema 23 en el planeta Marte, donde $g = 3.6$ m/s?
25. Una pelota de golf se lanza verticalmente hacia arriba desde el borde del techo de un edificio de 384 pies de altura con una velocidad inicial de 32 pies/s. ¿En qué instante golpea la pelota el suelo?
26. En el problema 25, ¿cuál es la velocidad de la pelota de golf cuando pasa frente a un observador situado en una ventana situada a 256 pies del suelo?
27. Una persona arroja un malvavisco hacia abajo con una velocidad inicial de 16 pies/s desde una ventana que está a 102 pies del nivel del suelo. Si el malvavisco golpea la cabeza de una persona de 6 pies de estatura, ¿cuál es la velocidad de impacto?
28. La persona cuya cabeza fue golpeada en el problema 27 sube hasta la parte superior de una escalera de 22 pies de altura y arroja una roca verticalmente con una velocidad inicial de 96 pies/s. Si la roca choca contra el culpable en el piso a 102 pies, ¿cuál es la velocidad de impacto?

≡ Piense en ello

29. En marzo de 1979, la sonda espacial *Voyager 1* fotografió la erupción de un volcán activo en Io, una de las lunas de Júpiter. Encuentre la velocidad de lanzamiento de una roca desde el volcán Loki si la roca alcanza una altitud de 200 km por arriba de la cima del volcán. En Io, la aceleración debida a la gravedad es $g = 1.8$ m/s^2.
30. Como se muestra en la FIGURA 3.1.4, desde un punto a 30 pies de un poste de 25 pies de altura se arroja verticalmente hacia abajo una pelota desde una altura de 25 pies con una velocidad inicial de 2 pies/s.
   a) Encuentre la razón en que la sombra de la pelota se mueve hacia la base del poste.
   b) Encuentre la razón en que la sombra de la pelota se mueve hacia la base del poste en $t = \frac{1}{2}$.

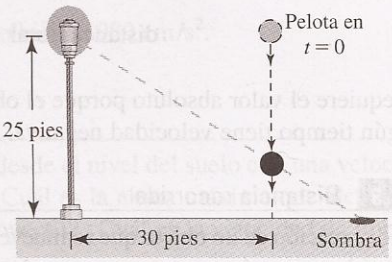


FIGURA 3.1.4 Poste en el problema 30

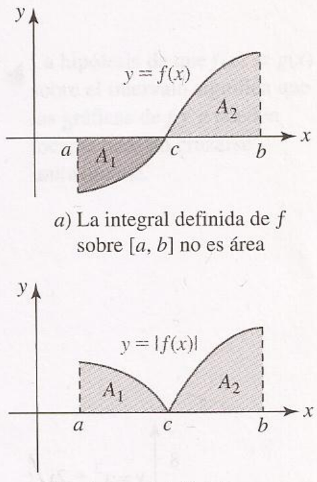
31. Si un cuerpo se mueve rectilíneamente con aceleración constante a y $v = v_0$ cuando $s = 0$, demuestre que
$$v^2 = v_0^2 + 2as. \left[\textit{Sugerencia: } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v.\right]$$
32. Demuestre que, cuando se ignora la resistencia del aire, un proyectil disparado verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo choca de nuevo contra el suelo con una velocidad igual a la velocidad inicial v_0.
33. Suponga que la aceleración debida a la gravedad en un planeta es igual a la mitad de la aceleración en la Tierra. Demuestre que una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde la superficie del planeta alcanza una altura máxima que es igual al doble de la altura en la Tierra cuando se aplica la misma velocidad inicial.
34. En el problema 33, suponga que la velocidad inicial de la pelota sobre el planeta es v_0 y que la velocidad inicial de la pelota sobre la Tierra es $2v_0$. Compare las alturas máximas alcanzadas. Determine la velocidad inicial de la pelota sobre la Tierra (en términos de v_0) de modo que la máxima altura alcanzada sea la misma que sobre el planeta.

3.2 Otro repaso al área

Introducción Si f es una función que asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ no representa el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Como vio en la sección 1.2, el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como el *área neta con signo* entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[a, b]$. En esta sección investigamos dos problemas de área:

- Encontrar el **área total** de una región acotada por la gráfica de f y el eje x sobre un intervalo $[a, b]$.
- Encontrar el **área de la región** acotada entre dos gráficas sobre un intervalo $[a, b]$.

Veremos que el primer problema es justo un caso especial del segundo problema.



a) La integral definida de f sobre $[a, b]$ no es área

b) La integral definida de $|f|$ sobre $[a, b]$ es área

FIGURA 3.2.1 El área total es $A = A_1 + A_2$

Área total Suponga que la función $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$ y que $f(x) < 0$ sobre $[a, c)$ y que $f(x) \geq 0$ sobre $[c, b]$. El **área total** es el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Para encontrar esta área se emplea el valor absoluto de la función $y = |f(x)|$, que es no negativa para toda x en $[a, b]$. Recuerde que $|f(x)|$ está definida por partes. Para la función f que se muestra en la FIGURA 3.2.1 *a)*, $f(x) < 0$ sobre el intervalo $[a, c)$ y $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo $[c, b]$. Por tanto,

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{para } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{para } f(x) \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Como se muestra en la figura 3.2.1*b)*, la gráfica de $y = |f(x)|$ sobre el intervalo $[a, c)$ se obtiene al reflejar esa porción de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x. Sobre el intervalo $[c, b]$, donde $f(x) \geq 0$, las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ son las mismas. Para encontrar el área total $A = A_1 + A_2$ mostradas en la figura 3.2.1*b)* usamos la propiedad aditiva del intervalo de la integral definida junto con (1):

◀ Vea el teorema 1.2.5.

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|\,dx &= \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b |f(x)|\,dx \\ &= \int_a^c (-f(x))\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Las ideas del análisis precedente se resumen en la siguiente definición.

Definición 3.2.1 Área total

Si $y = f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, entonces el **área total** A acotada por su gráfica y el eje x sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Área total

Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^3$ y el eje x sobre $[\overset{a}{-2}, \overset{b}{1}]$.

Solución Por (2) se tiene

$$A = \int_{-2}^{1} |x^3|\,dx.$$

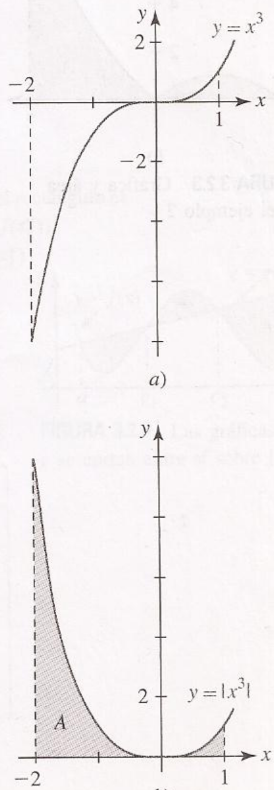


FIGURA 3.2.2 Gráfica de la función y área en el ejemplo 1

En la FIGURA 3.2.2 comparamos la gráfica de $y = x^3$ y la gráfica de $y = |x^3|$. Puesto que $x^3 < 0$ para $x < 0$, se tiene sobre $[-2, 1]$,

$$|f(x)| = \begin{cases} -x^3, & -2 \leq x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces, por (2) de la definición 3.2.1, el área que se busca es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} |x^3|\,dx \\ &= \int_{-2}^{0} |x^3|\,dx + \int_{0}^{1} |x^3|\,dx \\ &= \int_{-2}^{0} (-x^3)\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx \\ &= -\frac{1}{4}x^4\Big]_{-2}^{0} + \frac{1}{4}x^4\Big]_{0}^{1} \\ &= 0 - \left(-\frac{16}{4}\right) + \frac{1}{4} - 0 = \frac{17}{4}. \end{aligned}$$

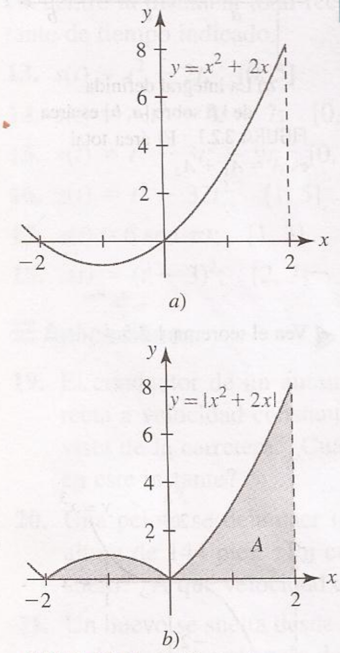


FIGURA 3.2.3 Gráfica y área en el ejemplo 2

EJEMPLO 2 Área total

Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^2 + 2x$ y el eje x sobre $[-2, 2]$.

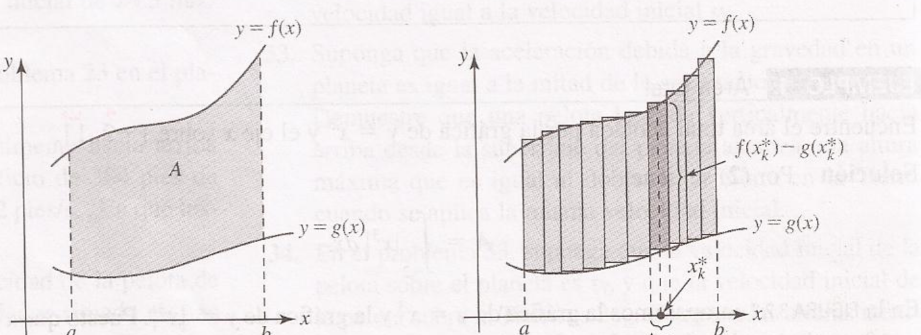
Solución Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ se muestran en la **FIGURA 3.2.3**. Luego, por la figura 3.2.3*a*), vemos que sobre $[-2, 2]$,

$$|f(x)| = \begin{cases} -(x^2 + 2x), & -2 \le x < 0 \\ x^2 + 2x, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

En consecuencia, el área total acotada por la gráfica de f sobre el intervalo $[-2, 2]$ y el eje x es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} |x^2 + 2x|\,dx \\ &= \int_{-2}^{0} |x^2 + 2x|\,dx + \int_{0}^{2} |x^2 + 2x|\,dx \\ &= \int_{-2}^{0} -(x^2 + 2x)\,dx + \int_{0}^{2} (x^2 + 2x)\,dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big]_{-2}^{0} + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big]_{0}^{2} \\ &= 0 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) + \left(\frac{8}{3} + 4\right) - 0 = 8. \end{aligned}$$

Área acotada por dos gráficas El análisis anterior es un caso especial del problema más general de encontrar el **área de la región acotada** entre la gráfica de dos funciones f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Vea la **FIGURA 3.2.4a)**. El área *bajo* la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ puede interpretarse como el área de la región



a) $f(x) \ge g(x)$ sobre $[a, b]$

b) Construcción de n rectángulos entre dos gráficas

FIGURA 3.2.4 Área A acotada entre dos gráficas acotada por la gráfica de f y la gráfica de la función $y = 0$ (el eje x) y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Construcción de una integral Suponga que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son continuas sobre $[a, b]$ y que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo. Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Si escogemos un punto muestra x_k^* en cada subintervalo, es posible construir n rectángulos correspondientes que tengan el área

La hipótesis de que $f(x) \geq g(x)$ sobre el intervalo significa que las gráficas de f y g pueden tocarse pero no cruzarse mutuamente.

$$A_k = [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\,\Delta x_k.$$

Vea la figura 3.2.4*b*). El área A de la región acotada por las dos gráficas sobre el intervalo $[a, b]$ es aproximada por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\,\Delta x_k,$$

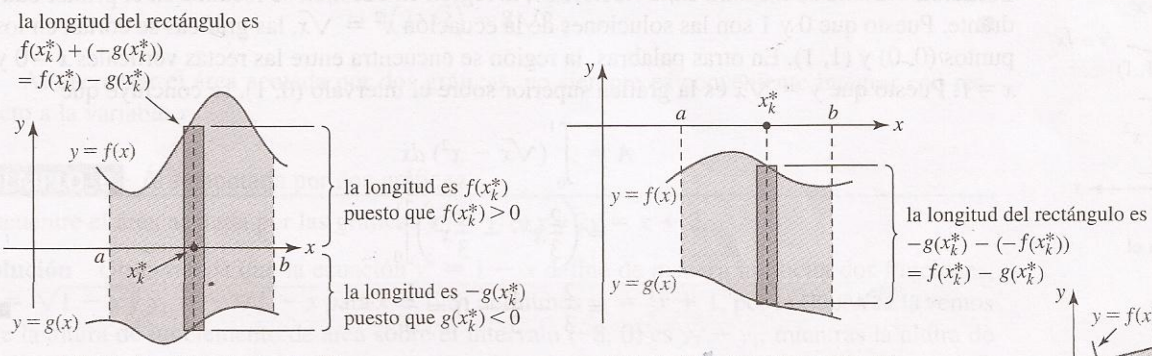
lo cual a su vez sugiere que el área es

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\,\Delta x_k.$$

Puesto que f y g son continuas, también lo es $f - g$. Entonces, el límite anterior existe y, por definición, la integral definida

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx. \tag{3}$$

También (3) es válida para las regiones en que una o ambas funciones f y g tienen valores negativos. Vea la **FIGURA 3.2.5**. Sin embargo, (3) *no* es válida sobre un intervalo $[a, b]$ donde las gráficas de f y g se cruzan en el intervalo. Observe en la **FIGURA 3.2.6** que g es la gráfica superior sobre los intervalos (a, c_1) y (c_2, b), mientras que f es la gráfica superior sobre el intervalo (c_1, c_2). En el caso más general, tenemos la siguiente definición.



a) $f(x) > 0$ y $g(x) < 0$ sobre $[a, b]$ *b*) $f(x) < 0$ y $g(x) < 0$ sobre $[a, b]$

FIGURA 3.2.5 Las gráficas de f y g pueden estar por abajo del eje x

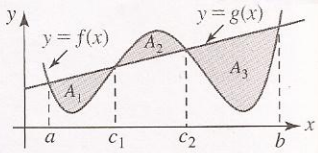


FIGURA 3.2.6 Las gráficas de f y g se cortan entre sí sobre $[a, b]$

Definición 3.2.2 Área acotada por dos gráficas

Si f y g son funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el **área A de la región** acotada por sus gráficas sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx. \tag{4}$$

Observe que (4) se reduce a (2) cuando $g(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$. Antes de usar las fórmulas (3) o (4), se le pide trazar las gráficas necesarias. Si las curvas se cruzan sobre el intervalo, entonces como hemos visto en la figura 3.2.6, la posición relativa de las curvas cambia. En cualquier caso, sobre cualquier subintervalo de $[a, b]$, el integrando idóneo siempre es

$$\text{(gráfica superior)} - \text{(gráfica inferior)}.$$

Así como en (1), el valor absoluto del integrando está dado por

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} -(f(x) - g(x)), & \text{para } f(x) - g(x) < 0 \\ f(x) - g(x), & \text{para } f(x) - g(x) \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Una manera más práctica de interpretar (5) consiste en trazar las gráficas de f y g con precisión y determinar visualmente que:

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} g(x) - f(x), & \text{siempre que } g \text{ es la gráfica superior} \\ f(x) - g(x), & \text{siempre que } f \text{ es la gráfica superior} \end{cases}$$

En la figura 3.2.6, el área A acotada por las gráficas de f y g sobre $[a, b]$ es

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= \int_a^{c_1} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{c_2}^{b} |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= \int_a^{c_1} \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ es la gráfica superior}}}{[g(x) - f(x)]}\, dx + \int_{c_1}^{c_2} \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ es la gráfica superior}}}{[f(x) - g(x)]}\, dx + \int_{c_2}^{b} \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ es la gráfica superior}}}{[g(x) - f(x)]}\, dx. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.

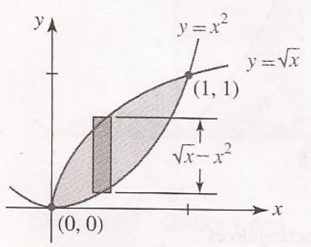


FIGURA 3.2.7 Área en el ejemplo 3

Solución Como se muestra en la FIGURA 3.2.7, la región en cuestión se localiza en el primer cuadrante. Puesto que 0 y 1 son las soluciones de la ecuación $x^2 = \sqrt{x}$, las gráficas se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. En otras palabras, la región se encuentra entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$. Puesto que $y = \sqrt{x}$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(0, 1)$, se concluye que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 4 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2x$ y $y = -x + 4$ sobre el intervalo $[-4, 2]$.

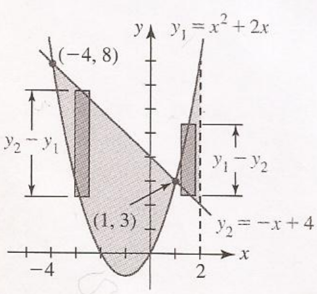


FIGURA 3.2.8 Área en el ejemplo 4

Solución Las funciones dadas se denotan por

$$y_1 = x^2 + 2x \qquad \text{y} \qquad y_2 = -x + 4.$$

Como se muestra en la FIGURA 3.2.8, las gráficas se cortan sobre el intervalo $[-4, 2]$.

Para encontrar los puntos de intersección resolvemos la ecuación $x^2 + 2x = -x + 4$ o $x^2 + 3x - 4 = 0$ y encontramos que $x = -4$ y $x = 1$. El área en cuestión es la suma de las áreas $A = A_1 + A_2$:

$$A = \int_{-4}^{2} |y_2 - y_1|\, dx = \int_{-4}^{1} |y_2 - y_1|\, dx + \int_{1}^{2} |y_2 - y_1|\, dx.$$

Pero como $y_2 = -x + 4$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(-4, 1)$ y $y_1 = x^2 + 2x$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(1, 2)$, es posible escribir

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{1} [(-x+4) - (x^2+2x)]\,dx + \int_{1}^{2} [(x^2+2x) - (-x+4)]\,dx \\ &= \int_{-4}^{1} (-x^2 - 3x + 4)\,dx + \int_{1}^{2} (x^2 + 3x - 4)\,dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Big]_{-4}^{1} + \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\Big]_{1}^{2} \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) + \left(\frac{8}{3} + 6 - 8\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right) = \frac{71}{3}. \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 5 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área de las cuatro regiones acotadas por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ que se muestran en la FIGURA 3.2.9.

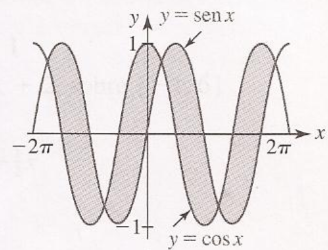


FIGURA 3.2.9 Cada una de las cuatro regiones tiene la misma área en el ejemplo 5

Solución Hay una infinidad de regiones acotadas por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ y el área de cada región es la misma. En consecuencia, sólo es necesario encontrar el área de la región sobre el intervalo correspondiente a las dos primeras soluciones positivas de la ecuación $\operatorname{sen} x = \cos x$. Al dividir entre $\cos x$, una forma más útil de la última ecuación es $\tan x = 1$. La primera solución positiva es $x = \tan^{-1} 1 = \pi/4$. Luego, como $\tan x$ tiene periodo π, la siguiente solución positiva es $x = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$. Sobre el intervalo $(\pi/4, 5\pi/4)$, $y = \operatorname{sen} x$ es la gráfica superior, de modo que el área de las cuatro regiones es

$$\begin{aligned} A &= 4\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx \\ &= 4(-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= 4\left(2\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}. \end{aligned}$$ ■

Al encontrar el área acotada por dos gráficas, no siempre es conveniente integrar con respecto a la variable x.

EJEMPLO 6 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área acotada por las gráficas $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$.

Solución Observamos que la ecuación $y^2 = 1 - x$ define de manera implícita dos funciones, $y_2 = \sqrt{1-x}$ y $y_1 = -\sqrt{1-x}$ para $x \le 1$. Si definimos $y_3 = \frac{1}{2}x + 1$, por la FIGURA 3.2.10 vemos que la altura de un elemento de área sobre el intervalo $(-8, 0)$ es $y_3 - y_1$, mientras la altura de un elemento sobre el intervalo $(0, 1)$ es $y_2 - y_1$. Por tanto, si se integra con respecto a x, el área deseada es la suma de

$$A_1 = \int_{-8}^{0} (y_3 - y_1)\,dx \quad \text{y} \quad A_2 = \int_{0}^{1} (y_2 - y_1)\,dx.$$

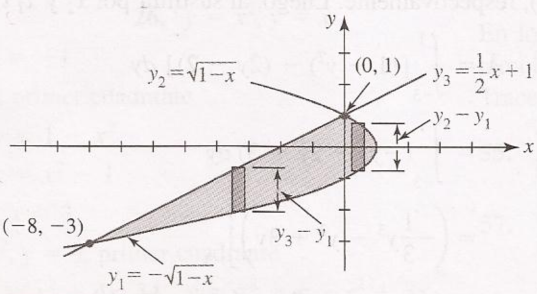


FIGURA 3.2.10 En el ejemplo 6, y_3 es la gráfica superior sobre el intervalo $(-8, 0)$; y_2 es la gráfica superior sobre el intervalo $(0, 1)$

Por tanto, el área de la región es la suma de las áreas $A = A_1 + A_2$; es decir,

$$A = \int_{-8}^{0}\left[\left(\frac{1}{2}x+1\right)-(-\sqrt{1-x})\right]dx + \int_{0}^{1}[\sqrt{1-x}-(-\sqrt{1-x})]\,dx$$

$$= \int_{-8}^{0}\left(\frac{1}{2}x+1+\sqrt{1-x}\right)dx + 2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x}\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right)\Big]_{-8}^{0} - \frac{4}{3}(1-x)^{3/2}\Big]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot 1^{3/2} - \left(16 - 8 - \frac{2}{3}\cdot 9^{3/2}\right) - \frac{4}{3}\cdot 0 + \frac{4}{3}\cdot 1^{3/2} = \frac{32}{3}.$$ ■

EJEMPLO 7 Solución alterna del ejemplo 6

La necesidad de usar dos integrales en el ejemplo 6 para encontrar el área se evita al construir rectángulos horizontales y usar a y como variable independiente. Si definimos $x_2 = 1 - y^2$ y $x_1 = 2y - 2$, entonces, como se muestra en la FIGURA 3.2.11, el área del elemento horizontal es

$$A_k = [\text{gráfica derecha} - \text{gráfica izquierda}]\ \text{ancho}.$$

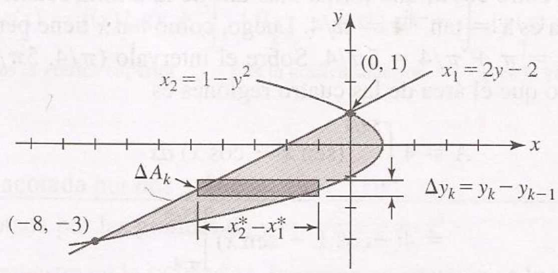


FIGURA 3.2.11 Uso de y como la variable de integración en el ejemplo 7

Es decir, $$A_k = [x_2^* - x_1^*]\,\Delta y_k,$$

donde $x_2^* = 1 - (y_k^*)^2$, $x_1^* = 2y_k^* - 2$ y $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Al sumar los rectángulos en la dirección de y positiva obtenemos

$$A = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}[x_2^*(y) - x_1^*(y)]\,\Delta y_k,$$

donde $\|P\|$ es la norma de una partición P del intervalo sobre el eje y definida por $-3 \le y \le 1$. En otras palabras,

$$A = \int_{-3}^{1}(x_2 - x_1)\,dy,$$

donde el límite inferior -3 y el límite superior 1 son las coordenadas y de los puntos de intersección $(-8, -3)$ y $(0, 1)$, respectivamente. Luego, al sustituir por x_2 y x_1 obtenemos

$$A = \int_{-3}^{1}[(1-y^2) - (2y-2)]\,dy$$

$$= \int_{-3}^{1}(-y^2 - 2y + 3)\,dy$$

$$= \left(-\frac{1}{3}y^3 - y^2 + 3y\right)\Big]_{-3}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - \left(\frac{27}{3} - 9 - 9\right) = \frac{32}{3}.$$ ■

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

Como se mencionó en la introducción, en esta unidad veremos diferentes interpretaciones de la integral definida. En cada sección veremos una variedad de la integral definida, dentro del párrafo *Construcción de una integral*. Antes de memorizar estas fórmulas de integrales, usted debe estar al tanto de que el resultado obtenido en general no es aplicable a toda situación geométrica o física concebible. Por ejemplo, como vimos en el ejemplo 7, para encontrar el área de una región en el plano puede resultar más conveniente integrar con respecto a y y así poder construir una integral totalmente diferente. En lugar de aplicar a ciegas una fórmula, usted debe tratar de comprender el proceso y la práctica de construir integrales al analizar la geometría de cada problema.

3.2 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-7.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-22, encuentre el área total acotada por la gráfica de la función dada y el eje x en el intervalo dado.

1. $y = x^2 - 1$; $[-1, 1]$
2. $y = x^2 - 1$; $[0, 2]$
3. $y = x^3$; $[-3, 0]$
4. $y = 1 - x^3$; $[0, 2]$
5. $y = x^2 - 3x$; $[0, 3]$
6. $y = -(x + 1)^2$; $[-1, 0]$
7. $y = x^3 - 6x$; $[-1, 1]$
8. $y = x^3 - 3x^2 + 2$; $[0, 2]$
9. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$; $[0, 3]$
10. $y = x(x + 1)(x - 1)$; $[-1, 1]$
11. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$; $[\frac{1}{2}, 3]$
12. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$; $[1, 2]$
13. $y = \sqrt{x} - 1$; $[0, 4]$
14. $y = 2 - \sqrt{x}$; $[0, 9]$
15. $y = \sqrt[3]{x}$; $[-2, 3]$
16. $y = 2 - \sqrt[3]{x}$; $[-1, 8]$
17. $y = \operatorname{sen} x$; $[-\pi, \pi]$
18. $y = 1 + \cos x$; $[0, 3\pi]$
19. $y = -1 + \operatorname{sen} x$; $[-3\pi/2, \pi/2]$
20. $y = \sec^2 x$; $[0, \pi/3]$
21. $y = \begin{cases} x, & -2 \le x < 0 \\ x^3, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$; $[-2, 1]$
22. $y = \begin{cases} x + 2, & -3 \le x < 0 \\ 2 - x^2, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$; $[-3, 2]$

En los problemas 23-50, encuentre el área de la región acotada por la gráfica de las funciones dadas.

23. $y = x, y = -2x, x = 3$
24. $y = x, y = 4x, x = 2$
25. $y = x^2, y = 4$
26. $y = x^2, y = x$
27. $y = x^3, y = 8, x = -1$
28. $y = x^3, y = \sqrt[3]{x}$, primer cuadrante
29. $y = 4(1 - x^2), y = 1 - x^2$
30. $y = 2(1 - x^2), y = x^2 - 1$
31. $y = x, y = 1/x^2, x = 3$
32. $y = x^2, y = 1/x^2, y = 9$, primer cuadrante
33. $y = -x^2 + 6, y = x^2 + 4x$
34. $y = x^2, y = -x^2 + 3x$
35. $y = x^{2/3}, y = 4$
36. $y = 1 - x^{2/3}, y = x^{2/3} - 1$
37. $y = x^2 - 2x - 3, y = 2x + 2$, sobre $[-1, 6]$
38. $y = -x^2 + 4x, y = \frac{3}{2}x$
39. $y = x^3, y = x + 6, y = -\frac{1}{2}x$
40. $x = y^2, x = 0, y = 1$
41. $x = -y, x = 2 - y^2$
42. $x = y^2, x = 6 - y^2$
43. $x = y^2 + 2y + 2, x = -y^2 - 2y + 2$
44. $x = y^2 - 6y + 1, x = -y^2 + 2y + 1$
45. $y = x^3 - x, y = x + 4, x = -1, x = 1$
46. $x = y^3 - y, x = 0$
47. $y = \cos x, y = \operatorname{sen} x, x = 0, x = \pi/2$
48. $y = 2 \operatorname{sen} x, y = -x, x = \pi/2$
49. $y = 4 \operatorname{sen} x, y = 2$, sobre $[\pi/6, 5\pi/6]$
50. $y = 2 \cos x, y = -\cos x$, sobre $[-\pi/2, \pi/2]$

En los problemas 51 y 52, interprete la integral definida dada como el área de la región acotada por la gráfica de dos funciones. Trace las dos regiones que tienen el área dada por la integral.

51. $\displaystyle\int_0^4 (\sqrt{x} + x)\, dx$
52. $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 3 - x\right) dx$

En los problemas 53 y 54, interprete la integral definida dada como el área de la región acotada por la gráfica de dos funciones sobre un intervalo. Evalúe la integral dada y trace la región.

53. $\displaystyle\int_0^2 \left|\frac{3}{x + 1} - 4x\right| dx$
54. $\displaystyle\int_{-1}^1 |e^x - 2e^{-x}|\, dx$

En los problemas 55-58, use el hecho de que el área de un círculo de radio r es πr^2 para evaluar la integral definida dada. Trace una región cuya área esté dada por la integral definida.

55. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$
56. $\displaystyle\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx$
57. $\displaystyle\int_{-2}^2 (1 + \sqrt{4 - x^2})\, dx$
58. $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x + 3 - \sqrt{1 - x^2})\, dx$

59. Establezca una integral definida que represente el área de una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$. Use la idea que se utilizó en los problemas 55-58 para evaluar la integral definida.

60. Encuentre el área del triángulo con vértices en (1, 1), (2, 4) y (3, 2).

61. Considere la región acotada por las gráficas de $y^2 = -x - 2$, $y = 2$, $y = -2$ y $y = 2(x - 1)$. Calcule el área de la región al integrar con respecto a x.

62. Calcule el área de la región dada en el problema 61 al integrar con respecto a y.

63. Considere la región acotada por las gráficas de $y = 2e^x - 1$, $y = e^x$ y $y = 2$ mostradas en la FIGURA 3.2.12. Exprese el área de la región como integrales definidas primero usando integración con respecto a x y luego usando integración con respecto a y. Escoja una de estas integrales para encontrar el área.

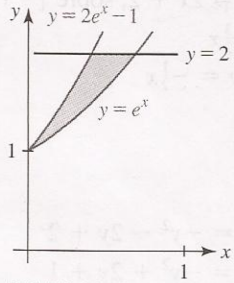


FIGURA 3.2.12 Gráficas para el problema 63

≡ Problemas con calculadora/SAC

64. Use una calculadora o un SAC para aproximar las coordenadas x de los puntos de intersección de las gráficas mostradas en la FIGURA 3.2.13. Encuentre un valor aproximado del área de la región.

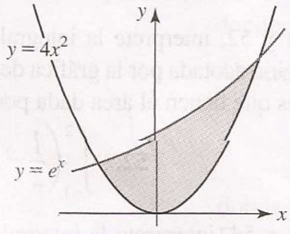


FIGURA 3.2.13 Gráficas para el problema 64

≡ Piense en ello

65. El segmento de recta entre Q y R mostrado en la FIGURA 3.2.14 es tangente a la gráfica de $y = 1/x$ en el punto P. Demuestre que el área del triángulo QOR es independiente de las coordenadas de P.

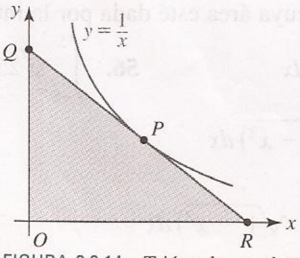


FIGURA 3.2.14 Triángulo en el problema 65

66. Un trapezoide está acotado por las gráficas de $f(x) = Ax + B$, $x = a$, $x = b$ y $x = 0$. Muestre que el área del trapezoide es $\dfrac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)$.

67. Exprese el área de la región sombreada mostrada en la FIGURA 3.2.15 en términos del número a. Trate de ser un poco perspicaz.

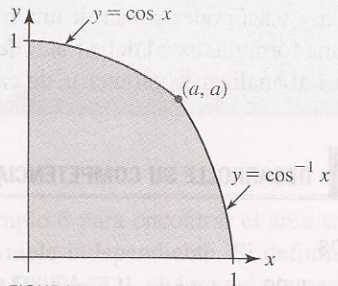


FIGURA 3.2.15 Gráficas para el problema 67

68. Suponga que los dos brochazos de pintura mostrados en la FIGURA 3.2.16 se hacen de una sola pasada usando una brocha de ancho k, $k > 0$, sobre el intervalo $[a, b]$. En la figura 3.2.16*b*) se supone que la región pintada es paralela al eje x. ¿Cuál brochazo tiene mayor área? Argumente su respuesta con una demostración matemática sólida. ¿Puede plantear un principio general?

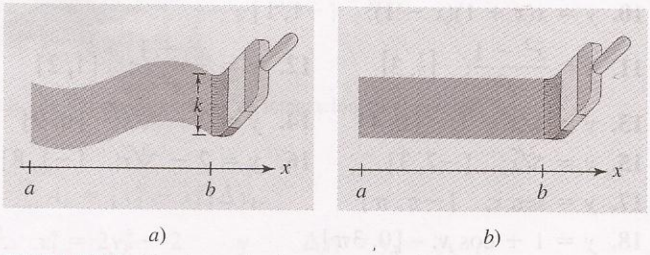


FIGURA 3.2.16 Brochazos de pintura en el problema 68

≡ Proyectos

69. El área más grande Los puntos A y B están sobre una recta y los puntos C y D están sobre una recta paralela a la primera recta. Los puntos en la FIGURA 3.2.17*a*) forman un rectángulo $ABCD$. Los puntos C y D se mueven a la izquierda como se muestra en la figura 3.2.17*b*) de modo que $ABC'D'$ forme un paralelogramo. Analice: ¿cuál tiene mayor área, el rectángulo $ABCD$ o el paralelogramo $ABC'D'$?

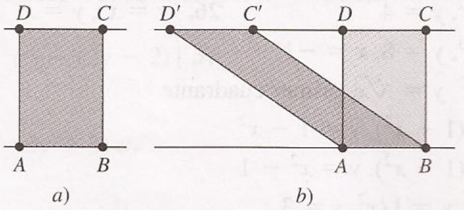


FIGURA 3.2.17 Rectángulo y paralelogramo en el problema 69

70. Principio de Cavalieri Escriba un reporte breve acerca del principio de Cavalieri. Analice los problemas 68 y 69 en su reporte.

3.3 Volúmenes de sólidos: método de las rebanadas

Introducción La forma que indiscutiblemente viene a la mente al evocar las palabras **cilindro recto** es el cilindro *circular* recto; es decir, la conocida forma de una lata de aluminio. Sin embargo, un cilindro recto no necesita ser circular. Por geometría, un **cilindro recto** se define como un sólido acotado por dos regiones planas congruentes, en planos paralelos y una superficie lateral que es generada por un segmento de recta perpendicular a ambos planos y cuyos extremos constituyen los límites de las regiones planas. Cuando las regiones son círculos, obtenemos el cilindro circular recto. Si las regiones son rectángulos, el cilindro es un paralelepípedo rectangular. Algo común a todos los cilindros, como los cinco mostrados en la FIGURA 3.3.1, es que su volumen V está dado por la fórmula

$$V = B \cdot h, \tag{1}$$

donde B denota el área de una base (es decir, el área de una de las regiones planas) y h denota la altura del cilindro (es decir, la distancia perpendicular entre las regiones planas).

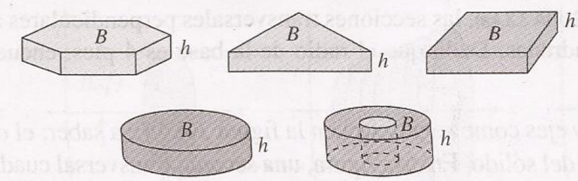


FIGURA 3.3.1 Cinco cilindros rectos diferentes

En esta sección se demostrará cómo es posible usar la integral definida para calcular volúmenes de ciertos tipos de sólidos, específicamente sólidos con sección transversal conocida. La fórmula (1) es especialmente importante en el siguiente análisis.

Método de rebanadas Suponga que V es el volumen del sólido mostrado en la FIGURA 3.3.2 acotado por planos que son perpendiculares al eje x en $x = a$ y $x = b$. Además, suponga que conoce una función continua $A(x)$ que proporciona el área de una región de sección transversal que se forma al *rebanar* el sólido por un plano perpendicular al eje x; en otras palabras, una rebanada es la intersección del sólido y un plano. Por ejemplo, para $a < x_1 < x_2 < b$ las áreas de las secciones transversales mostradas en la figura 3.3.2 son $A(x_1)$ y $A(x_2)$. Con esto en mente, suponga que rebana al sólido en cortes delgados por planos paralelos (semejantes a rebanadas de pan de caja comercial) de modo que el grosor o ancho de una rebanada es Δx_k. Al usar cilindros rectos para aproximar los volúmenes de estas rebanadas es posible construir una integral definida que proporcione el volumen V del sólido.

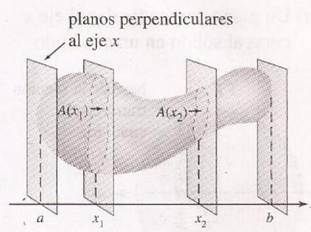


FIGURA 3.3.2 Las regiones o las secciones transversales tienen áreas conocidas


Una pieza de pan es una rodaja formada por dos rebanadas

Construcción de una integral Ahora considere rebanar el sólido en n rodajas. Si P es la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

del intervalo $[a, b]$ y x_k^* es un punto muestra en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces una aproximación al volumen del sólido sobre este subintervalo, o rebanada, es el volumen V_k del cilindro recto, que se muestra en la ampliación de la FIGURA 3.3.3. El área B de la base del cilindro recto es el área $A(x_k^*)$ de la sección transversal y su altura h es Δx_k de modo que por (1) su volumen es

$$V_k = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = A(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = A(x_k^*)\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Se concluye que la suma de Riemann de los volúmenes $V_k = A(x_k^*)\,\Delta x_k$ de los n cilindros rectos,

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\,\Delta x_k,$$

es una aproximación al volumen V del sólido sobre $[a, b]$. Usamos la integral definida

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\,\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx$$

como definición del volumen V del sólido.

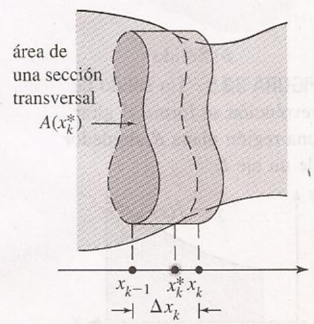


FIGURA 3.3.3 El volumen de un cilindro recto es una aproximación al volumen de una rebanada

Definición 3.3.1 Volumen por rebanadas

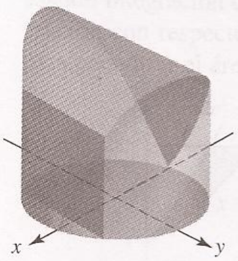
Sea V el volumen de un sólido acotado por planos perpendiculares al eje x en $x = a$ y $x = b$. Si $A(x)$ es una función continua que proporciona el área de una sección transversal del sólido formado por un plano perpendicular al eje x en cualquier punto en el intervalo $[a, b]$, entonces el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x)\,dx. \tag{3}$$

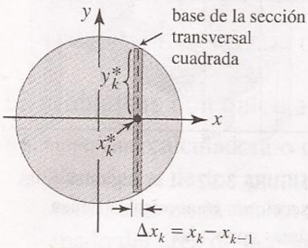
Tenga presente que no hay nada especial sobre la variable x en (3); dependiendo de la geometría y el análisis del problema también es posible terminar con una integral $\int_c^d A(y)\,dy$.

EJEMPLO 1 Sólido con secciones transversales cuadradas

Para el sólido en la FIGURA 3.3.4*a*), las secciones transversales perpendiculares a un diámetro de una base circular son cuadradas. Dado que el radio de la base es 4 pies, encuentre el volumen del sólido.



a) Un plano perpendicular al eje x corta al sólido en un cuadrado



b) Base circular del sólido

FIGURA 3.3.4 Sólido en el ejemplo 1

Solución Sean x y y ejes como se muestra en la figura 3.3.4*a*); a saber: el origen está en el centro de la base circular del sólido. En esta figura, una sección transversal cuadrada se muestra perpendicular al eje x. Puesto que la base del sólido es un círculo, tenemos $x^2 + y^2 = 4^2$. En la figura 3.3.4*b*), la línea discontinua en x_k^* representa la sección transversal del sólido perpendicular al eje x en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ en una partición del intervalo $[-4, 4]$. A partir de esto vemos que la longitud de un lado de la sección transversal cuadrada es $2y_k^* = 2\sqrt{16 - (x_k^*)^2}$. Por tanto, el área de una sección transversal cuadrada es

$$A(x_k^*) = \left(2\sqrt{16 - (x_k^*)^2}\right)^2 = 64 - 4(x_k^*)^2.$$

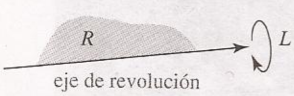
El volumen del cilindro recto que aproxima el volumen del sólido o rebanada en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es

$$V_k = A(x_k^*)\,\Delta x_k = (64 - 4(x_k^*)^2)\,\Delta x_k.$$

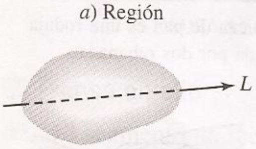
Al formar la suma $\sum_{k=1}^{n} V_k$ y tomar el límite cuando $\|P\| \to 0$ obtenemos la integral definida

$$V = \int_{-4}^{4} (64 - 4x^2)\,dx = 64x - \frac{4}{3}x^3\Big]_{-4}^{4} = \frac{512}{3} - \left(-\frac{512}{3}\right) = \frac{1\,024}{3}. \;\blacksquare$$

Sólidos de revolución Si una región R en el plano xy se hace girar alrededor de un eje L, se genera un sólido denominado **sólido de revolución**. Vea la FIGURA 3.3.5.



a) Región



b) Sólido

FIGURA 3.3.5 Un sólido de revolución se forma al girar una región plana R alrededor de un eje L

Método del disco Como acaba de analizarse, el volumen V de un sólido puede encontrarse por medio de una integral definida siempre que se conoce una función $A(x)$ que proporciona el área de una sección transversal formada al hacer pasar un plano por el sólido de forma perpendicular a un eje. En el caso de encontrar el volumen de un sólido de revolución, siempre es posible encontrar $A(x)$; el eje en cuestión es el eje de revolución L. Vemos que al rebanar el sólido por medio de dos planos paralelos perpendiculares al eje de revolución, el volumen de las rebanadas resultantes del sólido pueden aproximarse por cilindros *circulares* rectos que son discos o arandelas. A continuación se ilustrará la construcción de una integral de volumen usando discos.

Construcción de una integral Sea R la región acotada por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la FIGURA 3.3.6. Si esta región se hace girar alrededor del eje x, encontramos el volumen V del sólido de revolución resultante.

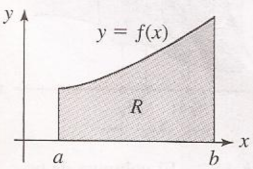


FIGURA 3.3.6 Región a girar alrededor del eje x

Sea P una partición de $[a, b]$ y sea x_k^* cualquier número en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ como se muestra en la FIGURA 3.3.7*a*). A medida que el elemento rectangular de ancho Δx_k y altura $f(x_k^*)$ gira alrededor del eje x, genera un disco sólido. Luego, la sección transversal del sólido determinada por un plano que corta la superficie en x_k^* es un círculo de radio $r = f(x_k^*)$, y así el área de la sección transversal es $A(x_k^*) = \pi[f(x_k^*)]^2$. El volumen del cilindro circular recto, o disco sólido, de radio $r = f(x_k^*)$ y altura $h = \Delta x_k$ es $\pi r^2 h$ o

$$V_k = A(x_k^*)\,\Delta x_k = \pi[f(x_k^*)]^2\,\Delta x_k.$$

La suma de Riemann

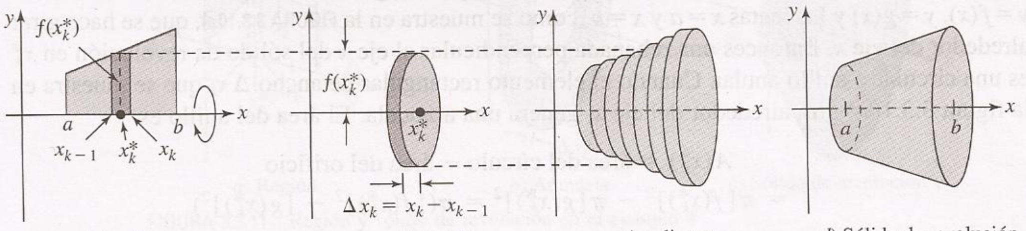
$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_k^*)]^2\,\Delta x_k$$

representa una aproximación al volumen del sólido mostrado en la figura 3.3.7*d*). Esto sugiere que el volumen V del sólido de revolución está dado por

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_k^*)]^2\,\Delta x_k$$

o bien,

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx. \tag{4}$$



a) Región *b*) Disco *c*) *n* discos *d*) Sólido de revolución

FIGURA 3.3.7 Cuando el elemento rectangular en *a*) gira alrededor del eje x se genera el disco circular en *b*)

Si una región R se hace girar alrededor de algún otro eje, entonces (4) puede simplemente no ser aplicable al problema de encontrar el volumen del sólido resultante. En lugar de aplicar una fórmula a ciegas, usted debe establecer una integral con sumo cuidado por medio del análisis de la geometría de cada problema. Un caso así se analizará en el ejemplo 6.

EJEMPLO 2 Método del disco

Encuentre el volumen V del sólido formado al girar alrededor del eje x la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$.

Solución En la **FIGURA 3.3.8*a*)** se muestra la región en cuestión. Luego, el área de una rebanada de la sección transversal x_k^* es

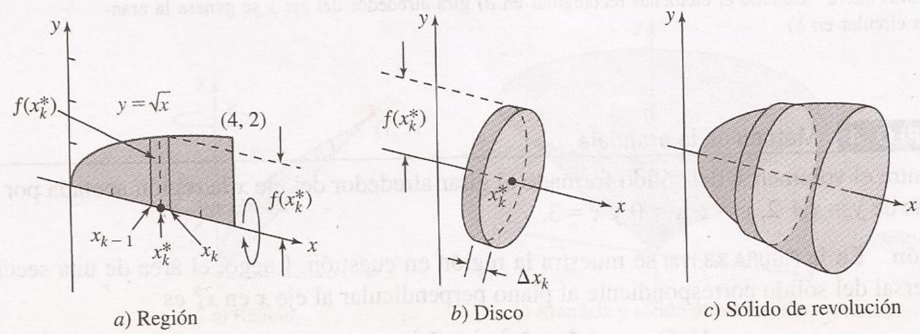
$$A(x_k^*) = \pi[f(x_k^*)]^2 = \pi[(x_k^*)^{1/2}]^2 = \pi x_k^*,$$

y así el volumen del disco correspondiente mostrado en la figura 3.3.8*b*) es

$$V_k = A(x_k^*)\,\Delta x_k = \pi x_k^*\,\Delta x_k.$$

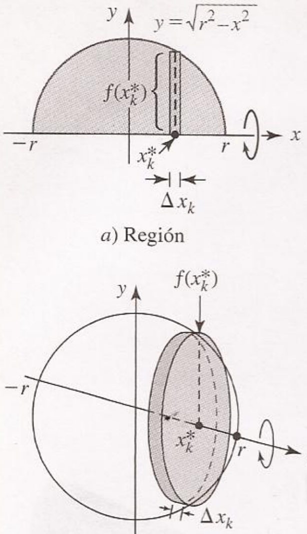
Por tanto, el volumen del sólido es

$$V = \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\frac{1}{2}x^2\Big]_0^4 = 8\pi.$$



a) Región *b*) Disco *c*) Sólido de revolución

FIGURA 3.3.8 Región y sólido de revolución en el ejemplo 2 ■



a) Región

b) Esfera

FIGURA 3.3.9 Semicírculo y esfera en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Volumen de una esfera

Demuestre que el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Solución Una esfera de radio r puede generarse al girar un semicírculo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje x. Por la FIGURA 3.3.9 vemos que el área de una región de la sección transversal del sólido perpendicular al eje x en x_k^* es

$$A(x_k^*) = \pi[f(x_k^*)]^2 = \pi\left(\sqrt{r^2 - (x_k^*)^2}\right)^2 = \pi(r^2 - (x_k^*)^2)$$

y por tanto, el volumen de un disco es

$$V_k = A(x_k^*)\,\Delta x_k = \pi(r^2 - (x_k^*)^2)\,\Delta x_k.$$

Al usar (4) observamos que el volumen de la esfera es

$$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left(r^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg]_{-r}^{r} = \pi\frac{2}{3}r^3 - \left(-\pi\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3. \quad ■$$

Método de la arandela Sea R la región acotada por las gráficas de las funciones continuas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la FIGURA 3.3.10*a*), que se hace girar alrededor del eje x. Entonces una rebanada perpendicular al eje x del sólido de revolución en x_k^* es una circular o anillo anular. Cuando el elemento rectangular de ancho Δx_k que se muestra en la figura 3.3.10*a*) gira alrededor del eje x, genera una arandela. El área del anillo es

$$\begin{aligned} A(x_k^*) &= \text{área del círculo} - \text{área del orificio} \\ &= \pi[f(x_k^*)]^2 - \pi[g(x_k^*)]^2 = \pi([f(x_k^*)]^2 - [g(x_k^*)]^2) \end{aligned}$$

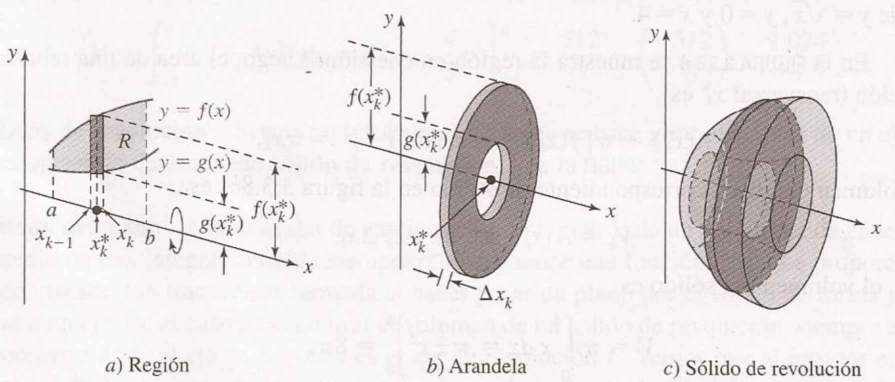
y el volumen V_k de la arandela representativa mostrada en la figura 3.3.10*b*) es

$$V_k = A(x_k^*)\,\Delta x_k = \pi([f(x_k^*)]^2 - [g(x_k^*)]^2)\,\Delta x_k.$$

En consecuencia, el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx. \tag{5}$$

Observe que la integral en (5) se reduce a (4) cuando $g(x) = 0$.



a) Región *b*) Arandela *c*) Sólido de revolución

FIGURA 3.3.10 Cuando el elemento rectangular en *a*) gira alrededor del eje x se genera la arandela circular en *b*)

EJEMPLO 4 Método de la arandela

Encuentre el volumen V del sólido formado al girar alrededor del eje x la región acotada por las gráficas de $y = x + 2$, $y = x$, $x = 0$ y $x = 3$.

Solución En la FIGURA 3.3.11*a*) se muestra la región en cuestión. Luego, el área de una sección transversal del sólido correspondiente al plano perpendicular al eje x en x_k^* es

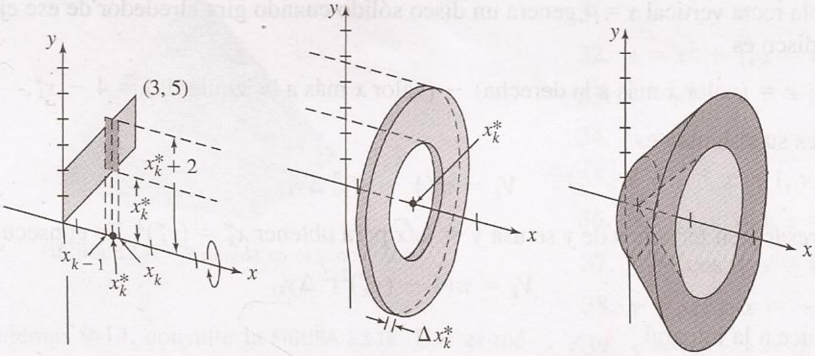
$$A(x_k^*) = \pi(x_k^* + 2)^2 - (x_k^*)^2 = \pi(4x_k^* + 4).$$

Como se ve en la figura 3.3.11*a*) y *b*), un elemento rectangular vertical de ancho Δx_k, cuando se hace girar alrededor del eje *x*, produce una arandela cuyo volumen es

$$V_k = A(x_k^*)\,\Delta x_k = \pi(4x_k^* + 4)\,\Delta x_k.$$

El proceso usual de sumas y límites acostumbrado lleva a la integral definida para el volumen *V* del sólido de revolución:

$$V = \pi\int_0^3 (4x+4)\,dx = \pi(2x^2+4x)\Big]_0^3 = 30\pi.$$



a) Región *b*) Arandela *c*) Sólido de revolución

FIGURA 3.3.11 Región y sólido de revolución en el ejemplo 4 ■

EJEMPLO 5 Integración con respecto a *y*

Encuentre el volumen *V* del sólido formado por la región que gira alrededor del eje *x* acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

Solución Cuando el elemento rectangular horizontal en la FIGURA 3.3.12*a*) gira alrededor del eje *y* genera una arandela de ancho Δy_k. El área $A(y_k^*)$ de la región anular en y_k^* es

$$A(y_k^*) = \text{área del círculo} - \text{área del orificio} - 1$$

El radio del círculo y el radio del hueco se obtienen al despejar, a su vez, $y = x$ y $y = \sqrt{x}$ para *x* en términos de *y*:

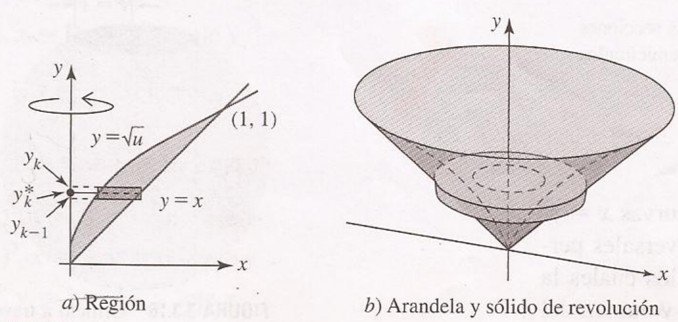
$$A(y_k^*) = \pi(y_k^*)^2 - \pi[(y_k^*)^2]^2 = \pi((y_k^*)^2 - (y_k^*)^4).$$

Así, el volumen de una arandela es

$$V_k = A(y_k^*)\,\Delta y_k = \pi((y_k^*)^2 - (y_k^*)^4)\,\Delta y_k.$$

Usualmente sumando los V_k y tomando el límite de la suma cuando $\|P\| \to 0$ llevan a la integral definida para el volumen del sólido:

$$V = \pi\int_0^1 (y^2 - y^4)\,dy = \pi\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5\right)\Big]_0^1 = \frac{2}{15}\pi.$$



a) Región *b*) Arandela y sólido de revolución

FIGURA 3.3.12 Región y sólido de revolución en el ejemplo 5 ■

Revolución alrededor de una recta El siguiente ejemplo muestra cómo encontrar el volumen de un sólido de revolución cuando una región se hace girar alrededor de un eje que no es un eje de coordenadas.

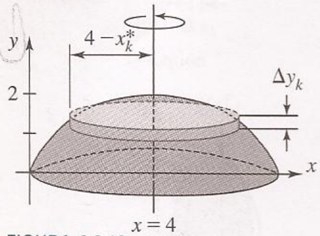


FIGURA 3.3.13 Sólido de revolución en el ejemplo 6

EJEMPLO 6 Eje de revolución que no es un eje de coordenadas

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar la región alrededor de la recta $x = 4$ que se muestra en el ejemplo 2.

Solución El sólido de revolución en forma de domo se muestra en la FIGURA 3.3.13. Por inspección de la figura vemos que un elemento rectangular horizontal de ancho Δy_k que es perpendicular a la recta vertical $x = 4$ genera un disco sólido cuando gira alrededor de ese eje. El radio r de ese disco es

$$r = (\text{valor } x \text{ más a la derecha}) - (\text{valor } x \text{ más a la izquierda}) = 4 - x_k^*,$$

y entonces su volumen es

$$V_k = \pi(4 - x_k^*)^2\,\Delta y_k.$$

Para expresar x en términos de y se usa $y = \sqrt{x}$ para obtener $x_k^* = (y_k^*)^2$. En consecuencia,

$$V_k = \pi(4 - (y_k^*)^2)^2\,\Delta y_k.$$

Eso conduce a la integral

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^2 (4 - y^2)^2\,dy \\ &= \pi\int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4)\,dy \\ &= \pi\left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right)\Big]_0^2 = \frac{256}{15}\pi. \end{aligned}$$ ■

3.3 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-7.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, use el método de las rebanadas para encontrar el volumen del sólido si se proporcionan sus secciones transversales perpendiculares a un diámetro de una base circular. Suponga que el radio de la base es 4.

1.

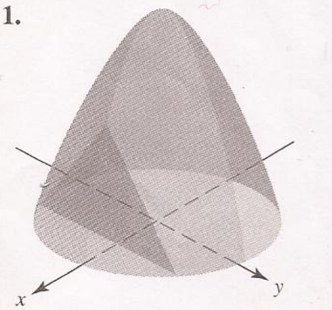


FIGURA 3.3.14 Las secciones transversales son triángulos equiláteros

2.

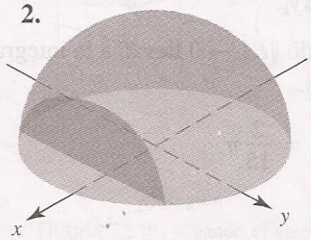


FIGURA 3.3.15 Las secciones transversales son semicírculos

3. La base de un sólido está acotada por las curvas $x = y^2$ y $x = 4$ en el plano xy. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son rectángulos para los cuales la altura es cuatro veces la base. Encuentre el volumen del sólido.

4. La base de un sólido está acotada por la curva $y = 4 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros. Encuentre el volumen del sólido.

5. La base de un sólido es un triángulo isósceles cuya base y altura miden, respectivamente, 4 y 5 pies. Las secciones transversales perpendiculares a la altura son semicírculos. Encuentre el volumen del sólido.

6. Por el centro de una esfera sólida de radio $r = 2$ pies se perfora un orificio de 1 pie de radio. Encuentre el volumen del sólido restante. Vea la FIGURA 3.3.16.

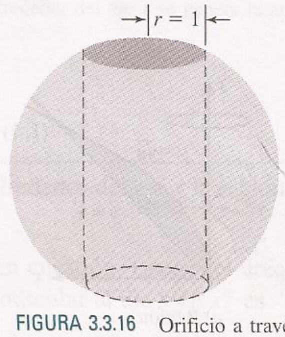


FIGURA 3.3.16 Orificio a través de la esfera en el problema 6

7. La base de un sólido es un triángulo isósceles recto formado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 3$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadrados. Encuentre el volumen del sólido.

8. Suponga que la pirámide que se muestra en la FIGURA 3.3.17 tiene altura h y base cuadrada de área B. Demuestre que el volumen de la pirámide está dado por $A = \frac{1}{3}hB$. [*Sugerencia*: Sea b la longitud de un lado de la base cuadrada.]

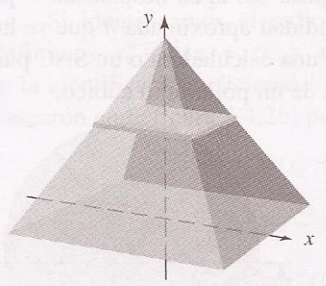


FIGURA 3.3.17 Pirámide en el problema 8

En los problemas 9-14, consulte la FIGURA 3.3.18. Use el método del disco o arandela para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región dada alrededor de la recta indicada.

9. R_1 alrededor de OC **10.** R_1 alrededor de OA
11. R_2 alrededor de OA **12.** R_2 alrededor de OC
13. R_1 alrededor de AB **14.** R_2 alrededor de AB

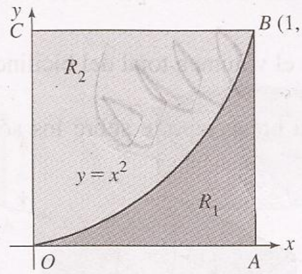


FIGURA 3.3.18 Regiones para los problemas 9-14

En los problemas 15-40, use el método del disco o de la arandela para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor de la recta o eje que se indica.

15. $y = 9 - x^2, y = 0$; eje x
16. $x^2 + 1, x = 0, y = 5$; eje y
17. $y = \dfrac{1}{x}, x = 1, y = \dfrac{1}{2}$; eje y
18. $y = \dfrac{1}{x}, x = \dfrac{1}{2}, x = 3, y = 0$; eje x
19. $y = (x - 2)^2, x = 0, y = 0$; eje x
20. $y = (x + 1)^2, x = 0, y = 0$; eje y
21. $y = 4 - x^2, y = 1 - \frac{1}{4}x^2$; eje x
22. $y = 1 - x^2, y = x^2 - 1, x = 0$, primer cuadrante; eje y
23. $y = x, y = x + 1, x = 0, y = 2$; eje y
24. $x + y = 2, x = 0, y = 0, y = 1$; eje x
25. $y = \sqrt{x - 1}, x = 5, y = 0$; $x = 5$
26. $x = y^2, x = 1$; $x = 1$
27. $y = x^{1/3}, x = 0, y = 1$; $y = 2$
28. $x = -y^2 + 2y, x = 0$; $x = 2$
29. $x^2 - y^2 = 16, x = 5$; eje y
30. $y = x^2 - 6x + 9, y = 9 - \frac{1}{2}x^2$; eje x
31. $x = y^2, y = x - 6$; eje y
32. $y = x^3 + 1, x = 0, y = 9$; eje y
33. $y = x^3 - x, y = 0$; eje x
34. $y = x^3 + 1, x = 1, y = 0$; eje x
35. $y = e^{-x}, x = 1, y = 1$; $y = 2$
36. $y = e^x, y = 1, x = 2$; eje x
37. $y = |\cos x|, y = 0, 0 \le x \le 2\pi$; eje x
38. $y = \sec x, x = -\pi/4, x = \pi/4, y = 0$; eje x
39. $y = \tan x, y = 0, x = \pi/4$; eje x
40. $y = \operatorname{sen} x, y = \cos x, x = 0$, primer cuadrante; eje x

≡ Piense en ello

41. Relea los problemas 68-70 acerca del principio de Cavalieri, en los ejercicios 3.2. A continuación muestre que los cilindros circulares de la FIGURA 3.3.19 tienen el mismo volumen.

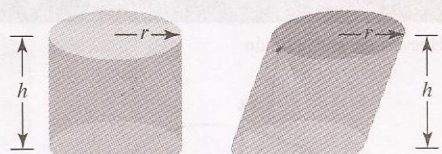


FIGURA 3.3.19 Cilindros en el problema 41

42. Considere el cilindro circular recto de radio a que se muestra en la FIGURA 3.3.20. Un plano inclinado a un ángulo θ con respecto a la base del cilindro pasa por un diámetro de la base. Encuentre el volumen de la cuña resultante que se corta del cilindro cuando

a) $\theta = 45°$ *b)* $\theta = 60°$.

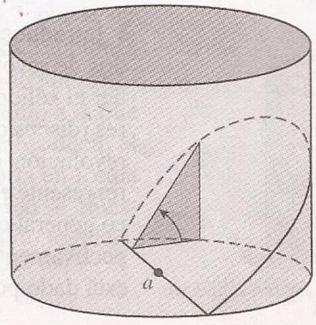


FIGURA 3.3.20 Cilindro y cuña en el problema 42

☰ Proyectos

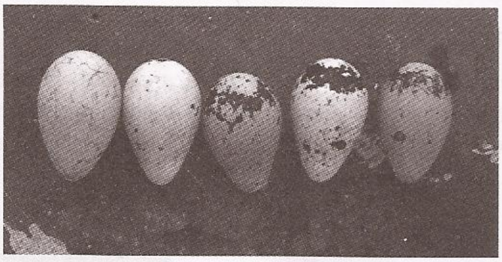
43. Para las aves Un modelo matemático para la forma de un huevo puede obtenerse al girar la región acotada por las gráficas de $y = 0$ y la función $f(x) = P(x)\sqrt{1 - x^2}$, donde $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio cúbico, alrededor del eje x. Por ejemplo, un huevo de arao común corresponde a $P(x) = -0.07x^3 - 0.02x^2 + 0.2x + 0.56$. En la FIGURA 3.3.21 se muestra la gráfica de f obtenida con ayuda de un SAC.

a) Encuentre una fórmula general para el volumen V de un huevo con base en el modelo matemático $f(x) = P(x)\sqrt{1 - x^2}$, donde $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. [*Sugerencia*: Este problema puede resolverse con cálculos manuales, aunque es lento y "confuso". Use un SAC para realizar la integración.]

b) Use la fórmula obtenida en el inciso *a*) para estimar el volumen de un huevo de arao común.

c) Un huevo de somorgujo petirrojo corresponde a $P(x) = -0.06x^3 + 0.04x^2 + 0.1x + 0.54$. Use un SAC para obtener la gráfica de f.

d) Use el inciso *a*) para estimar el volumen de un huevo del arao común.



Huevos de arao común

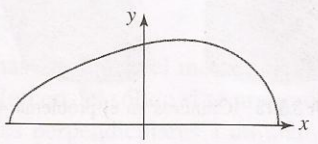


FIGURA 3.3.21 Modelo de la forma del huevo de arao común en el problema 43

44. Ese sentimiento de hundirse Una bola esférica de madera de radio r flota en un estanque de agua tranquila. Sea h la profundidad a que se hundirá la bola. Vea la FIGURA 3.3.22.

a) Demuestre que el volumen de la porción sumergida de la bola está dado por $V = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3$.

b) Suponga que el peso específico de la bola se denota por ρ_{bola} y que el peso específico del agua es ρ_{agua} (medida en lb/pies^3). Si $r = 3$ pulg y $\rho_{\text{bola}} = 0.4\ \rho_{\text{agua}}$, use el principio de Arquímedes —el peso de la bola es igual al peso del agua desplazada— para determinar la profundidad aproximada h que se hundirá la bola. Necesita una calculadora o un SAC para resolver una ecuación de un polinomio cúbico.

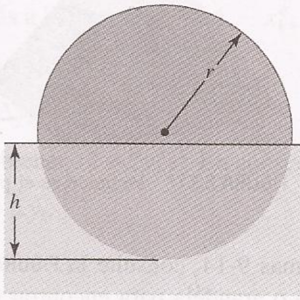


FIGURA 3.3.22 Bola de madera flotante en el problema 44

45. Sólidos de Steinmetz El sólido formado por dos cilindros circulares de radio r cuyos ejes se cortan formando un ángulo recto se denomina **bicilindro** y es un caso especial de los sólidos de Steinmetz. Por razones de claridad se muestra la octava parte del sólido en la FIGURA 3.3.23.

a) Encuentre el volumen total del bicilindro ilustrado en la figura.

b) Escriba un breve reporte sobre los sólidos de Steinmetz.

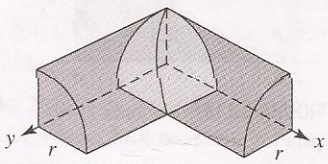


FIGURA 3.3.23 Cilindros circulares rectos que se cortan en el problema 45

3.4 Volúmenes de sólidos: método de los cascarones

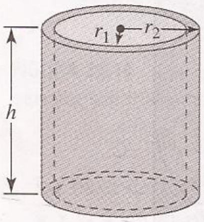


FIGURA 3.4.1 Cascarón cilíndrico

▌Introducción En esta sección continuamos el análisis de cómo encontrar volúmenes de sólidos de revolución. Pero en lugar de usar planos perpendiculares al eje de revolución para rebanar el sólido en rodajas cuyo volumen puede aproximarse por cilindros circulares rectos regulares (discos o arandelas), desarrollamos un nuevo método para encontrar volúmenes de sólidos de revolución que utiliza cascarones cilíndricos circulares. Antes de construir una integral que represente el **método de los cascarones** es necesario encontrar el volumen del cascarón cilíndrico general que se muestra en la FIGURA 3.4.1. Si, como se observa en la figura, r_1 y r_2 denotan respectivamente los radios interior y exterior del cascarón, y h es su altura, entonces su volumen está dado por la diferencia

$$\begin{aligned}&\text{volumen del cilindro exterior} - \text{volumen del cilindro interior}\\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)h = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h. \qquad (1)\end{aligned}$$

Construcción de una integral En la sección 3.3 vimos que un elemento rectangular de área que es perpendicular a un eje de revolución genera, al girar, ya sea un disco circular o una arandela circular. No obstante, si hacemos girar el elemento rectangular mostrado en la FIGURA 3.4.2*a*) alrededor del eje y, generamos un cascarón hueco como se muestra en la figura 3.4.2*b*). Para encontrar el volumen que se observa en la figura 3.4.2*c*), sea P una partición arbitraria del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

La partición P divide el intervalo en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, de ancho $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Si identificamos el radio exterior como $r_2 = x_k$ y el radio interior como $r_1 = x_{k-1}$ y definimos $x_k^* = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$, entonces x_k^* es el punto medio del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Con la identificación adicional $h = f(x_k^*)$ por (1) se concluye que el volumen representativo del cascarón en la figura 3.4.2*b*) puede escribirse como

$$V_k = \pi(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1})h$$

$$= 2\pi \frac{x_k + x_{k-1}}{2} h(x_k - x_{k-1})$$

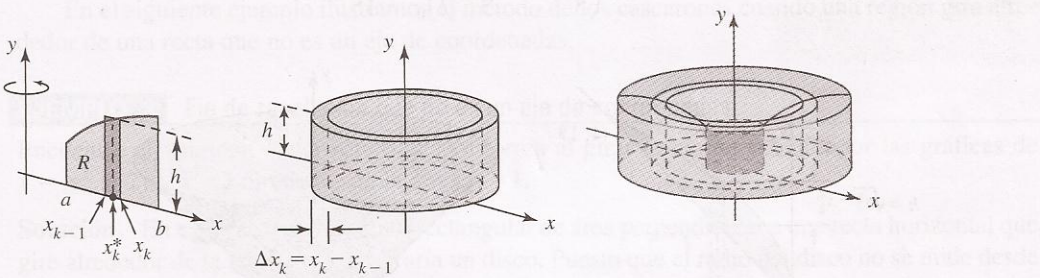
o bien, $$V_k = 2\pi x_k^* f(x_k^*)\, \Delta x_k.$$

Una aproximación al volumen del sólido está dada por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k^* f(x_k^*)\, \Delta x_k. \tag{2}$$

Cuando la norma $\|P\|$ de la partición tiende a cero, el límite de (2) es una integral definida que se usa como la definición del volumen V del sólido:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx. \tag{3}$$

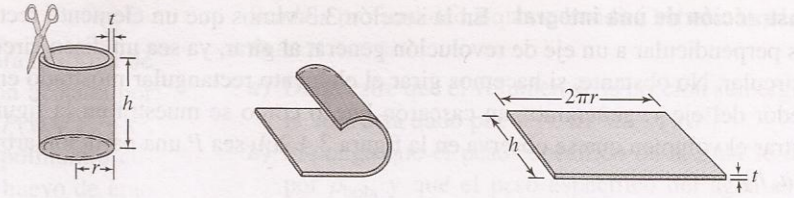


a) Región *b*) Arandela *c*) Sólido de revolución

FIGURA 3.4.2 Cuando el elemento rectangular en *a*) gira alrededor del eje y se genera el cascarón en *b*)

Como se mencionó en las *Notas desde el aula* al final de la sección 3.2, no es posible obtener una integral, que en este caso representa el volumen de un sólido de revolución, que "funcione" en todos los casos posibles. De nuevo se apremia al lector a que no memorice una fórmula particular como (3). Intente comprender la interpretación geométrica de las componentes del integrando. Por ejemplo, $f(x)$, que representa la altura del rectángulo en la figura 3.4.2, puede ser la diferencia $f(x) - g(x)$ si el elemento rectangular está entre las gráficas de dos funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$, $f(x) \geq g(x)$. Para establecer una integral para un problema dado sin adentrarse en un tedioso análisis, considere que un cascarón es una delgada lata de aluminio a la que se han quitado las partes superior e inferior. Para encontrar el volumen de la concha (es decir, el volumen del metal en la analogía de la lata de aluminio), imagine que la lata se corta en forma recta a lo largo de su lado y que se aplana como se ilustra en la FIGURA 3.4.3*a*) y *b*). Como se muestra en la figura 3.4.3*c*), entonces el volumen de la concha es el volumen de este sólido regular:

$$\begin{aligned} \text{volumen} &= (\text{longitud}) \cdot (\text{ancho}) \cdot (\text{grosor}) \\ &= (\text{circunferencia del cilindro}) \cdot (\text{altura}) \cdot (\text{grosor}) \\ &= 2\pi rht. \end{aligned} \tag{4}$$



a) La arandela se corta por su lado *b*) Se aplana *c*) El resultado es un sólido rectangular

FIGURA 3.4.3 Determinación del volumen de un cascarón

EJEMPLO 1 Uso del método de los cascarones

Vuelva a leer el ejemplo 5 en la sección 3.3 antes de abordar este ejemplo.

Use el método de los cascarones para encontrar el volumen V del sólido que se forma al girar alrededor del eje y la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

Solución Este problema se resolvió en el ejemplo 5 de la sección 3.3. En ese ejemplo vimos que usar un elemento rectangular horizontal perpendicular al eje y de ancho Δy_k generaba una arandela al girarlo alrededor del eje y. En contraste, cuando un elemento rectangular vertical de ancho Δx_k gira alrededor del eje y genera un cascarón. Con ayuda de la FIGURA 3.4.4*a*) en (4) se hace la identificación $r = x_k^*$,

$$h = \text{gráfica superior} - \text{gráfica inferior} = \sqrt{x_k^*} - x_k^*,$$

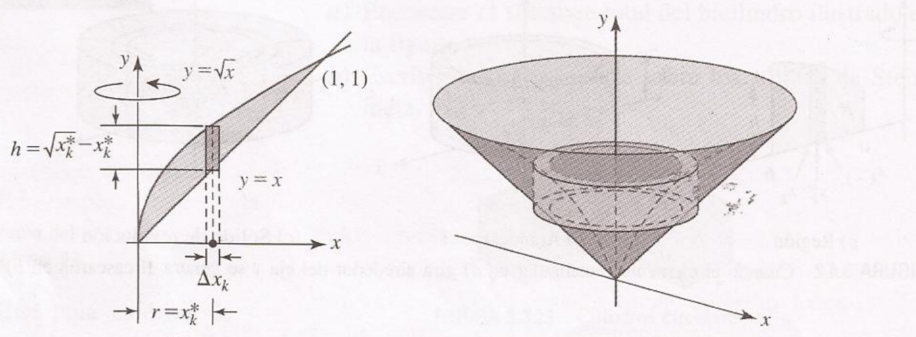
y $t = \Delta x_k$. A partir del volumen del cascarón,

$$V_k = 2\pi x_k^*\left(\sqrt{x_k^*} - x_k^*\right)\Delta x_k = 2\pi\left((x_k^*)^{3/2} - (x_k^*)^2\right)\Delta x_k,$$

obtenemos la integral definida al determinar el volumen del sólido:

$$V = 2\pi\int_0^1 (x^{3/2} - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big]_0^1 = \frac{2}{15}\pi.$$



a) Región *b*) Cascarón y sólido de revolución

FIGURA 3.4.4 Región y sólido de revolución en el ejemplo 1 ■

No siempre es conveniente o incluso posible usar los métodos del disco o de la arandela analizados en la última sección para encontrar el volumen de un sólido de revolución.

EJEMPLO 2 Uso del método de los cascarones

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar alrededor del eje y la gráfica de $y = \operatorname{sen} x^2$ y $y = 0$, $0 \le x \le \sqrt{\pi}$.

Solución La gráfica de $y = \operatorname{sen} x^2$ sobre el intervalo indicado en la FIGURA 3.4.5 se obtuvo con ayuda de un SAC.

Si elegimos usar un elemento rectangular horizontal para girarlo alrededor del eje y, se generaría una arandela. Para determinar los radios interior y exterior de la arandela sería necesario despejar x en $y = \operatorname{sen} x^2$ en términos de y. Aunque esto simplemente lleva a x^2 como un seno inverso, plantea un problema práctico: por ahora no es posible integrar una función trigonométrica inversa. Por tanto, atendemos al elemento rectangular vertical mostrado en la figura 3.4.5*a*). Cuando este elemento gira alrededor del eje *y*, se genera un cascarón con radio $r = x_k^*$, altura $h = \operatorname{sen}(x_k^*)^2$ y grosor $t = \Delta x_k$. Por (4), el volumen del cascarón es

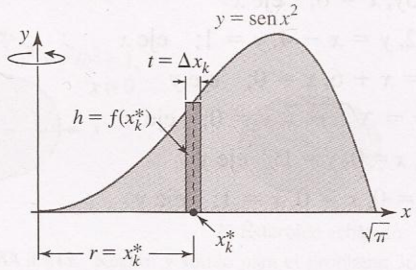
$$V_k = 2\pi x_k^* \operatorname{sen}(x_k^*)^2\, \Delta x_k.$$

Así, por (3) se tiene

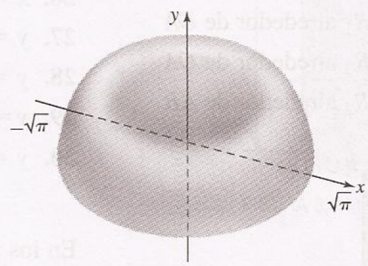
$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\, dx.$$

Si $u = x^2$, entonces $du = 2x\, dx$ y $x\, dx = \frac{1}{2} du$. Los límites de integración u se determinan a partir del hecho de que cuando $x = 0$, $u = 0$ y $x = \sqrt{\pi}$, $u = \pi$. En consecuencia, el volumen del sólido de revolución mostrado en la figura 3.4.5*b*) es

$$V = \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} u\, du = -\pi \cos u \Big]_0^{\pi} = \pi(1 + 1) = 2\pi.$$



a) Región



b) Sólido de revolución

FIGURA 3.4.5 Región y sólido de revolución en el ejemplo 2

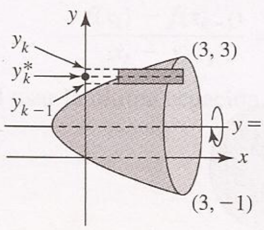
En el siguiente ejemplo ilustramos el método de los cascarones cuando una región gira alrededor de una recta que no es un eje de coordenadas.

EJEMPLO 3 Eje de revolución que no es un eje de coordenadas

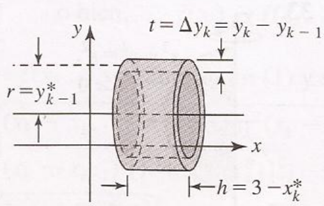
Encuentre el volumen *V* del sólido que se forma al girar la región acotada por las gráficas de $x = y^2 - 2y$ y $x = 3$ alrededor de la recta $y = 1$.

Solución En este caso, un elemento rectangular de área perpendicular a una recta horizontal que gire alrededor de la recta $y = 1$ generaría un disco. Puesto que el radio del disco no se mide desde el eje *x* sino desde la recta $y = 1$, sería necesario resolver $x = y^2 - 2y$ para *y* en términos de *x*. Este inconveniente puede evitarse si se usa un elemento horizontal de área, que entonces genera un cascarón como el que se muestra en la FIGURA 3.4.6*b*). Observe que cuando $x = 3$, la ecuación $3 = y^2 - 2y$, o en forma equivalente $(y + 1)(y - 3) = 0$, tiene las soluciones -1 y 3. Por tanto, sólo es necesario partir el intervalo [1, 3] sobre el eje *y*. Después de hacer las identificaciones $r = y_k^* - 1$, $h = 3 - x_k^*$ y $t = \Delta y_k$, por (4) se concluye que el volumen de un cascarón es

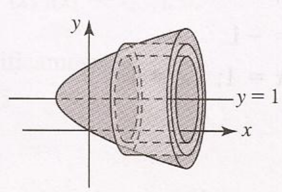
$$\begin{aligned} V_k &= 2\pi(y_k^* - 1)(3 - x_k^*)\Delta y_k \\ &= 2\pi(y_k^* - 1)(3 - (y_k^*)^2 + 2y_k^*)\Delta y_k \\ &= 2\pi(-(y_k^*)^3 + 3(y_k^*)^2 + y_k^* - 3)\Delta y_k. \end{aligned}$$



a) Región



b) Cascarón



c) Sólido de revolución

FIGURA 3.4.6 Región, cascarón y sólido de revolución en el ejemplo 3

A partir de la última línea se observa que el volumen del sólido es la integral definida

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^3 (-y^3 + 3y^2 + y - 3)\, dy \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{4}y^4 + y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 3y \right) \Bigg]_1^3 \\ &= 2\pi \left[\left(-\frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 9 \right) - \left(-\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3 \right) \right] = 8\pi. \end{aligned}$$

3.4 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-7.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, consulte la FIGURA 3.4.7. Use el método de los cascarones para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región dada alrededor de la recta indicada.

1. R_1 alrededor de OC
2. R_1 alrededor de OA
3. R_2 alrededor de BC
4. R_2 alrededor de OA
5. R_1 alrededor de AB
6. R_2 alrededor de AB

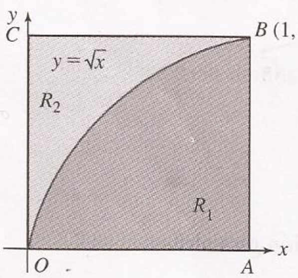


FIGURA 3.4.7 Regiones para los problemas 1-6

En los problemas 7-30, use el método de los cascarones para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor de la recta o eje que se indica.

7. $y = x, x = 0, y = 5$; eje x
8. $y = 1 - x, x = 0, y = 0$; $y = -2$
9. $y = x^2, x = 0, y = 3$, primer cuadrante; eje x
10. $y = x^2, x = 2, y = 0$; eje y
11. $y = x^2, x = 1, y = 0$; $x = 3$
12. $y = x^2, y = 9$; eje x
13. $y = x^2 + 4, x = 0, x = 2, y = 2$; eje y
14. $y = x^2 - 5x + 4, y = 0$; eje y
15. $y = (x - 1)^2, y = 1$; eje x
16. $y = (x - 2)^2, y = 4$; $x = 4$
17. $y = x^{1/3}, x = 1, y = 0$; $y = -1$
18. $y = x^{1/3} + 1, y = -x + 1, x = 1$; $x = 1$
19. $y = x^2, y = x$; eje y
20. $y = x^2, y = x$; $x = 2$
21. $y = -x^3 + 3x^2, y = 0$, primer cuadrante; eje y
22. $y = x^3 - x, y = 0$, segundo cuadrante; eje y
23. $y = x^2 - 2, y = -x^2 + 2, x = 0$, segundo y tercer cuadrantes; eje y
24. $y = x^2 - 4x, y = -x^2 + 4x$; $x = -1$
25. $x = y^2 - 5y, x = 0$; eje x
26. $x = y^2 + 2, y = x - 4, y = 1$; eje x
27. $y = x^3, y = x + 6, x = 0$; eje y
28. $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{1 - x}, y = 0$; eje x
29. $y = \operatorname{sen} x^2, x = 0, y = 1$; eje y
30. $y = e^{x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$; eje y

En los problemas 31-36, la región en el inciso *a*) gira alrededor del eje indicado, generando el sólido que vemos en el inciso *b*). Escoja entre los métodos del disco, de la arandela o de los cascarones para encontrar el volumen del sólido de revolución.

31.

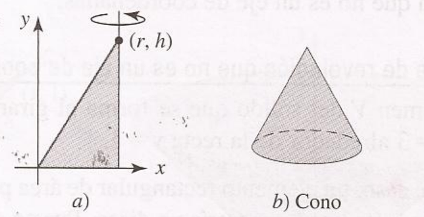


FIGURA 3.4.8 Región y sólido para el problema 31

32.

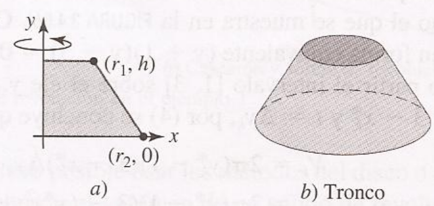


FIGURA 3.4.9 Región y sólido para el problema 32

33.

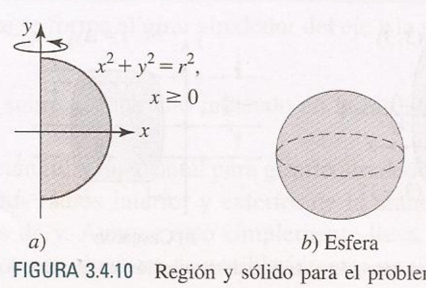
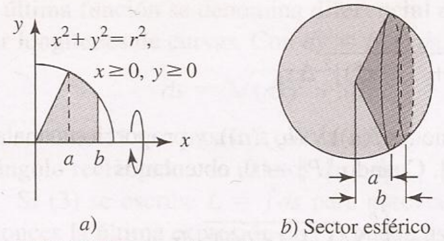


FIGURA 3.4.10 Región y sólido para el problema 33

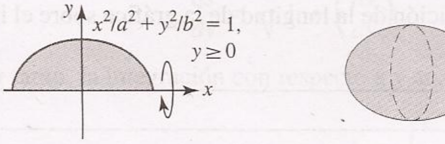
34.



a) *b*) Sector esférico

FIGURA 3.4.11 Región y sólido para el problema 34

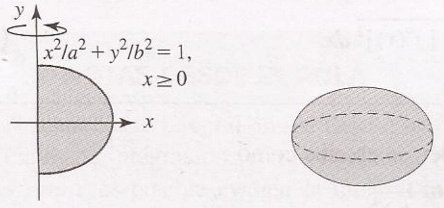
35.



a) *b*) Esferoide alargado

FIGURA 3.4.12 Región y sólido para el problema 35

36.



a) *b*) Esferoide achatado

FIGURA 3.4.13 Región y sólido para el problema 36

≡ Aplicaciones

37. Un cubo cilíndrico de radio r que contiene un líquido gira alrededor del eje y con velocidad angular constante ω. Es posible mostrar que la sección transversal del líquido está dada por $y = \omega^2 x^2/(2g)$, $-r \leq x \leq r$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Use el método de los cascarones para encontrar el volumen V del líquido en el líquido giratorio dado que la altura del cubo es h. Vea la FIGURA 3.4.14.

38. En el problema 37, determine la velocidad angular ω para la cual el fluido entra en contacto con el fondo del cubo. ¿Cuál es el volumen V correspondiente del líquido?

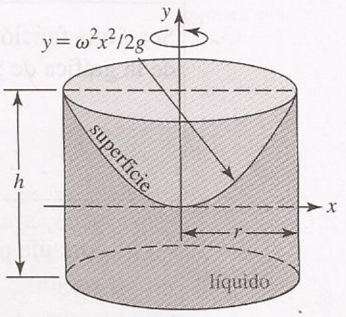


FIGURA 3.4.14 Cubo en los problemas 37 y 38

3.5 Longitud de arco

▮ Introducción Si una función $y = f(x)$ tiene una primera derivada continua sobre un intervalo $[a, b]$, entonces se dice que la gráfica es **suave** y f se denomina **función suave**. Como el nombre lo implica, una gráfica suave carece de picos. En el análisis que sigue se establece una fórmula formal de la **longitud** L, o **longitud de arco**, de una gráfica suave sobre un intervalo $[a, b]$. Vea la FIGURA 3.5.1.

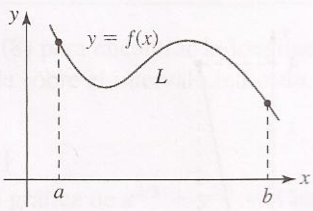


FIGURA 3.5.1 Determinación de la longitud L de la gráfica de f sobre $[a, b]$

▮ Construcción de una integral Sean f que tiene una gráfica suave sobre $[a, b]$ y P una partición arbitraria del intervalo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Como de costumbre, sean Δx_k el ancho del k-ésimo subintervalo y $\|P\|$ el ancho del subintervalo más grande. Como se muestra en la FIGURA 3.5.2*a*), es posible aproximar la longitud de la gráfica sobre cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ al encontrar la longitud L_k de la cuerda entre los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Por la figura 3.5.2*b*), la longitud L_k se obtiene a partir del teorema de Pitágoras:

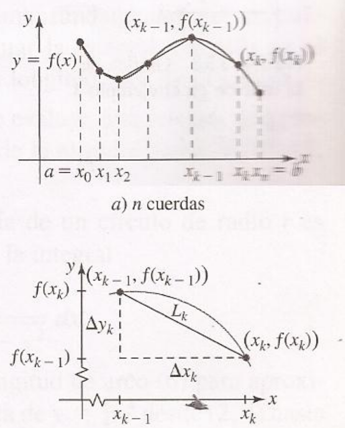
$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}. \qquad (1)$$

Por el teorema del valor medio sabemos que en cada subintervalo abierto x_k^* existe un número (x_{k-1}, x_k) tal que

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*) \qquad \text{o bien,} \qquad f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Al usar la última ecuación, $f(x_k) - f(x_{k-1})$ sustituimos en (1) y simplificamos:

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f'(x_k^*)]^2(x_k - x_{k-1})^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2(1 + [f'(x_k^*)]^2)} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k. \end{aligned}$$



a) *n* cuerdas

b) Acercamiento a la cuerda sobre el k-ésimo subintervalo

FIGURA 3.5.2 Aproximación de la longitud de una gráfica al sumar las longitudes de cuerdas

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k$$

representa la longitud de la curva poligonal que une $(a, f(a))$ y $(b, f(a))$, y proporciona una aproximación a la longitud total de la gráfica de $[a, b]$. Cuando $\|P\| \to 0$, obtenemos

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{2}$$

El análisis anterior sugiere usar (2) como la definición de la longitud de la gráfica sobre el intervalo.

Definición 3.5.1 Longitud de arco

Sea f una función para la cual f' es continua sobre un intervalo $[a, b]$. Entonces la **longitud** L de la gráfica de $y = f(x)$ sobre el intervalo está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{3}$$

La fórmula para la longitud de arco (3) también se escribe como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{4}$$

Se dice que una gráfica que tiene longitud de arco es **rectificable**.

EJEMPLO 1 Longitud de una curva

Encuentre la longitud de la gráfica $y = 4x^{3/2}$ del origen $(0, 0)$ al punto $(1, 4)$.

Solución La gráfica de la función sobre el intervalo $[0, 1]$ se muestra en la FIGURA 3.5.3. Luego,

$$\frac{dy}{dx} = 6x^{1/2}$$

es continua sobre el intervalo. En consecuencia, por (4) se concluye que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + [6x^{1/2}]^2}\, dx \\ &= \int_0^1 (1 + 36x)^{1/2}\, dx \\ &= \frac{1}{36}\int_0^1 (1 + 36x)^{1/2}(36\, dx) \\ &= \frac{1}{54}(1 + 36x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{54}[37^{3/2} - 1] \approx 4.1493. \end{aligned}$$

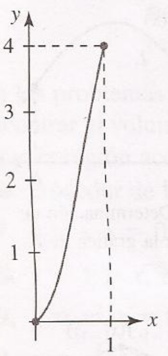


FIGURA 3.5.3 Gráfica de la función en el ejemplo 1

Diferencial de longitud de arco Si C es una curva suave definida por $y = f(x)$, entonces la longitud de arco entre un punto inicial $(a, f(a))$ y un punto variable $(x, f(x))$, donde $a \leq x \leq b$, está dada por

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt, \tag{5}$$

donde t representa una variable de integración ficticia. Resulta evidente que el valor de la integral en (5) depende de x, por lo que se denomina **función de longitud de arco**. Luego, por (10) de la sección 1.5, $ds/dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ y, en consecuencia,

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{6}$$

La última función se denomina **diferencial de la longitud de arco** y puede usarse para aproximar longitudes de curvas. Con $dy = f'(x)\,dx$, (6) puede escribirse como

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad \text{o bien,} \quad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \tag{7}$$

En la FIGURA 3.5.4 se muestra que la diferencial ds puede interpretarse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos dx y dy.

Si (3) se escribe $L = \int ds$ para abreviar y la curva C se define por $x = g(y)$, $c \le y \le d$, entonces la última expresión en (7) puede usarse para resolver ds/dy:

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad \text{o} \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy.$$

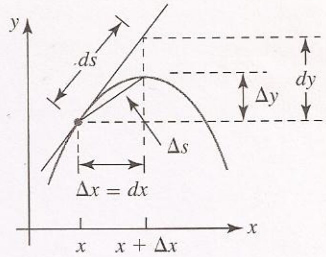


FIGURA 3.5.4 Interpretación geométrica de la diferencial de la longitud de arco

Por tanto, la integración con respecto a y análoga de (4) es

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy. \tag{8}$$

Vea los problemas 17 y 18 en los ejercicios 3.5.

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

A menudo, la integral en (3) lleva a problemas en los cuales se requieren técnicas especiales de integración. Vea la unidad 2. Pero aun con estos procedimientos ulteriores, *no siempre* es posible evaluar la integral indefinida $\int \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ en términos de las conocidas funciones elementales, incluso para algunas de las funciones más simples como $y = x^2$. Vea el problema 45 en los ejercicios 2.7.

3.5 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-7.

Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre la longitud de la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica.

1. $y = x$; $[-1, 1]$
2. $y = 2x + 1$; $[0, 3]$
3. $y = x^{3/2} + 4$; $[0, 1]$
4. $y = 3x^{2/3}$; $[1, 8]$
5. $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$; $[1, 4]$
6. $(y + 1)^2 = 4(x + 1)^3$; $[-1, 0]$
7. $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$; $[1, 4]$
8. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$; $[2, 4]$
9. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$; $[2, 3]$
10. $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{12x^3}$; $[1, 2]$
11. $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$; $[1, 8]$
12. $y = \begin{cases} x - 2, & 2 \le x < 3 \\ (x - 2)^{2/3}, & 3 \le x < 10; \\ \frac{1}{2}(x - 6)^{3/2}, & 10 \le x \le 15 \end{cases}$ $[2, 15]$

En los problemas 13-16 establezca, pero no evalúe, una integral para la longitud de la función dada sobre el intervalo indicado.

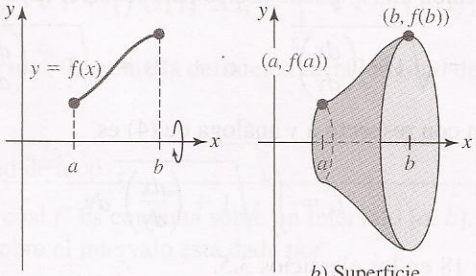
13. $y = x^2$; $[-1, 3]$
14. $y = 2\sqrt{x + 1}$; $[-1, 3]$
15. $y = \operatorname{sen} x$; $[0, \pi]$
16. $y = \tan x$; $[-\pi/4, \pi/4]$

En los problemas 17 y 18, use (8) para encontrar la longitud de la gráfica de la ecuación dada sobre el intervalo indicado.

17. $x = 4 - y^{2/3}$; $[0, 8]$
18. $5x = y^{5/2} + 5y^{-1/2}$; $[4, 9]$
19. Considere la longitud de la gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en el primer cuadrante.
    a) Muestre que el uso de (3) conduce a un integrando discontinuo.
    b) Suponga que el teorema fundamental del cálculo puede usarse para evaluar la integral obtenida en el inciso *a*) y encuentre la longitud total de la gráfica.
20. Establezca, pero no intente evaluar, una integral que proporcione la longitud total de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$.
21. Dado que la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$, encuentre el valor de la integral
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$$
22. Use la diferencial de la longitud de arco (6) para aproximar la longitud de la gráfica de $y = \frac{1}{4}x^4$ desde $(2, 4)$ hasta $(2.1, 4.862025)$.

3.6 Área de una superficie de revolución

Introducción Como se ha visto en las secciones 3.3 y 3.4, cuando una gráfica de una función continua $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ gira alrededor del eje x, genera un sólido de revolución. En esta sección tenemos interés en encontrar el área S de la superficie correspondiente; es decir, una **superficie de revolución** sobre $[a, b]$ como se muestra en la FIGURA 3.6.1*b*).



a) Gráfica *b*) Superficie

FIGURA 3.6.1 Superficie de revolución

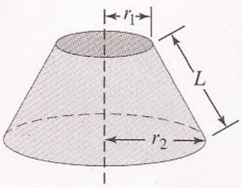


FIGURA 3.6.2 Tronco de un cono

Construcción de una integral Antes de construir una integral definida para la definición del área de una superficie de revolución, se requiere una fórmula para el área lateral (excluyendo las partes superior e inferior) de un *tronco* de un cono circular recto. Vea la FIGURA 3.6.2. Si r_1 y r_2 son los radios de las partes superior e inferior y L es la altura oblicua, entonces el área lateral está dada por

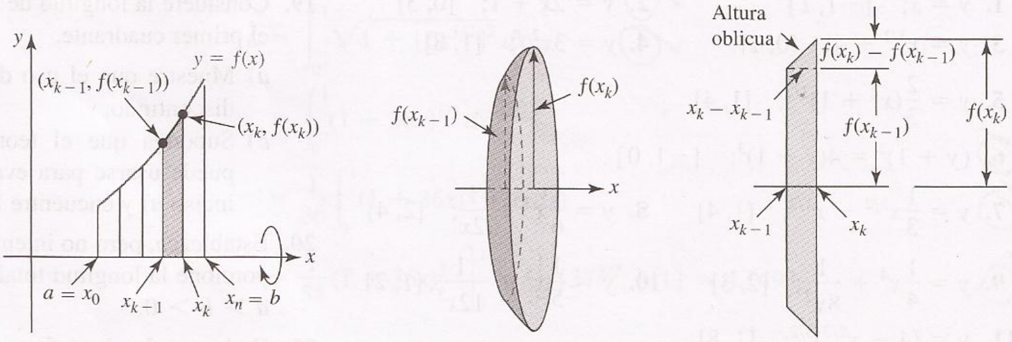
$$\pi(r_1 + r_2)L. \tag{1}$$

Vea el problema 17 en los ejercicios 3.6. Ahora suponga que $y = f(x)$ es una función suave y que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo $[a, b]$. Sea P una partición del intervalo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Luego, si unimos con una cuerda los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ mostrados en la FIGURA 3.6.3*a*), formamos un trapezoide. Cuando el trapezoide gira alrededor del eje x, genera un tronco de un cono con radios $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$. Vea la figura 3.6.3*b*). Como se muestra en la sección transversal en la figura 3.6.3*c*), la altura oblicua puede obtenerse a partir del teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$



a) Trapezoide *b*) Tronco *c*) Vista lateral del tronco

FIGURA 3.6.3 Aproximación del área de la superficie de revolución al sumar áreas de troncos

Así, por (1) el área superficial de este elemento es

$$\begin{aligned} S_k &= \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\,\Delta x_k, \end{aligned}$$

donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Esta última cantidad es una aproximación al área verdadera de la superficie de revolución sobre el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Luego, así como en el análisis de la longitud de arco, se invoca el teorema del valor medio para derivadas a fin de afirmar que en el intervalo abierto x_k^* hay un (x_{k-1}, x_k) tal que

$$f'(x_k^*) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \pi \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k$$

es una aproximación al área S sobre $[a, b]$. Esto sugiere que el área superficial S está dada por el límite de la suma de Riemann:

$$S = \lim_{\|P\|\to 0} \pi \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

Puesto que también se espera que $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$ tiendan al límite común $f(x)$ cuando $\|P\| \to 0$, tenemos $f(x_k) + f(x_{k-1}) \to 2f(x)$.

El análisis anterior sugiere usar (2) como la definición del área de la superficie de revolución sobre el intervalo.

Definición 3.6.1 Área de una superficie de revolución

Sean f una función para la cual f' es continua y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo $[a, b]$. El **área** S de la superficie que se obtiene al girar la gráfica de f sobre el intervalo alrededor del eje x está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \qquad (3)$$

EJEMPLO 1 Área de una superficie

Encuentre el área S de la superficie que se forma al girar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre el intervalo [1, 4] alrededor del eje x.

Solución Se tiene $f(x) = x^{1/2}, f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x})$, y por (3)

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx \\ &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx \\ &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\,dx \\ &= \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\pi \int_1^4 (4x+1)^{1/2}(4\,dx) = \frac{1}{6}\pi(4x+1)^{3/2}\Big]_1^4 \\ &= \frac{1}{6}\pi[17^{3/2} - 5^{3/2}] \approx 30.85. \end{aligned}$$

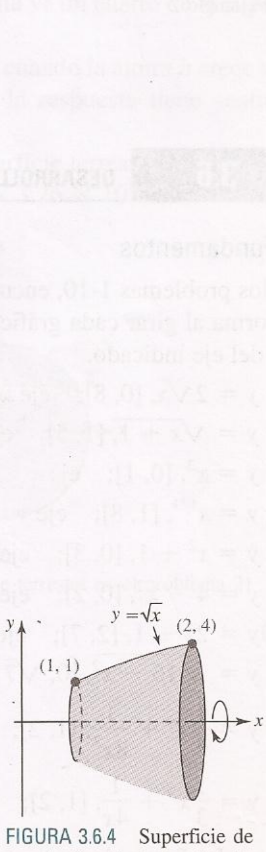


FIGURA 3.6.4 Superficie de revolución alrededor del eje x en el ejemplo 1

Vea la FIGURA 3.6.4.

Revolución alrededor del eje *y* Es posible mostrar que si la gráfica de una función continua $y = f(x)$ sobre $[a, b]$, $0 \leq a < b$, gira alrededor del eje y, entonces el área S de la superficie de revolución resultante está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{4}$$

Así como en (3), en (4) se supone que $f'(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 2 Área de una superficie

Encuentre el área S de la superficie que se forma cuando la gráfica de $y = x^{1/3}$ sobre el intervalo $[0, 8]$ gira alrededor del eje y.

Solución Se tiene $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, de modo que por (4) se concluye que

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^8 x\sqrt{1 + \frac{1}{9}x^{-4/3}}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^8 x\sqrt{\frac{9x^{4/3} + 1}{9x^{4/3}}}\, dx \\ &= \frac{2}{3}\pi \int_0^8 x^{1/3}\sqrt{9x^{4/3} + 1}\, dx. \end{aligned}$$

La última integral se evaluará al revisar el método de sustitución u. Si hacemos $u = 9x^{4/3} + 1$, entonces $du = 12x^{1/3}\, dx$, $dx = \frac{1}{12}x^{-1/3}\, du$, $x = 0$ implica $u = 1$, y $x = 8$ proporciona $u = 145$. En consecuencia,

$$S = \frac{1}{18}\pi \int_1^{145} u^{1/2}\, du = \frac{1}{27}\pi u^{3/2}\Big]_1^{145} = \frac{1}{27}\pi(145^{3/2} - 1^{3/2}) \approx 203.04.$$

Vea la FIGURA 3.6.5. ■

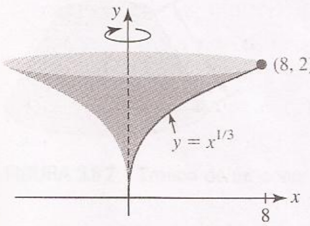


FIGURA 3.6.5 Superficie de revolución alrededor del eje y en el ejemplo 2

3.6 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-7.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre el área de la superficie que se forma al girar cada gráfica sobre el intervalo dado alrededor del eje indicado.

1. $y = 2\sqrt{x}$, $[0, 8]$; eje x
2. $y = \sqrt{x + 1}$, $[1, 5]$; eje x
3. $y = x^3$, $[0, 1]$; eje x
4. $y = x^{1/3}$, $[1, 8]$; eje y
5. $y = x^2 + 1$, $[0, 3]$; eje y
6. $y = 4 - x^2$, $[0, 2]$; eje y
7. $y = 2x + 1$, $[2, 7]$; eje x
8. $y = \sqrt{16 - x^2}$, $[0, \sqrt{7}]$; eje y
9. $y = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{8x^2}$, $[1, 2]$; eje y
10. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{4x}$, $[1, 2]$; eje x
11. *a*) La forma de una antena de disco es una parábola que gira alrededor de un eje de simetría, denominada **paraboloide de revolución**. Encuentre el área superficial de una antena de radio r y profundidad h que obtenemos al girar la gráfica de $f(x) = r\sqrt{1 - x/h}$ alrededor del eje x. Vea la FIGURA 3.6.6.

    b) La profundidad de una antena de disco varía de 10 a 20% de su radio. Si la profundidad h de la antena del inciso *a*) es 10% del radio, muestre que el área superficial de la antena es aproximadamente la misma que el área de un círculo de radio r. ¿Cuál es el error porcentual en este caso?

Las antenas de disco son paraboloides de revolución

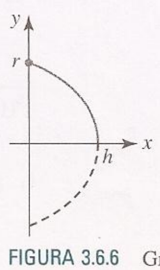


FIGURA 3.6.6 Gráfica de f en el problema 11

12. La superficie formada por dos planos paralelos que cortan una esfera de radio r se denomina **zona esférica**. Encuentre el área de la zona esférica que se muestra en la FIGURA 3.6.7.

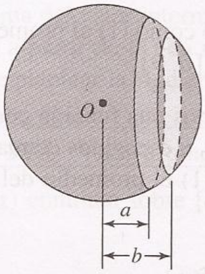


FIGURA 3.6.7 Zona esférica en el problema 12

13. La gráfica de $y = |x + 2|$ sobre $[-4, 2]$, mostrada en la FIGURA 3.6.8, gira alrededor del eje x. Encuentre el área S de la superficie de revolución.

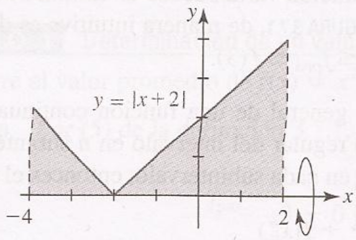


FIGURA 3.6.8 Gráfica de la función en el problema 13

14. Encuentre el área de superficie que se forma al girar $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $[-a, a]$, alrededor del eje x.

Piense en ello

15. Demuestre que el área superficial lateral de un cono circular recto de radio r y altura oblicua L es $\pi r L$. [*Sugerencia*: Cuando un cono se corta por el lado y se aplana forma un sector circular con área $\frac{1}{2}L^2\theta$.]

16. Use el problema 15 para mostrar que el área superficial lateral de un cono circular recto de radio r y altura h está dada por $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Obtenga el mismo resultado usando (3) o (4).

17. Use el problema 15 para obtener la fórmula (1). [*Sugerencia*: Considere un cono completo de radio r_2 y altura oblicua L_2. Corte la parte cónica superior. Puede ser de ayuda considerar triángulos semejantes.]

18. Muestre que el área superficial del tronco de un cono circular recto de radios r_1 y r_2 y altura h está dada por $\pi(r_1 + r_2)\sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2}$.

19. Sea $y = f(x)$ una función no negativa continua sobre $[a, b]$ cuya primera derivada es continua sobre el intervalo. Demuestre que si la gráfica de f gira alrededor de una recta horizontal $y = L$, entonces el área S de la superficie de revolución resultante está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x) - L|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

20. Use el resultado del problema 19 para encontrar una integral definida que proporcione el área de la superficie que se forma al girar $y = x^{2/3}$, $[1, 8]$, alrededor de la recta $y = 4$. No evalúe.

Proyectos

21. Una vista desde el espacio

a) Desde una nave espacial en órbita alrededor de la Tierra a una distancia h de la superficie terrestre, un astronauta puede observar sólo una porción A_s del área total del área superficial de la Tierra, A_e. Vea la FIGURA 3.6.9*a*). Encuentre una fórmula para la expresión fraccionaria A_s/A_e como una función de h. En la figura 3.6.9*b*) se muestra la Tierra en sección transversal como un círculo con centro C y radio R. Sean los ejes x y y como se muestra y sean y_B y $y_E = R$ las coordenadas y de los puntos B y E, respectivamente.

b) ¿Qué porcentaje de la superficie de la Tierra ve un astronauta desde una altura de 2 000 km? Considere que el radio terrestre es $R = 6\,380$ km.

c) ¿A qué altura h el astronauta ve un cuarto de la superficie de la Tierra?

d) ¿Cuál es el límite de A_s/A_e cuando la altura h crece sin cota $(h \to \infty)$? ¿Por qué la respuesta tiene sentido intuitivo?

e) ¿Qué porcentaje de la superficie terrestre ve un astronauta desde la Luna si $h = 3.76 \times 10^5$ km?

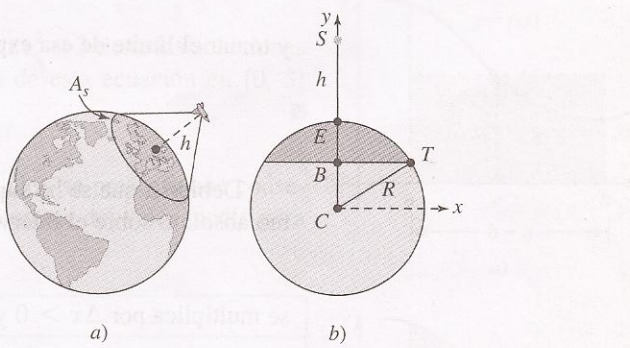


FIGURA 3.6.9 Porción de la superficie terrestre en el problema 21

3.7 Valor promedio de una función

Introducción Todos los estudiantes saben qué es un promedio. Si un estudiante presenta cuatro exámenes en un semestre y sus calificaciones porcentuales son 80, 75, 85 y 92%, entonces su promedio puntaje es

$$\frac{80 + 75 + 85 + 92}{4}$$

o bien. 83%. En general, dados n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se dice que su **media aritmética** o **promedio**, es

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{1}$$

En esta sección se extiende el concepto de un promedio discreto como (1) al promedio de *todos* los valores de una función continua definida sobre un intervalo $[a, b]$.

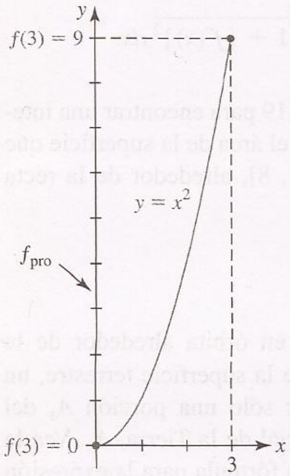


FIGURA 3.7.1 Determinación del promedio de todos los números indicados sobre el eje y

Promedio de valores funcionales Ahora suponga que tenemos una función continua f definida sobre un intervalo $[a, b]$. Para los números x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ escogidos de manera arbitraria de modo que $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, entonces por (1) el promedio del conjunto de valores funcionales es

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k). \tag{2}$$

Si ahora se considera el conjunto de valores funcionales $f(x)$ que corresponde a todos los números x en un intervalo, debe resultar evidente que *no* es posible usar una suma discreta como en (1), puesto que este conjunto de valores funcionales suele ser un conjunto no numerable. Por ejemplo, para $f(x) = x^2$ sobre $[0, 3]$, los valores de la función varían desde un mínimo de $f(0) = 0$ hasta un máximo de $f(3) = 9$. Como se indica en la FIGURA 3.7.1, de manera intuitiva es de esperar que exista un valor entero promedio f_{pro} tal que $f(0) \le f_{\text{pro}} \le f(3)$.

Construcción de una integral Volviendo al caso general de una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, sea P una partición regular del intervalo en n subintervalos de ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Si x_k^* es un número escogido en cada subintervalo, entonces el promedio

$$\frac{f(x_k^*) + f(x_k^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

puede escribirse como

$$\frac{f(x_k^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b - a}{\Delta x}} \tag{3}$$

puesto que $n = (b - a)/\Delta x$. Al volver a escribir (3) como

$$\frac{1}{b - a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x$$

y tomar el límite de esa expresión como $\|P\| = \Delta x \to 0$, obtenemos la integral definida

$$\frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Debido a que se ha supuesto que f es continua sobre $[a, b]$, su mínimo absoluto y su máximo absoluto sobre el intervalo se denotarán por m y M, respectivamente. Si la desigualdad

$$m \le f(x_k^*) \le M$$

se multiplica por $\Delta x > 0$ y se suma, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} m\,\Delta x \le \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x \le \sum_{k=1}^{n} M\,\Delta x.$$

Debido a que $\sum_{k=1}^{n} \Delta x = b - a$, la desigualdad precedente equivale a

$$(b - a)m \le \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x \le (b - a)M.$$

Y así cuando $\Delta x \to 0$, se concluye que

$$(b - a)m \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b - a)M.$$

A partir de la última desigualdad concluimos que el número obtenido a partir de (4) satisface

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \leq M.$$

Por el teorema del valor intermedio, f asume todos los valores entre m y M. Por tanto, el número obtenido a partir de (4) en realidad corresponde a un valor de la función sobre el intervalo. Esto sugiere plantear la siguiente definición.

Definición 3.7.1 Valor promedio de una función

Sea $y = f(x)$ continua sobre $[a, b]$. El **valor promedio** de f sobre el intervalo es el número

$$f_{\text{pro}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

Aunque principalmente se tiene interés en funciones continuas, la definición 3.7.1 es válida para cualquier función integrable sobre el intervalo.

EJEMPLO 1 Determinación de un valor promedio

Encuentre el valor promedio de $f(x) = x^2$ sobre $[0, 3]$.

Solución Por (5) de la definición 3.7.1, obtenemos

$$f_{\text{pro}} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg]_0^3 = 3. \qquad \blacksquare$$

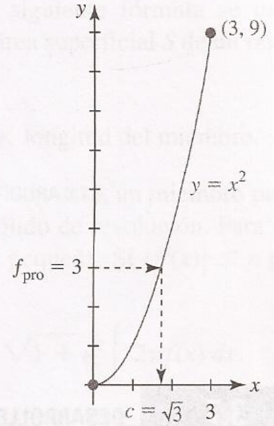


FIGURA 3.7.2 f_{pro} es el valor funcional $f(\sqrt{3})$ en el ejemplo 1

Algunas veces es posible determinar el valor de x en el intervalo que corresponde al valor promedio de una función.

EJEMPLO 2 Determinación de x correspondiente a f_{pro}

Encuentre el valor de x en el intervalo $[0, 3]$ que corresponde al valor promedio f_{pro} de la función $f(x) = x^2$.

Solución Puesto que la función $f(x) = x^2$ es continua sobre el intervalo cerrado $[0, 3]$, por el teorema del valor intermedio sabemos que entre 0 y 3 existe un número c tal que

$$f(c) = c^2 = f_{\text{pro}}.$$

Pero, por el ejemplo 1, sabemos que $f_{\text{pro}} = 3$. Por tanto, la ecuación $c^2 = 3$ tiene las soluciones $c = \pm\sqrt{3}$. Como se muestra en la FIGURA 3.7.2, la única solución de esta ecuación en $[0, 3]$ es $c = \sqrt{3}$. $\blacksquare$

Teorema del valor medio para integrales definidas A continuación se presenta una consecuencia inmediata del análisis anterior. El resultado se denomina teorema del valor medio para integrales.

Teorema 3.7.1 Teorema del valor medio para integrales

Sea $y = f(x)$ continua sobre $[a, b]$. Entonces en el intervalo abierto (a, b) existe un número c tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

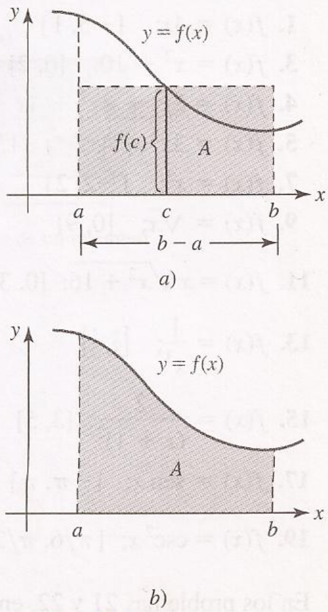


FIGURA 3.7.3 El área A del rectángulo es la misma que el área bajo la gráfica sobre $[a, b]$

En el caso en que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, el teorema 3.7.1 se interpreta fácilmente en términos de área. El resultado en (6) simplemente establece que en (a, b) existe un número c para el cual el área A de un *rectángulo* de altura $f(c)$ y ancho $b - a$ mostrado en la FIGURA 3.7.3*a*) es la misma que el *área A bajo la gráfica* indicada en la figura 3.7.3*b*).

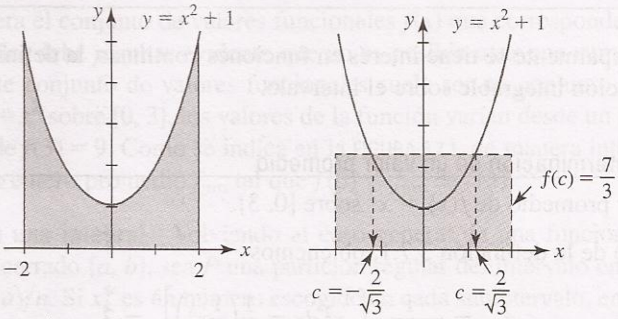
EJEMPLO 3 Determinación de x correspondiente a f_{pro}

Encuentre la altura $f(c)$ de un rectángulo de modo que el área A bajo la gráfica de $y = x^2 + 1$ sobre $[-2, 2]$ sea la misma que $f(c)[2 - (-2)] = 4f(c)$.

Solución Básicamente, éste es el mismo tipo de problema ilustrado en el ejemplo 2. Así, el área bajo la gráfica mostrada en la FIGURA 3.7.4*a*) es

$$A = \int_{-2}^{2} (x^2 + 1)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Bigg]_{-2}^{2} = \frac{28}{3}.$$

También, $4f(c) = 4(c^2 + 1)$, de modo que $4(c^2 + 1) = \frac{28}{3}$ implica $c^2 = \frac{4}{3}$. Las dos soluciones $c_1 = 2/\sqrt{3}$ y $c_2 = -2/\sqrt{3}$ están en el intervalo $(-2, 2)$. Para cualquier número, observamos que la altura del rectángulo es $f(c_1) = f(c_2) = (\pm 2/\sqrt{3})^2 + 1 = \frac{7}{3}$. El área del rectángulo mostrado en la figura 3.7.4*b*) es $f(c)[2 - (-2)] = \frac{7}{3} \cdot 4 = \frac{28}{3}$.



a) Área bajo la gráfica *b*) Área del rectángulo

FIGURA 3.7.4 El área en *a*) es la misma que el área en *b*) en el ejemplo 3 ■

3.7 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-20, encuentre el valor promedio f_{pro} de la función dada sobre el intervalo indicado.

1. $f(x) = 4x; \quad [-3, 1]$
2. $f(x) = 2x^3 + 3; \quad [-2, 5]$
3. $f(x) = x^2 + 10; \quad [0, 2]$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1; \quad [-1, 1]$
5. $f(x) = 3x^2 - 4x; \quad [-1, 3]$
6. $f(x) = (x + 1)^2; \ [0, 2]$
7. $f(x) = x^3; \quad [-2, 2]$
8. $f(x) = x(3x - 1)^2; \ [0, 1]$
9. $f(x) = \sqrt{x}; \quad [0, 9]$
10. $f(x) = \sqrt{5x + 1}; \ [0, 3]$
11. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 16}; \ [0, 3]$
12. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{1/3} \dfrac{1}{x^2}; \quad [\frac{1}{2}, 1]$
13. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}; \quad [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$
14. $f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}; \ [1, 4]$
15. $f(x) = \dfrac{2}{(x + 1)^2}; \ [3, 5]$
16. $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x} - 1)^3}{\sqrt{x}}; \ [4, 9]$
17. $f(x) = \operatorname{sen} x; \quad [-\pi, \pi]$
18. $f(x) = \cos 2x; \ [0, \pi/4]$
19. $f(x) = \csc^2 x; \quad [\pi/6, \pi/2]$
20. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{\cos^2 \pi x}; \ [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

En los problemas 21 y 22, encuentre un valor c en el intervalo dado para el cual $f(c) = f_{\text{pro}}$.

21. $f(x) = x^2 + 2x; \quad [-1, 1]$
22. $f(x) = \sqrt{x + 3}; \quad [1, 6]$

23. El valor promedio de una función no negativa continua $y = f(x)$ sobre el intervalo $[1, 5]$ es $f_{\text{pro}} = 3$. ¿Cuál es el área bajo la gráfica sobre el intervalo?

24. Para $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, encuentre un valor de b tal que $f_{\text{pro}} = 0$ sobre $[0, b]$. Interprete geométricamente.

≡ Aplicaciones

25. La función $T(t) = 100 + 3t - \frac{1}{2}t^2$ aproxima la temperatura a las t horas después de mediodía en un día típico de agosto en Las Vegas. Encuentre la temperatura media entre el mediodía y las 6 p.m.

26. Una empresa determina que las ganancias obtenidas después de la venta de x unidades de un producto están dadas por $R(x) = 50 + 4x + 3x^2$. Encuentre el promedio de las ganancias para ventas de $x = 1$ a $x = 5$. Compare el resultado con el promedio $\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} R(k)$.

27. Sea $s(t)$ la posición de una partícula sobre un eje horizontal como una función del tiempo t. La velocidad media $\bar{v}$ durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es $\bar{v} = [s(t_2) - s(t_1)]/(t_2 - t_1)$. Use (5) para demostrar que $v_{\text{pro}} = \bar{v}$. [*Sugerencia*: Recuerde que $ds/dt = v$.]

28. Cuando no hay amortiguamiento, la posición de una masa m sobre un resorte que vibra libremente está dada por la función $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, donde A, ω y ϕ son

constantes. El periodo de oscilación es $2\pi/\omega$. La energía potencial del sistema es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, donde k es la constante del resorte. La energía cinética del sistema es $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde $v = dx/dt$. Si $\omega^2 = k/m$, muestre que la energía potencial media y la energía cinética media sobre un periodo son las mismas y que cada una es igual a $\frac{1}{4}kA^2$.

29. En física, el **teorema impulso-cantidad de movimiento** establece que el cambio del impulso de un cuerpo sobre un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es $mv_1 - mv_0 = (t_1 - t_0)\overline{F}$, donde mv_0 es la cantidad de impulso inicial, mv_1 es la cantidad de impulso final y $\overline{F}$ es la fuerza media que actúa sobre el cuerpo durante el intervalo. Encuentre el cambio en el impulso de un martinete que se deja caer sobre un apilamiento entre los instantes $t = 0$ y $t = t_1$ si

$$F(t) = k\left[1 - \left(\frac{2t}{t_1} - 1\right)^2\right],$$

donde k es una constante.

30. En una arteria pequeña, la velocidad del torrente sanguíneo (en cm/s) está dada por $v(r) = (P/4\nu l)(R^2 - r^2)$, $0 \le r \le R$, donde P es la presión sanguínea, ν es la viscosidad de la sangre, l es la longitud de la arteria y R es el radio de la arteria. Encuentre el promedio de $v(r)$ sobre el intervalo $[0, R]$.

≡ Piense en ello

31. Si $y = f(x)$ es una función impar continua, entonces, ¿cuál es f_{pro} sobre cualquier intervalo $[-a, a]$?

32. Para una función lineal $f(x) = ax + b$, $a > 0$, $b > 0$, el valor promedio de la función sobre $[x_1, x_2]$ es $f_{\text{pro}} = aX + b$, donde X es algún número en el intervalo. Conjeture el valor de X. Demuestre su afirmación.

33. Si $y = f(x)$ es una función diferenciable, encuentre el valor promedio de f' sobre el intervalo $[x, x + h]$, donde $h > 0$.

34. Dado que n es un entero positivo y $a > 1$, muestre que el valor promedio de $f(x) = (n + 1)x^n$ sobre el intervalo $[1, a]$ es $f_{\text{pro}} = a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1$.

35. Suponga que $y = f(x)$ es una función continua y que f_{pro} es su valor promedio sobre $[a, b]$. Explique: $\int_a^b [f(x) - f_{\text{pro}}]\, dx = 0$.

36. Sea $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función entero mayor o función piso. Sin integración, ¿cuál es el promedio de f sobre $[0, 1]$? ¿Y sobre $[0, 2]$? ¿Y sobre $[0, 3]$? ¿Y sobre $[0, 4]$? Conjeture el valor promedio de f sobre el intervalo $[0, n]$, donde n es un entero positivo. Demuestre su afirmación.

37. Como se muestra en la FIGURA 3.7.5, una cuerda se traza aleatoriamente entre dos puntos del círculo de radio $r = 1$. Analice: ¿cuál es la longitud media de las cuerdas?

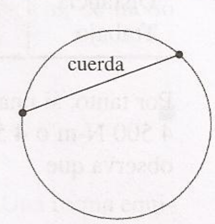


FIGURA 3.7.5 Círculo en el problema 37

≡ Proyectos

38. Miembros humanos La siguiente fórmula se usa a menudo para aproximar el área superficial S de un miembro humano:

$$S \approx \text{circunferencia media} \times \text{longitud del miembro}.$$

a) Como se muestra en la FIGURA 3.7.6, un miembro puede considerarse como un sólido de revolución. Para muchos miembros, $f'(x)$ es pequeña. Si $|f'(x)| \le \varepsilon$ para $a \le x \le b$, muestre que

$$\int_a^b 2\pi f(x)\, dx \le S \le \sqrt{1 + \varepsilon^2}\int_a^b 2\pi f(x)\, dx.$$

b) Muestre que $C L \le S \le \sqrt{1 + \varepsilon^2}\, \overline{C} L$, donde $\overline{C}$ es la circunferencia media del miembro sobre el intervalo $[a, b]$. Así, la fórmula de aproximación planteada antes siempre subestima a S pero funciona bien cuando ε es pequeño (como para el antebrazo a la muñeca).

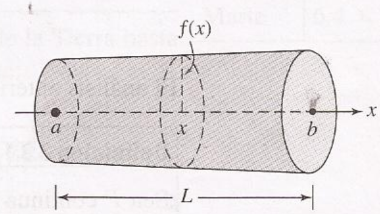


FIGURA 3.7.6 Modelo de un miembro en el problema 38

3.8 Trabajo

Introducción En física, cuando una fuerza *constante* F mueve un objeto a una distancia d en la misma dirección de la fuerza, el **trabajo** realizado se define como el producto

$$W = Fd. \tag{1}$$

Por ejemplo, si una fuerza de 10 lb mueve un objeto 7 pies en la misma dirección de la fuerza, entonces el trabajo realizado es 70 pies-lb. En esta sección veremos cómo encontrar el trabajo realizado por una fuerza *variable*.

Antes de examinar el trabajo como integral definida, revisaremos algunas unidades importantes.

Unidades En la tabla siguiente se enumeran **unidades** de uso común de fuerza, distancia y trabajo.

Cantidad	Sistema ingenieril	SI	cgs
Fuerza	libra (lb)	newton (N)	dina
Distancia	pie (pie)	metro (m)	centímetro (cm)
Trabajo	pie-libra (pie-lb)	newton-metro (joule)	dina-centímetro (ergio)

Por tanto, si una fuerza de 300 N mueve 15 m un objeto, el trabajo realizado es $W = 300 \cdot 15 =$ 4 500 N-m o 4 500 joules. Para efectos de comparación y conversión de una unidad a otra, se observa que

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas} = 0.2247 \text{ lb}$$

$$1 \text{ pie-lb} = 1.356 \text{ joules} = 1.356 \times 10^7 \text{ ergios.}$$

De modo que, por ejemplo, 70 pies-lb equivalen a $70 \times 1.356 = 94.92$ joules, y 4 500 joules equivalen a $4\,500/1.356 = 3\,318.584$ pies-lb.

Construcción de una integral Ahora, si $F(x)$ representa una fuerza variable continua que actúa sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el trabajo no es simplemente un producto como en (1). Suponga que P es la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

y Δx_k es el ancho del k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Sea x_k^* el punto muestra escogido de manera arbitraria en cada subintervalo. Si el ancho de cada $[x_{k-1}, x_k]$ es muy pequeño, entonces, puesto que F es continua, los valores funcionales $F(x)$ no pueden variar mucho en el subintervalo. Por tanto, puede considerarse en forma razonable que la fuerza actúa sobre $[x_{k-1}, x_k]$ como la constante $F(x_k^*)$ y que el trabajo realizado desde x_{k-1} hasta x_k está dado por la aproximación

$$W_k = F(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Entonces, una aproximación al trabajo total realizado desde a hasta b está dada por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} W_k = F(x_1^*)\,\Delta x_1 + F(x_2^*)\,\Delta x_2 + \cdots + F(x_n^*)\,\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Resulta natural suponer que el trabajo realizado por F sobre el intervalo es

$$W = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

El análisis anterior se resume en la siguiente definición.

Definición 3.8.1 Trabajo

Sea F continua sobre el intervalo $[a, b]$ y sea $F(x)$ la fuerza en un número x en el intervalo. Entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza para mover un objeto de a a b es

$$W = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{2}$$

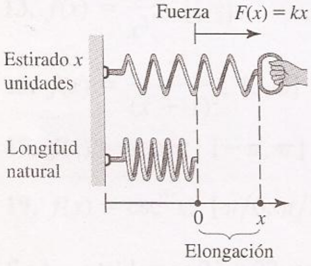


FIGURA 3.8.1 Para estirar un resorte x unidades se requiere una fuerza $F(x) = kx$

Nota: Si F es constante, $F(x) = k$ para toda x en el intervalo, entonces (2) se vuelve $W = \int_a^b k\,dx = kx]_a^b = k(b - a)$, lo cual es consistente con (1).

Problemas de resortes La ley de Hooke establece que cuando un resorte se estira (o comprime) más allá de su longitud natural, la fuerza de reconstitución ejercida por el resorte es directamente proporcional a la cantidad de elongación (o compresión) x. Así, para estirar un resorte x unidades más allá de su longitud natural es necesario aplicar la fuerza

$$F(x) = kx, \tag{3}$$

donde k es una constante de proporcionalidad denominada **constante del resorte**. Vea la FIGURA 3.8.1.

EJEMPLO 1 Alargamiento de un resorte

Para estirar un resorte de 50 cm se requiere una fuerza de 130 N. Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte 20 cm más allá de su longitud natural (sin estirar).

Solución Cuando una fuerza se mide en newtons, las distancias suelen expresarse en metros. Puesto que $x = 50 \text{ cm} = \frac{1}{2}$ m cuando $F = 130$ N, (3) se vuelve $130 = k\left(\frac{1}{2}\right)$, lo que implica que la constante del resorte es $k = 260$ N/m. Por tanto, $F = 260x$. Luego, $20 \text{ cm} = \frac{1}{5}$ m, de modo que el trabajo realizado para estirar el resorte por esta cantidad es

$$W = \int_0^{1/5} 260x\,dx = 130x^2\Big]_0^{1/5} = \frac{26}{5} = 5.2 \text{ joules.}$$

Nota: Suponga que la longitud natural del resorte en el ejemplo 1 es de 40 cm. Una forma equivalente de plantear el problema es: encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte hasta una longitud de 60 cm. Puesto que la elongación es $60 - 40 = 20 \text{ cm} = \frac{1}{5}$ m, se integra $F = 260x$ sobre el intervalo $\left[0, \frac{1}{5}\right]$. No obstante, si el problema fuese encontrar el trabajo realizado para estirar el mismo resorte de 50 cm a 60 cm, entonces se integraría sobre el intervalo $\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right]$. En este caso se inicia desde una posición en que el resorte ya está estirado 10 cm $\left(\frac{1}{10}\text{ m}\right)$.

Trabajo realizado contra la gravedad A partir de la ley de gravitación universal, la fuerza entre un planeta (o satélite) de masa m_1 y un cuerpo de masa m_2 está dada por

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{4}$$

donde k es una constante denominada **constante gravitacional**, y r es la distancia desde el centro del planeta de masa m_2. Vea la FIGURA 3.8.2. Para elevar la masa m_2 desde la superficie de un planeta de radio R hasta una altura h, el trabajo puede realizarse al usar (4) en (2):

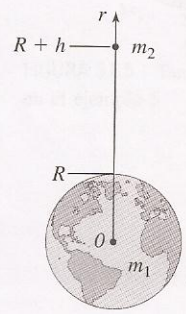


FIGURA 3.8.2 Levantamiento de una masa m_2 hasta una altura h

$$W = \int_R^{R+h} \frac{km_1m_2}{r^2}\,dr = km_1m_2\left(-\frac{1}{r}\right)\Big]_R^{R+h} = km_1m_2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right). \tag{5}$$

En unidades SI, $k = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. En la tabla de la derecha se proporcionan algunas masas y valores de R.

Planetas	m_1 (en kg)	R (en m)
Venus	4.9×10^{24}	6.2×10^6
Tierra	6.0×10^{24}	6.4×10^6
Luna (satélite)	7.3×10^{22}	1.7×10^6
Marte	6.4×10^{23}	3.3×10^6

EJEMPLO 2 Trabajo realizado para subir una carga útil

El trabajo realizado para subir una carga útil de 5 000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura de 30 000 m (0.03×10^6 m) se concluye por (5) y la tabla precedente:

$$\begin{aligned} W &= (6.67 \times 10^{-11})(6.0 \times 10^{24})(5\,000)\left(\frac{1}{6.4 \times 10^6} - \frac{1}{6.43 \times 10^6}\right) \\ &\approx 1.46 \times 10^9 \text{ joules.} \end{aligned}$$

Problemas de bombeo Cuando un líquido que pesa ρ lb/pie^3 se bombea desde un tanque, el trabajo realizado para mover un volumen fijo o una capa de líquido d pies en una dirección vertical es

$$W = \text{fuerza} \cdot \text{distancia} = (\text{peso por unidad de volumen}) \cdot (\text{volumen}) \cdot (\text{distancia})$$

o bien,

$$W = \underbrace{\rho \cdot (\text{volumen})}_{\text{fuerza}} \cdot d. \tag{6}$$

En física, la cantidad ρ se denomina **peso específico** del fluido. Para agua, $\rho = 62.4$ lb/pie^3, o 9 800 N/m^3.

En los varios ejemplos siguientes se usará (6) para construir la integral idónea a fin de encontrar el trabajo realizado al bombear agua desde un tanque.

EJEMPLO 3 Trabajo realizado para bombear agua

Un tanque hemisférico de radio de 20 pies está lleno de agua hasta una profundidad de 15 pies. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta la parte superior del tanque.

Solución Como se muestra en la FIGURA 3.8.3, hacemos que el eje x positivo esté dirigido *hacia abajo* y el origen se fija en el punto medio de la parte superior del tanque. Puesto que la sección transversal del tanque es un semicírculo, x y y están relacionadas por $x^2 + y^2 = (20)^2$, $0 \le x \le 20$. Ahora suponga que el intervalo $[5, 20]$, que corresponde al agua sobre el eje x, se parte en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de ancho Δx_k. Sea x_k^* cualquier punto muestra en el k-ésimo subintervalo y sea W_k una aproximación al trabajo realizado por la bomba al hacer subir una capa circular de agua de grosor Δx_k hasta la parte superior del tanque. Por (6) se concluye que

$$W_k = \underbrace{[62.4\pi(y_k^*)^2 \Delta x_k]}_{\text{fuerza}}\ \underbrace{x_k^*}_{\text{distancia}},$$

donde $(y_k^*)^2 = 400 - (x_k^*)^2$. Por tanto, el trabajo realizado por la bomba es aproximado por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} W_k = \sum_{k=1}^{n} 62.4\pi[400 - (x_k^*)^2]x_k^* \Delta x_k.$$

El trabajo realizado para bombear toda el agua hasta la parte superior del tanque es el límite de esta última expresión cuando $\|P\| \to 0$; es decir,

$$W = \int_5^{20} 62.4\pi(400 - x^2)x\,dx = 62.4\pi\left(200x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big]_5^{20} \approx 6\,891\,869 \text{ pies-lb}.$$

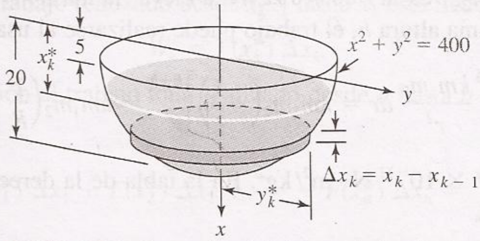


FIGURA 3.8.3 Tanque hemisférico en el ejemplo 3 ■

$\pi r^2 h$ dx

Merece la pena continuar el análisis del ejemplo 3 para el caso en que el eje x positivo se tome en la dirección *hacia arriba* y el origen esté en el punto medio de la parte inferior del tanque.

EJEMPLO 4 Solución alterna del ejemplo 3

Con los ejes como se muestra en la FIGURA 3.8.4, vemos que una capa circular de agua debe subirse una distancia de $20 - x_k^*$ pies. Puesto que el centro del semicírculo está en $(20, 0)$, ahora x y y están relacionadas por $(x - 20)^2 + y^2 = 400$. Entonces,

$$W_k = \underbrace{(62.4\pi(y_k^*)^2\,\Delta x_k)}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{(20 - x_k^*)}_{\text{distancia}}$$

$$= 62.4\pi[400 - (x - 20)^2](20 - x_k^*)\,\Delta x_k$$

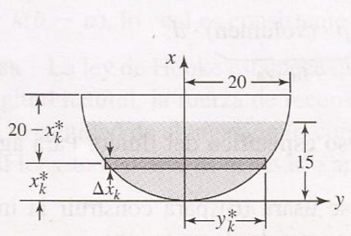


FIGURA 3.8.4 Tanque hemisférico en el ejemplo 4

y así

$$W = 62.4\pi \int_0^{15} [400 - (x - 20)^2](20 - x)\,dx$$

$$= 62.4\pi \int_0^{15} (x^3 - 60x^2 + 800x)\,dx.$$

Observe los nuevos límites de integración; esto se debe a que el agua mostrada en la figura 3.8.4 corresponde al intervalo [0, 15] sobre el eje vertical. Usted debe comprobar que el valor de W en este caso es el mismo que en el ejemplo 3. ■

EJEMPLO 5 Otro repaso al ejemplo 3

En el ejemplo 3, encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta un punto 10 pies por arriba del tanque hemisférico.

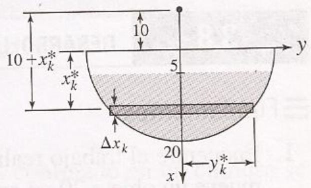


FIGURA 3.8.5 Tanque hemisférico en el ejemplo 5

Solución Como en la figura 3.8.3, el eje x positivo se ubica hacia abajo. Luego, por la FIGURA 3.8.5 vemos

$$W_k = (62.4\pi(y_k^*)^2\,\Delta x_k)\cdot(10 + x_k^*)$$
$$= 62.4\pi[400 - (x_k^*)^2](10 + x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Por tanto,

$$W = 62.4\pi \int_5^{20} (400 - x^2)(10 + x)\,dx$$

$$= 62.4\pi \int_5^{20} (-x^3 - 10x^2 + 400x + 4\,000)\,dx$$

$$= 62.4\pi\left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + 200x^2 + 4\,000x\right)\Big]_5^{20}$$

$$= 13\,508\,063 \text{ pies-lb.}$$ ■

Problemas con cables El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que cuando se calcula el trabajo realizado para subir un objeto por medio de un cable (cuerda pesada o cadena), el peso del cable debe tomarse en cuenta.

EJEMPLO 6 Subida de un elevador

Un cable que pesa 6 lb/pie está conectado a un elevador de construcción que pesa 1 500 lb. Encuentre el trabajo realizado para subir el elevador hasta una altura de 500 pies.

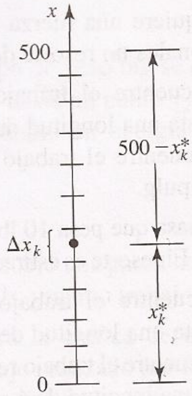


FIGURA 3.8.6 Cable en el ejemplo 6

Solución Puesto que el peso del elevador es una fuerza constante, por (1) se concluye que el trabajo realizado para subir el elevador hasta una altura de 500 pies es simplemente

$$W_E = (1\,500)\cdot(500) = 750\,000 \text{ pies-lb.}$$

El peso del cable es la fuerza variable. Sea W_C el trabajo realizado para subir el cable. Como se muestra en la FIGURA 3.8.6, suponga que el eje x positivo está dirigido hacia arriba y que el intervalo [0, 500] se parte en n subintervalos con longitudes Δx_k. A una altura de x_k^* pies del suelo, un segmento de cable correspondiente al subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ pesa $6\Delta x_k$ y es necesario jalarlo $500 - x_k^*$ pies adicionales. Por tanto, es posible escribir

$$(W_C)_k = \underbrace{(6\,\Delta x_k)}_{\text{fuerza}}\cdot\underbrace{(500 - x_k^*)}_{\text{distancia}} = (3\,000 - 6x_k^*)\,\Delta x_k$$

y así

$$W_C = \int_0^{500} (3\,000 - 6x)\,dx = (3\,000x - 3x^2)\Big]_0^{500} = 750\,000 \text{ pies-lb.}$$

Por tanto, el trabajo total realizado para subir el elevador es

$$W = W_E + W_C = 1\,500\,000 \text{ pies-lb.}$$ ■

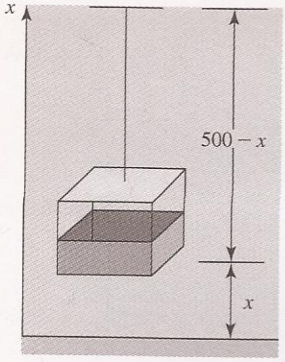


FIGURA 3.8.7 Elevador en los ejemplos 6 y 7

EJEMPLO 7 Solución alterna del ejemplo 6

Éste es un análisis ligeramente más rápido del ejemplo 6. Como se muestra en la FIGURA 3.8.7, cuando el elevador está a una altura de x pies, es necesario jalarlo $500 - x$ pies adicionales. La fuerza necesaria para subirlo a esa altura es

$$\underbrace{1\,500}_{\substack{\text{peso del}\\ \text{elevador}}} + \underbrace{6(500 - x)}_{\substack{\text{peso}\\ \text{del cable}}} = 4\,500 - 6x.$$

Así, por (2) el trabajo realizado es

$$W = \int_0^{500} (4\,500 - 6x)\,dx = 1\,500\,000 \text{ pies-lb.}$$

3.8 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

≡ Fundamentos

1. Encuentre el trabajo realizado cuando una fuerza de 55 lb mueve un objeto 20 yd en la misma dirección de la fuerza.
2. Una fuerza de 100 N se aplica a un objeto a 30° medidos con respecto a la horizontal. Si el objeto se mueve 8 cm horizontalmente, encuentre el trabajo realizado por la fuerza.
3. Una masa que pesa 10 lb estira $\frac{1}{2}$ pie un resorte. ¿Cuánto estira una masa que pesa 8 lb el mismo resorte?
4. La longitud natural de un resorte es 0.5 m. Una fuerza de 50 N estira el resorte una longitud de 0.6 m.
   a) ¿Qué fuerza se requiere para estirar el resorte x m?
   b) ¿Qué fuerza se requiere para estirar el resorte una longitud de 1 m?
   c) ¿Cuánto mide de largo el resorte cuando lo estira una fuerza de 200 N?
5. En el problema 4:
   a) Encuentre el trabajo realizado al estirar 0.2 m el resorte.
   b) Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte desde una longitud de 1 m hasta una longitud de 1.1 m.
6. Se requiere una fuerza de $F = \frac{3}{2}x$ lb para estirar x pulg adicionales un resorte de 10 pulg.
   a) Encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte hasta una longitud de 16 pulg.
   b) Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte 16 pulg.
7. Una masa que pesa 10 lb está suspendida de un resorte de 2 pies. El resorte es estirado 8 pulg y luego se retira la masa.
   a) Encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte hasta una longitud de 3 pies.
   b) Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte desde una longitud de 4 pies hasta una longitud de 5 pies.
8. Una fuerza de 50 lb comprime por 3 pulg un resorte de 15 pulg de largo. Encuentre el trabajo realizado al comprimir el resorte hasta una longitud final de 5 pulg.
9. Encuentre el trabajo realizado para subir una masa de 10 000 kg desde la superficie terrestre hasta una altura de 500 km.
10. Encuentre el trabajo realizado para subir una masa de 50 000 kg en la superficie de la Luna hasta una altura de 200 km.
11. Un tanque en forma de cilindro circular recto se llena con agua. Las dimensiones del tanque (en pies) se muestran en la FIGURA 3.8.8. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua a la parte superior del tanque.

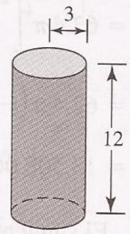


FIGURA 3.8.8 Tanque cilíndrico en el problema 11

12. En un tanque en forma de cono circular recto, con el vértice hacia abajo, se vierte agua hasta una profundidad igual a la mitad de su altura. Las dimensiones del tanque (en pies) se muestran en la FIGURA 3.8.9. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua a la parte superior del tanque. [*Sugerencia*: Suponga que el origen es el vértice del cono.]

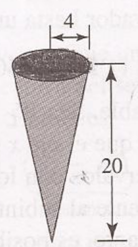


FIGURA 3.8.9 Tanque cónico en el problema 12

13. Para el tanque cónico en el problema 12, encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta un punto situado a 5 pies por arriba del tanque.
14. Suponga que el tanque cilíndrico en el problema 11 es horizontal. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta un punto situado a 2 pies por arriba del tanque. [*Sugerencia*: Vea los problemas 55-58 en los ejercicios 3.2.]

15. Un tanque tiene secciones transversales en forma de triángulos isósceles con el vértice hacia abajo. Las dimensiones del tanque (en pies) se muestran en la FIGURA 3.8.10. Encuentre el trabajo realizado para llenar el tanque al introducirle agua a través de un orificio en el fondo por medio de una bomba situada a 5 pies por abajo del vértice.

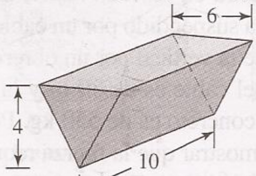


FIGURA 3.8.10 Tanque con secciones transversales triangulares en el problema 15

16. Una tina horizontal con sección transversal semicircular contiene aceite cuya densidad es 80 lb/pie^3. Las dimensiones del tanque (en pies) se muestran en la FIGURA 3.8.11. Si la profundidad del aceite es de 3 pies, encuentre el trabajo realizado para bombear todo el aceite hasta la parte superior del tanque.

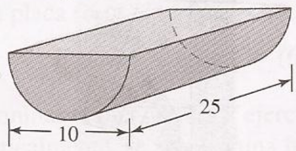


FIGURA 3.8.11 Tina semicircular en el problema 16

17. La cadena de 100 pies de un ancla, que pesa 20 lb/pie, cuelga verticalmente del lado de un barco. ¿Cuánto trabajo se realiza al jalar 40 pies de la cadena?

18. Un barco está anclado en 200 pies de agua. En el agua, el ancla del barco pesa 3 000 lb y la cadena del ancla pesa 40 lb/pie. Si la cadena cuelga verticalmente, ¿cuánto trabajo se realiza al jalar 100 pies de la cadena?

19. Un cubo de arena que pesa 80 lb se levanta verticalmente por medio de una cuerda y una polea hasta una altura de 65 pies. Encuentre el trabajo realizado si

a) el peso de la cuerda es despreciable y

b) la cuerda pesa $\frac{1}{2}$ lb/pie.

20. Un cubo, que originalmente contiene 20 pies^3 de agua, se levanta verticalmente a partir del nivel del suelo. Si en el cubo hay una fuga de agua a razón de $\frac{1}{2}$ pie^3 por pie vertical, encuentre el trabajo realizado para subir el cubo hasta una altura en que esté vacío.

21. La fuerza de atracción entre un electrón y el núcleo de un átomo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Si la distancia inicial entre un núcleo y un protón es 1 unidad, encuentre el trabajo realizado por una fuerza externa que mueve el electrón una distancia igual a cuatro veces la distancia de separación original.

22. En su lanzamiento, un cohete que pesa 2 500 000 lb lleva un transbordador espacial de 200 000 lb. Suponga que en las etapas iniciales del lanzamiento el cohete consume combustible a razón de 100 lb/pie.

a) Exprese el peso total del sistema en términos de su altitud por arriba de la superficie terrestre. Vea la FIGURA 3.8.12.

b) Encuentre el trabajo realizado para que el sistema llegue a una altitud de 1 000 pies.

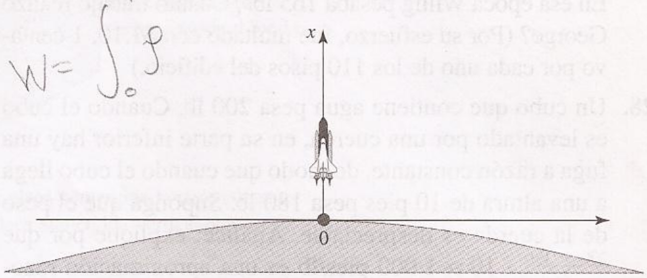


FIGURA 3.8.12 Cohete en el problema 22

23. En termodinámica, si un gas confinado en un cilindro se expande contra un pistón de modo que el volumen del gas cambia de v_1 a v_2, entonces el trabajo realizado sobre el pistón está dado por $W = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv$, donde p es la presión (fuerza por unidad de área). Vea la FIGURA 3.8.13. En una expansión adiabática de un gas ideal, la presión y el volumen están relacionados por $pv^\gamma = k$, donde γ y k son constantes. Muestre que si $\gamma \neq 1$, entonces

$$W = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1 - \gamma}.$$

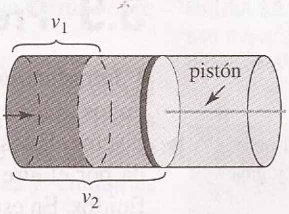


FIGURA 3.8.13 Pistón en el problema 23

24. Muestre que cuando un cuerpo de peso mg se eleva verticalmente desde un punto y_1 hasta un punto y_2, $y_2 > y_1$, el trabajo realizado es el cambio en energía potencial $W = mgy_2 - mgy_1$.

≡ Piense en ello

25. Cuando una persona empuja sobre una pared inmóvil con una fuerza horizontal de 75 lb, ¿cuánto trabajo realiza?

26. En la FIGURA 3.8.14 se muestra la gráfica de una fuerza variable F. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza al mover una partícula desde $x = 0$ hasta $x = 6$.

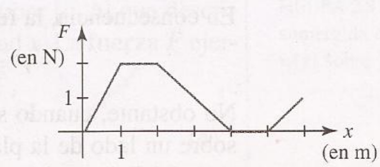


FIGURA 3.8.14 Gráfica de la fuerza en el problema 26

27. Un poco de historia: Una gran verdadera historia En 1977, George Willig, conocido como la "Mosca humana" o el "Hombre araña", escaló la parte exterior de la torre sur del edificio del World Trade Center en Nueva York hasta una altura de 1 350 pies en 3.5 h a razón de 6.4 pies/min. En esa época Willig pesaba 165 lb. ¿Cuánto trabajo realizó George? (Por su esfuerzo, fue multado con \$1.10; 1 centavo por cada uno de los 110 pisos del edificio.)

28. Un cubo que contiene agua pesa 200 lb. Cuando el cubo es levantado por una cuerda, en su parte inferior hay una fuga a razón constante, de modo que cuando el cubo llega a una altura de 10 pies pesa 180 lb. Suponga que el peso de la cuerda es despreciable. Analice: explique por qué $\frac{200+180}{2} \cdot 10 = 1\,900$ pies/lb es una aproximación razonable al trabajo realizado. Sin integración, muestre que la "aproximación" anterior es también el valor exacto del trabajo realizado.

29. Como se muestra en la FIGURA 3.8.15, un cuerpo de masa m es movido por una fuerza horizontal F sobre una superficie sin fricción desde una posición x_1 hasta una posición x_2. En esos puntos respectivos, el cuerpo se mueve a velocidades v_1 y v_2, donde $v_2 > v_1$. Muestre que el trabajo realizado por la fuerza es el incremento en energía cinética $W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$. [*Sugerencia*: Use la segunda ley de Newton, $F = ma$, y exprese la aceleración a en términos de la velocidad v. Integre con respecto al tiempo t y haga una sustitución.]

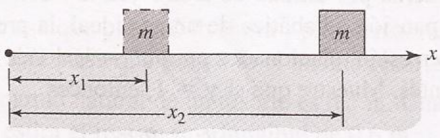


FIGURA 3.8.15 Masa en el problema 29

30. Como se muestra en la FIGURA 3.8.16, un cubo que contiene concreto y está suspendido por un cable se empuja horizontalmente desde la vertical por un obrero de la construcción. La longitud del cable es de 30 m y la masa combinada m del cubo y el concreto es de 550 kg. Por principios de física es posible mostrar que la fuerza requerida para mover el cubo x m está dada por $F = mg \tan\theta$, donde g es la aceleración de la gravedad. Encuentre el trabajo realizado por el obrero de la construcción al empujar el cubo una distancia horizontal de 3 m. [*Sugerencia*: Use (2) y una sustitución.]

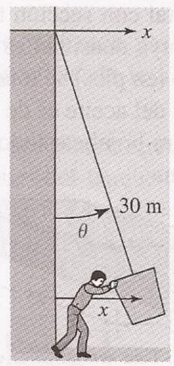


FIGURA 3.8.16 Cubo en el problema 30

3.9 Presión y fuerza de un fluido

Introducción Todo el mundo ha experimentado que se le "tapan los oídos" e incluso dolor en los oídos cuando desciende en avión (o en un elevador), o cuando bucea hacia el fondo de una piscina. Estas sensaciones molestas en los oídos se deben a un incremento en la *presión* ejercida por el aire o el agua sobre mecanismos en el oído medio. El aire y el agua son ejemplos de fluidos. En esta sección se mostrará la forma en que la integral definida puede usarse para encontrar la fuerza ejercida por un fluido.

Los *fluidos* incluyen líquidos (como agua y aceite) y gases (como el nitrógeno).

Fuerza y presión Suponga que una placa *horizontal* plana se sumerge en un fluido como agua. La fuerza ejercida por el fluido exactamente arriba de la placa, denominada **fuerza F del fluido**, se define como

$$F = \underbrace{(\text{fuerza por unidad de área})}_{\text{presión del fluido } P} \cdot (\text{área de la superficie}) \tag{1}$$
$$= PA.$$

Si ρ denota el peso específico del fluido (peso por unidad de volumen) y A es el área de la placa horizontal sumergida hasta una profundidad h, mostrado en la FIGURA 3.9.1*a*), entonces la **presión P del fluido** sobre la placa puede expresarse en términos de ρ:

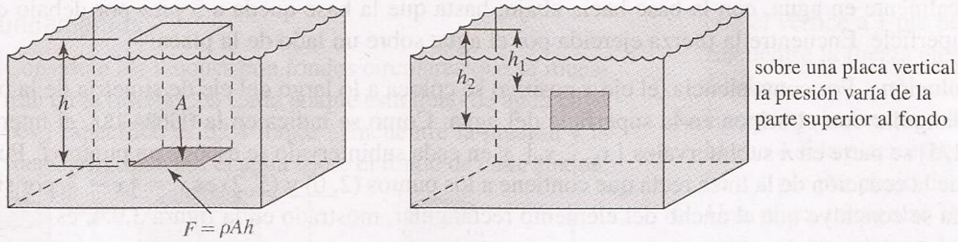
$$P = (\text{peso por unidad de volumen}) \cdot (\text{profundidad}) = \rho h. \tag{2}$$

En consecuencia, la fuerza (1) del fluido es la misma que

$$F = (\text{presión del fluido}) \cdot (\text{área de la superficie}) = \rho h A. \tag{3}$$

No obstante, cuando se sumerge una placa *vertical*, la presión del fluido y la fuerza del fluido sobre un lado de la placa varían con la profundidad. Vea la figura 3.9.1*b*). Por ejemplo, la presión del fluido sobre una presa vertical es menor en la parte superior que en su base.

Antes de empezar, considere un ejemplo simple de presión y fuerza de una placa sumergida horizontalmente.



a) Placa horizontal *b*) Placa vertical

FIGURA 3.9.1 La presión y la fuerza del fluido son constantes sobre una placa sumergida horizontalmente, pero la presión y la fuerza del fluido varían con la profundidad en una placa sumergida verticalmente

EJEMPLO 1 Presión y fuerza

Una placa rectangular plana de 5 pies × 6 pies se sumerge horizontalmente en agua a una profundidad de 10 pies. Determine la presión y la fuerza ejercidas sobre la placa por el agua arriba de ésta.

Solución Recuerde que el peso específico del agua es 62.4 lb/pie^3. Así, por (2) la presión del fluido es

$$P = \rho h = (62.4 \text{ lb/pie}^3) \cdot (10 \text{ pies}) = 624 \text{ lb/pie}^2.$$

Puesto que el área superficial de la placa es $A = 30$ pies^2, por (3) se concluye que la fuerza del fluido sobre la placa es

$$F = PA = (\rho h)A = (624 \text{ lb/pie}^2) \cdot (30 \text{ pies}^2) = 18\,720 \text{ lb.} \quad \blacksquare$$

Para determinar la fuerza total F ejercida por un fluido sobre un lado de una superficie plana sumergida verticalmente, se emplea una forma del **principio de Pascal**:

- La presión ejercida por un fluido a una profundidad h es la misma en todas direcciones.

Entonces, si en un gran contenedor con fondo plano y paredes verticales se vierte agua hasta una profundidad de 10 pies, la presión de 624 lb/pie^2 en el fondo se ejerce de la misma forma sobre las paredes. Vea la FIGURA 3.9.2.

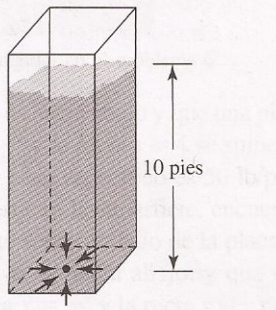


FIGURA 3.9.2 Una presión de 640 lb/pie^2 se aplica en todas direcciones

Construcción de una integral Considere que el eje x positivo está dirigido hacia abajo con el origen en la superficie del fluido. Suponga que una placa plana vertical, limitada por las rectas horizontales $x = a$ y $x = b$, se sumerge en el fluido como se muestra en la FIGURA 3.9.3*a*). Sea $w(x)$ una función que denota el ancho de la placa en cualquier número x en $[a, b]$ y sea P cualquier partición del intervalo. Si x_k^* es un punto muestra en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces por (3) con las identificaciones $h = x_k^*$ y $A = w(x_k^*)\,\Delta x_k$, la fuerza F_k ejercida por el fluido sobre el elemento rectangular correspondiente es aproximada por

$$F_k = \rho \cdot x_k^* \cdot w(x_k^*)\,\Delta x_k,$$

donde, como antes, ρ denota el peso específico del fluido. Así, una aproximación a la fuerza del fluido sobre un lado de la placa está dada por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{n} \rho x_k^* w(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Esto sugiere que la fuerza total del fluido sobre la placa es

$$F = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho x_k^* w(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

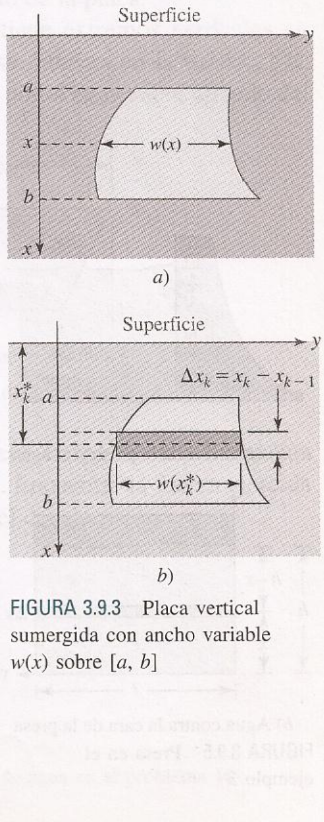


FIGURA 3.9.3 Placa vertical sumergida con ancho variable $w(x)$ sobre $[a, b]$

Definición 3.9.1 Fuerza ejercida por un fluido

Sea ρ el peso específico de un fluido y sea $w(x)$ una función continua sobre $[a, b]$ que describe el ancho de una placa plana sumergida verticalmente a una profundidad x. La **fuerza** $\boldsymbol{F}$ ejercida por el fluido sobre un lado de la placa sumergida es

$$F = \int_a^b \rho x w(x)\,dx. \qquad (4)$$

EJEMPLO 2 Fuerza de un fluido

Una placa en forma de triángulo isósceles de 3 pies de altura y 4 pies de ancho se sumerge verticalmente en agua, con la base hacia abajo, hasta que la base queda a 5 pies por debajo de la superficie. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.

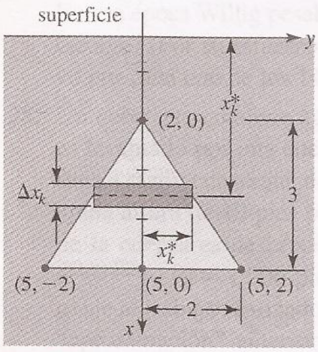


FIGURA 3.9.4 Placa triangular en el ejemplo 2

Solución Por conveniencia, el eje x positivo se coloca a lo largo del eje de simetría de la placa triangular con el origen en la superficie del agua. Como se indica en la FIGURA 3.9.4, el intervalo $[2, 5]$ se parte en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, y en cada subintervalo se escoge un punto x_k^*. Puesto que la ecuación de la línea recta que contiene a los puntos $(2, 0)$ y $(5, 2)$ es $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$, por simetría se concluye que el ancho del elemento rectangular, mostrado en la figura 3.9.4, es

$$2y_k^* = 2\left(\frac{2}{3}x_k^* - \frac{4}{3}\right).$$

Luego, $\rho = 62.4$ lb/pie^3, de modo que la fuerza del fluido sobre esa porción de la placa que corresponde al k-ésimo subintervalo es aproximada por

$$F_k = (62.4) \cdot x_k^* \cdot 2\left(\frac{2}{3}x_k^* - \frac{4}{3}\right)\Delta x_k.$$

Al formar la suma $\sum_{k=1}^{n} F_k$ y tomar el límite cuando $\|P\| \to 0$ obtenemos

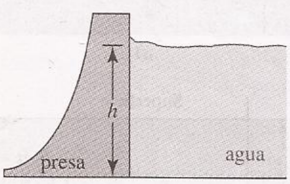
$$\begin{aligned} F &= \int_2^5 (62.4)2x\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right) dx \\ &= (62.4)\frac{4}{3}\int_2^5 (x^2 - 2x)\, dx \\ &= 83.2\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big]_2^5 \\ &= (83.2) \cdot 18 = 1\,497.6 \text{ lb.} \end{aligned}$$

En problemas como el ejemplo 2, los ejes x y y se colocan donde convenga. Si el eje y se coloca perpendicular al eje x en la parte superior de la placa en el punto $(2, 0)$, entonces los cuatro puntos $(2, 0)$, $(5, -2)$, $(5, 0)$ y $(5, 2)$ en la figura 3.9.4 se vuelven $(0, 0)$, $(3, -2)$, $(3, 0)$ y $(3, 2)$, respectivamente. La ecuación de la línea recta que contiene a los puntos $(0, 0)$ y $(3, 2)$ es $y = \frac{2}{3}x$. Usted debe comprobar que la fuerza F ejercida por el agua contra la placa está dada por la integral definida

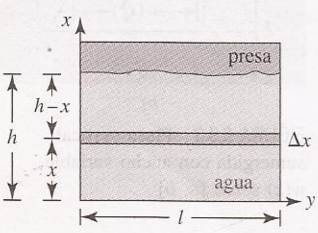
$$F = (62.4)\frac{4}{3}\int_0^3 x(x + 2)\, dx.$$

EJEMPLO 3 Fuerza del agua contra una presa

Una presa tiene una cara rectangular vertical. Encuentre la fuerza ejercida por el agua contra la cara vertical de la presa si la profundidad del agua es h pies y su ancho mide l pies. Vea la FIGURA 3.9.5*a*).



a) Vista lateral de la presa y el agua



b) Agua contra la cara de la presa

FIGURA 3.9.5 Presa en el ejemplo 3

Solución Para variar, el eje x positivo apunta hacia arriba desde el fondo de la cara rectangular de la presa, como se muestra en la figura 3.9.5*b*). Luego, el intervalo $[0, h]$ se divide en n subintervalos. Al eliminar uno de los subíndices, la fuerza F_k del fluido contra esa porción rectangular de la placa que corresponde al k-ésimo subintervalo, mostrado en la figura 3.9.5*b*), es aproximada por

$$F_k = (62.4) \cdot (h - x) \cdot (l\,\Delta x).$$

Aquí la profundidad es $h - x$ y el área del elemento rectangular es $l\,\Delta x$. Al sumar estas aproximaciones y tomar el límite cuando $\|P\| \to 0$ se llega a

$$F = \int_0^h 62.4l(h - x)\, dx = \frac{1}{2}(62.4)lh^2.$$

Si en el ejemplo 3 la profundidad del agua es 100 pies y su ancho mide 300 pies, entonces la fuerza del fluido sobre la cara de la presa es 93 600 000 lb.

3.9 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

1. Considere los tanques con fondos circulares que se muestran en la FIGURA 3.9.6. Cada tanque está lleno de agua cuyo peso específico es 62.4 lb/pie^3. Encuentre la presión y la fuerza ejercidas por el agua sobre el fondo de cada tanque.

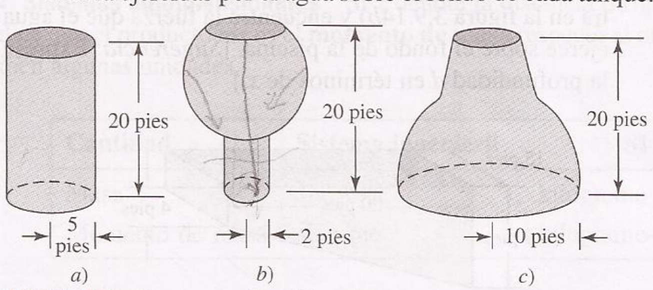


FIGURA 3.9.6 Tanques en el problema 1

2. El buque tanque mostrado en la FIGURA 3.9.7 tiene fondo plano y está lleno de petróleo cuyo peso específico es 55 lb/pie^3. El buque mide 350 pies de largo.
   a) ¿Cuál es la presión que ejerce el petróleo sobre el fondo del buque?
   b) ¿Cuál es la presión que ejerce el agua sobre el fondo del buque?
   c) ¿Cuál es la fuerza que ejerce el petróleo sobre el fondo del buque?
   d) ¿Cuál es la fuerza que ejerce el agua sobre el fondo del buque?

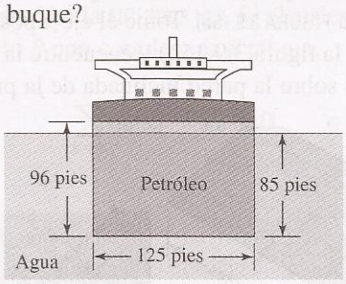


FIGURA 3.9.7 Buque tanque en el problema 2

3. Las dimensiones de una piscina rectangular en forma de paralelepípedo rectangular son 30 pies × 15 pies × 9 pies.
   a) Si la piscina está llena de agua hasta una profundidad de 8 pies, encuentre la presión y la fuerza ejercidas sobre el fondo plano de la piscina. Vea la FIGURA 3.9.8.
   b) Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre una de las paredes verticales de la piscina, así como sobre un lado vertical.

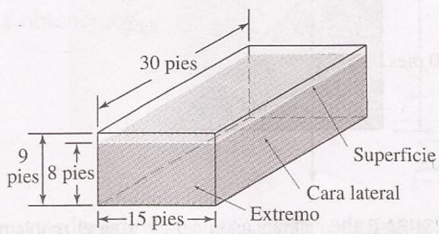


FIGURA 3.9.8 Piscina en el problema 3

4. Una placa en forma de triángulo equilátero de $\sqrt{3}$ pie por lado se sumerge verticalmente, con la base hacia abajo, con el vértice a 1 pie por abajo de la superficie del agua. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.

5. Encuentre la fuerza sobre un lado de la placa en el problema 4 si la placa está suspendida con la base hacia arriba a 1 pie por abajo de la superficie del agua.

6. Una placa triangular se sumerge verticalmente en agua como se muestra en la FIGURA 3.9.9. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.

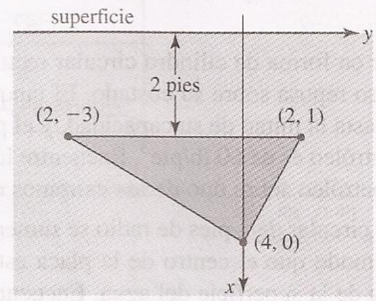


FIGURA 3.9.9 Placa triangular en el problema 6

7. Suponga que el eje x positivo es hacia abajo y que una placa acotada por la parábola $x = y^2$ y la recta $x = 4$ se sumerge verticalmente en aceite cuyo peso específico es 50 lb/pie^3. Si el vértice de la parábola está en la superficie, encuentre la fuerza ejercida por el aceite sobre un lado de la placa.

8. Suponga que el eje x positivo es hacia abajo, y que una placa acotada por la parábola $x = y^2$ y la recta $y = -x + 2$ se sumerge verticalmente en agua. Si el vértice de la parábola está en la superficie, encuentre la fuerza ejercida por el aceite sobre un lado de la placa.

9. Un canalón lleno de agua tiene extremos verticales en forma de trapezoide como se muestra en la FIGURA 3.9.10. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado del canalón.

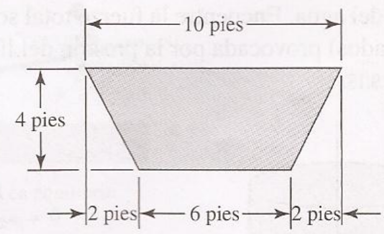


FIGURA 3.9.10 Canalón de agua en el problema 9

10. Un canalón lleno de agua tiene extremos en la forma que se muestra en la FIGURA 3.9.11. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado del canalón.

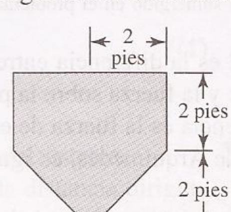


FIGURA 3.9.11 Canalón de agua en el problema 10

11. Un extremo vertical de una piscina tiene la forma que se muestra en la FIGURA 3.9.12. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre este lado de la piscina.

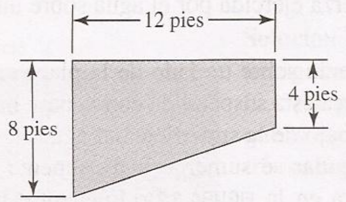


FIGURA 3.9.12 Extremo de la piscina en el problema 11

12. Un tanque en forma de cilindro circular recto de 10 pies de diámetro reposa sobre su costado. El tanque contiene petróleo hasta la mitad de su capacidad, y el peso específico del petróleo es de 60 lb/pie^3. Encuentre la fuerza que ejerce el petróleo sobre uno de los extremos del tanque.

13. Una placa circular de 4 pies de radio se sumerge verticalmente de modo que el centro de la placa está a 10 pies por debajo de la superficie del agua. Encuentre la fuerza que el agua ejerce sobre un lado de la placa. [*Sugerencia*: Para facilitar las cosas, considere que el origen está en el centro de la placa, con el eje x positivo hacia abajo. También vea los problemas 55-58 en los ejercicios 3.2.]

14. Un tanque cuyos extremos tienen forma elíptica $x^2/4 + y^2/9 = 1$ se sumerge en un líquido cuyo peso específico es ρ, de modo que las placas extremas son verticales. Encuentre la fuerza que el líquido ejerce sobre un extremo si su centro está a 10 pies por debajo de la superficie del líquido. [*Sugerencia*: Proceda como en el problema 13 y use el hecho de que el área de una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es πab.]

15. Un bloque sólido en forma de cubo de 2 pies de arista se sumerge en un gran tanque de agua. La parte superior del bloque es horizontal y se ubica a 3 pies por abajo de la superficie del agua. Encuentre la fuerza total sobre el bloque (seis lados) provocada por la presión del líquido. Vea la FIGURA 3.9.13.

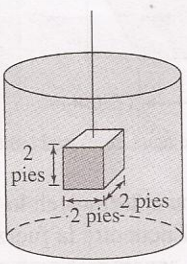


FIGURA 3.9.13 Bloque sumergido en el problema 15

16. En el problema 15, ¿cuál es la diferencia entre la fuerza sobre el fondo del bloque y la fuerza sobre la parte superior del bloque? La diferencia es la fuerza de empuje del agua y, por el principio de Arquímedes, es igual al peso del agua desplazada. ¿Cuál es el peso del agua desplazada? ¿Cuál es el peso del agua desplazada por el bloque?

☰ Piense en ello

17. Considere la piscina rectangular que se muestra en la FIGURA 3.9.14*a*) cuyos extremos son trapezoides. La piscina está llena de agua. Tome el eje x positivo como se muestra en la figura 3.9.14*b*) y encuentre la fuerza que el agua ejerce sobre el fondo de la piscina. [*Sugerencia*: Exprese la profundidad d en términos de x.]

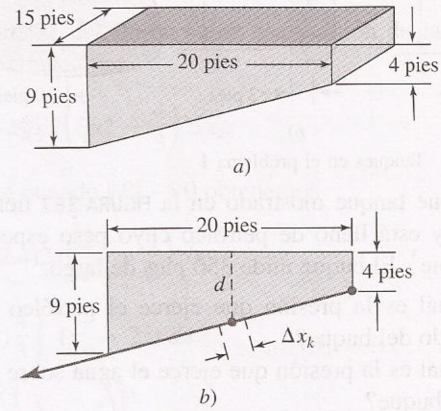


FIGURA 3.9.14 Piscina en el problema 17

18. Se construye una presa de barro cuyas dimensiones se muestran en la FIGURA 3.9.15*a*). Tome el eje x positivo como se muestra en la figura 3.9.15*b*) y encuentre la fuerza que el agua ejerce sobre la pared inclinada de la presa.

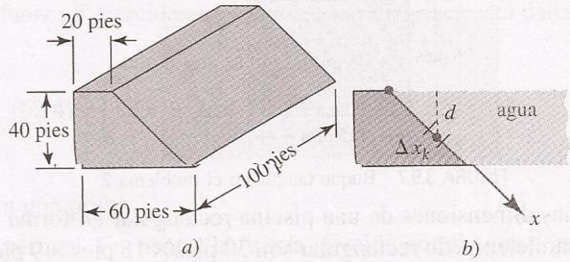


FIGURA 3.9.15 Presa en el problema 18

19. Analice el problema 18 con el eje x positivo que se muestra en la FIGURA 3.9.16.

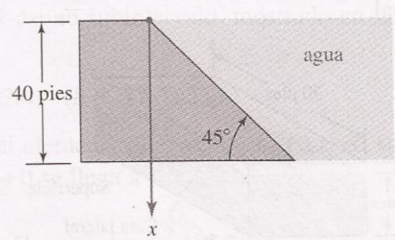


FIGURA 3.9.16 Orientación del eje x en el problema 19

3.10 Centros de masa y centroides

Introducción En esta sección consideramos otra aplicación de la física. Usamos la integral definida para encontrar el centro de masa de barras y regiones planas. Empezamos con una revisión de la forma de encontrar el centro de masa de sistemas bidimensionales y tridimensionales de n masas discretas o puntuales.

Sistemas unidimensionales Si x denota la distancia dirigida del origen O a una masa m, se dice que el producto mx es el **momento de masa** respecto al origen. En la tabla siguiente se resumen algunas unidades.

Cantidad	Sistema ingenieril	SI	cgs
Masa	slug	kilogramo (kg)	gramo (g)
Momento de masa	slug-pie	kilogramo-metro	gramo-centímetro

Luego, para n masas puntuales $m_1, m_2, \ldots, m_n$ a distancias dirigidas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, a partir de O, como en la FIGURA 3.10.1, decimos que

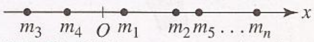


FIGURA 3.10.1 n masas sobre los ejes x

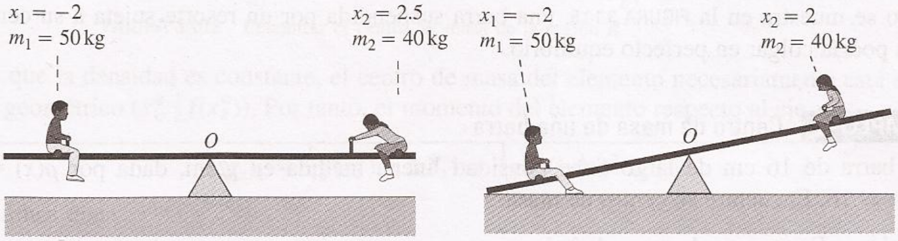
$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

es la **masa total del sistema**, y que

$$M_O = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = \sum_{k=1}^{n} m_kx_k$$

es el **momento del sistema respecto al origen**. Si $\sum_{k=1}^{n} m_kx_k = 0$, se dice que el sistema está en **equilibrio**. Vea la FIGURA 3.10.2. Si el sistema de masas de la figura 3.10.1 no está en equilibrio, hay un punto P con coordenada $\bar{x}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - \bar{x}) = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad \sum_{k=1}^{n} m_kx_k - \bar{x}\sum_{k=1}^{n} m_k = 0.$$



a) El sube y baja está en equilibrio puesto que $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$

b) El sube y baja no está en equilibrio puesto que $m_1x_1 + m_2x_2 \neq 0$

FIGURA 3.10.2 *a)* Sube y baja en equilibrio; *b)* no está en equilibrio

Al despejar $\bar{x}$ obtenemos

$$\bar{x} = \frac{M_O}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_kx_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}. \tag{1}$$

El punto con coordenada $\bar{x}$ se llama **centro de masa** o **centro de gravedad** del sistema.

Puesto que (1) implica $\bar{x}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m_kk_k$, se concluye que $\bar{x}$ es la distancia dirigida desde el origen hasta un punto en que puede considerarse que está concentrada la masa total del sistema.

En un sistema en que la aceleración de la gravedad varía de una masa a otra, el centro de gravedad no es el mismo que el centro de masa.

EJEMPLO 1 Centro de masa de tres objetos

Tres cuerpos de masas 4, 6 y 10 kilogramos se colocan en $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ y $x_3 = 9$, respectivamente. Las distancias se miden en metros. Encuentre el centro de masa.

Solución Por (1),

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 + 10 \cdot 9}{4 + 6 + 10} = \frac{106}{20} = 5.3.$$

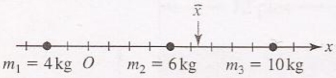


FIGURA 3.10.3 Centro de masa de tres masas puntuales

La FIGURA 3.10.3 muestra que el centro de masa $\bar{x}$ está 5.3 m a la derecha del origen. ■

Construcción de una integral Ahora se considerará el problema de encontrar el centro de masa de una barra de longitud L que tiene una **densidad lineal variable** ρ (la masa/longitud unitaria se mide en slugs/pie, kg/m o g/cm). Se supone que la barra coincide con el eje x sobre el intervalo $[0, L]$, como se muestra en la FIGURA 3.10.4, y la densidad es una función continua $\rho(x)$. Después de formar una partición P del intervalo, se escoge un punto x_k^* en $[x_{k-1}, x_k]$. El número

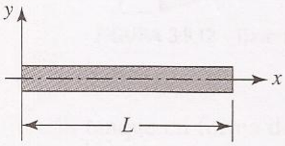


FIGURA 3.10.4 Barra de longitud L que coincide con el eje x

$$m_k = \rho(x_k^*)\,\Delta x_k$$

es una aproximación a la masa de esa porción de la barra sobre el subintervalo. También, el momento de este elemento de masa respecto al origen es aproximado por

$$(M_O)_k = x_k^* \rho(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Así, se concluye que

$$m = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k^*)\,\Delta x_k = \int_0^L \rho(x)\,dx$$

y

$$M_O = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} x_k^* \rho(x_k^*)\,\Delta x_k = \int_0^L x\rho(x)\,dx$$

son la **masa de la barra** y su **momento respecto al origen**, respectivamente. Luego, por $\bar{x} = M_O/m$ se concluye que el centro de masa de la barra está dado por

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^L \rho(x)\,dx}. \tag{2}$$

FIGURA 3.10.5 Barra suspendida en equilibrio

Como se muestra en la FIGURA 3.10.5, una barra suspendida por un resorte sujeta a su centro de masa podría colgar en perfecto equilibrio.

EJEMPLO 2 Centro de masa de una barra

Una barra de 16 cm de largo tiene densidad lineal, medida en g/cm, dada por $\rho(x) = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 16$. Encuentre su centro de masa.

Solución En gramos, la masa de la barra es

$$m = \int_0^{16} x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^{16} = \frac{128}{3}.$$

El momento respecto al origen (en g-cm) es

$$M_0 = \int_0^{16} x \cdot x^{1/2}\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2}\Big]_0^{16} = \frac{2\,048}{5}.$$

Por (2) encontramos

$$\bar{x} = \frac{2\,048/5}{128/3} = 9.6.$$

Es decir, el centro de masa $\bar{x}$ de la barra está a 9.6 cm del extremo izquierdo de la barra que coincide con el origen. ■

Sistemas bidimensionales Para n masas puntuales situadas en el plano xy, como se indica en la FIGURA 3.10.6, el **centro de masa del sistema** se define como el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } y}{\text{masa total}},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } x}{\text{masa total}}.$$

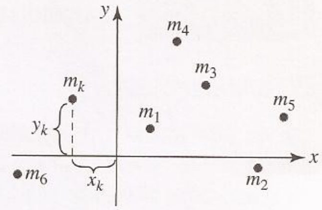


FIGURA 3.10.6 n masas en el plano xy

Lámina Ahora se analizará el problema de encontrar el centro de masa, o punto de equilibrio, de un frotis de materia, o **lámina** delgada bidimensional, que tiene densidad constante ρ (masa por unidad de área). Vea la FIGURA 3.10.7. Cuando ρ es constante, se dice que la lámina es **homogénea**.

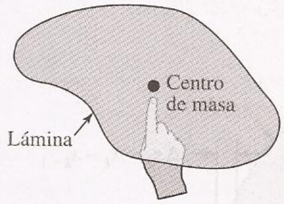


FIGURA 3.10.7 Centro de masa de una lámina

Construcción de una integral Como se muestra en la FIGURA 3.10.8*a*), suponga que la lámina coincide con una región R en el plano xy acotada por la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Si P es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces la masa del elemento rectangular que se muestra en la figura 3.8.10*b*) es

$$m_k = \rho\, \Delta A_k = \rho f(x_k^*)\, \Delta x_k,$$

donde, en este caso, tomamos x_k^* como el punto medio del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y ρ es la densidad constante. El momento de este elemento con respecto al eje y es

$$(M_y)_k = x_k^*\, \Delta m_k = x_k^*(\rho\, \Delta A_k) = \rho x_k^* f(x_k^*)\, \Delta x_k.$$

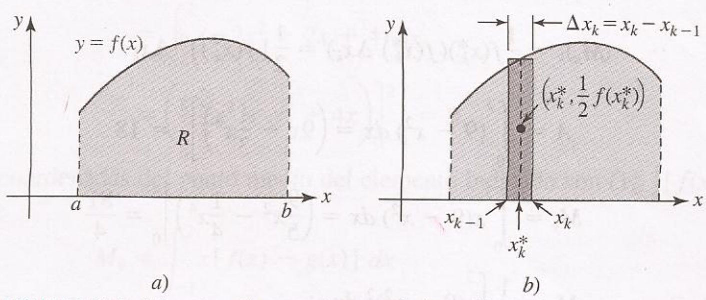


FIGURA 3.10.8 Encontrar el centro de masa de la región R

Puesto que la densidad es constante, el centro de masa del elemento necesariamente está en su centro geométrico $(x_k^*, \frac{1}{2}f(x_k^*))$. Por tanto, el momento del elemento respecto al eje x es

$$(M_x)_k = \frac{1}{2} f(x_k^*)(\rho\, \Delta A_k) = \frac{1}{2}\rho [f(x_k^*)]^2\, \Delta x_k.$$

Concluimos que

$$m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho f(x_k^*)\, \Delta x_k = \int_a^b \rho f(x)\, dx,$$

$$M_y = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho x_k^* f(x_k^*)\, \Delta x_k = \int_a^b \rho x f(x)\, dx,$$

y

$$M_x = \lim_{\|P\|\to 0} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \rho [f(x_k^*)]^2 \Delta x_k = \frac{1}{2}\int_a^b \rho [f(x)]^2\, dx.$$

Por tanto, las coordenadas del centro de masa de la lámina se definen como

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \rho x f(x)\, dx}{\int_a^b \rho f(x)\, dx}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \rho [f(x)]^2\, dx}{\int_a^b \rho f(x)\, dx}. \qquad (3)$$

Centroide Observamos que la densidad constante ρ se cancela en las ecuaciones (3) para $\bar{x}$ y $\bar{y}$, y que el denominador de $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área A de la región R. En otras palabras, el centro de masa sólo depende de la forma de R:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\displaystyle\int_a^b xf(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2\,dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}. \tag{4}$$

Para recalcar la diferencia, aunque menor, entre el objeto físico, que es la lámina homogénea, y el objeto geométrico, que es la región plana R, se dice que las ecuaciones en (4) definen las coordenadas del **centroide** de la región.

Nota: Es importante que comprenda el resultado en (4), pero no intente memorizar las integrales porque para abreviar el análisis se ha supuesto que R está acotada por la gráfica de una función f y el eje x. R también podría ser la región acotada entre las gráficas de dos funciones f y g. Vea el ejemplo 5.

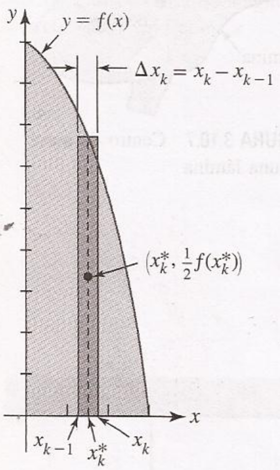


FIGURA 3.10.9 Región en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Centroide de una región

Encuentre el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por la gráfica de $y = 9 - x^2$, el eje x y el eje y.

Solución La región se muestra en la FIGURA 3.10.9. Luego, si $f(x) = 9 - x^2$, entonces

$$A_k = f(x_k^*)\,\Delta x_k$$
$$(M_y)_k = xf(x_k^*)\,\Delta x_k$$

y
$$(M_x)_k = \frac{1}{2}f(x_k^*)(f(x_k^*)\,\Delta x_k) = \frac{1}{2}[f(x_k^*)]^2\,\Delta x_k.$$

Por tanto,
$$A = \int_0^3 (9 - x^2)\,dx = \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big]_0^3 = 18$$
$$M_y = \int_0^3 x(9 - x^2)\,dx = \left(\frac{9}{5}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big]_0^3 = \frac{81}{4}$$
$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^3 (9 - x^2)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^3 (81 - 18x^2 + x^4)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(81x - 6x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big]_0^3 = \frac{324}{5}.$$

Por (4) se concluye que las coordenadas del centroide son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{81/4}{18} = \frac{9}{8}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{324/5}{18} = \frac{54}{15}.$$

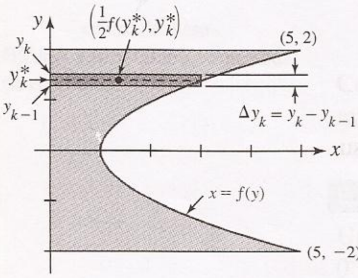


FIGURA 3.10.10 Región en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Integración con respecto a y

Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $x = y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 2$ y $y = -2$.

Solución La región se muestra en la FIGURA 3.10.10. El análisis de la figura sugiere el uso de elementos rectangulares horizontales. Si $f(y) = y^2 + 1$, entonces

$$A_k = f(y_k^*)\,\Delta y_k$$
$$(M_x)_k = y_k^* f(y_k^*)\,\Delta y_k$$
$$(M_y)_k = \frac{1}{2}f(y_k^*)(f(y_k^*)\,\Delta y_k) = -\frac{1}{2}[f(y_k^*)]^2\,\Delta y_k$$

y así $$A = \int_{-2}^{2} (y^2 + 1)\, dy = \left(\frac{1}{3}y^3 + y\right)\Big]_{-2}^{2} = \frac{28}{3}$$

$$M_x = \int_{-2}^{2} y(y^2 + 1)\, dy = \left(\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2\right)\Big]_{-2}^{2} = 0,$$

$$M_y = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (y^2 + 1)^2\, dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (y^4 + 2y^2 + 1)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}y^5 + \frac{2}{3}y^3 + y\right)\Big]_{-2}^{2} = \frac{206}{15}.$$

Por tanto, se tiene

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{206/15}{28/3} = \frac{103}{70}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{0}{28/3} = 0.$$

Como es de esperar, puesto que la lámina es simétrica respecto al eje x, el centroide está en el eje de simetría. También se observa que el centroide está fuera de la región. ■

EJEMPLO 5 Región entre dos gráficas

Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = -x^2 + 3$ y $y = x^2 - 2x - 1$.

Solución En la FIGURA 3.10.11 se muestra la región en cuestión. Se observa que los puntos de intersección de las gráficas son $(-1, 2)$ y $(2, -1)$. Luego, si $f(x) = -x^2 + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x - 1$, entonces el área de la región es

$$A = \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\, dx$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right)\Big]_{-1}^{2} = 9.$$

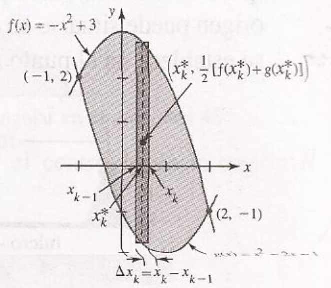


FIGURA 3.10.11 Región en el ejemplo 5

Puesto que las coordenadas del punto medio del elemento indicado son $(x_k^*, \frac{1}{2}[f(x_k^*) + g(x_k^*)])$, se concluye que

$$M_y = \int_{-1}^{2} x[f(x) - g(x)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-2x^3 + 2x^2 + 4x)\, dx$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right)\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2},$$

y $$M_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} [f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} [(-x^2 + 3)^2 - (x^2 - 2x - 1)^2]\, dx$$ $= \cancel{+x^4} + 6x^2 + 9) - (\cancel{x^4} + 4x^3 + 1)$

$4x^3 - 6x^2 - 4x$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} (4x^3 - 8x^2 - 4x + 8)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 8x\right)\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Por tanto, las coordenadas del centroide son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{9/2}{9} = \frac{1}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{9/2}{9} = \frac{1}{2}.$$ ■

3.10 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-4, encuentre el centro de masa del sistema de masas dado. La masa m_k está situada sobre el eje x en un punto cuya distancia dirigida desde el origen es x_k. Suponga que la masa se mide en gramos y que la distancia se mide en centímetros.

1. $m_1 = 2, m_2 = 5; x_1 = 4, x_2 = -2$
2. $m_1 = 6, m_2 = 1, m_3 = 3; x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -3, x_3 = 8$
3. $m_1 = 10, m_2 = 5, m_3 = 8, m_4 = 7; x_1 = -5, x_2 = 2, x_3 = 6, x_4 = -3$
4. $m_1 = 2, m_2 = \frac{3}{2}, m_3 = \frac{7}{2}, m_4 = \frac{1}{2}; x_1 = 9, x_2 = -4, x_3 = -6, x_4 = -10$
5. Dos masas están colocadas en los extremos de una tabla uniforme de masa despreciable, como se muestra en la FIGURA 3.10.12. ¿Dónde debe colocarse el fulcro de modo que el sistema esté en equilibrio? [*Sugerencia*: Aunque el origen puede situarse en cualquier parte, se supondrá que se establece en el punto medio entre las masas.]

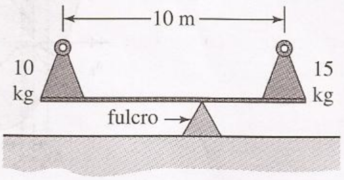


FIGURA 3.10.12 Masas en el problema 5

6. Encuentre el centro de masa de las tres masas m_1, m_2 y m_3 que están en los vértices del triángulo equilátero mostrado en la FIGURA 3.10.13. [*Sugerencia*: Primero encuentre el centro de masa de m_1 y m_2.]

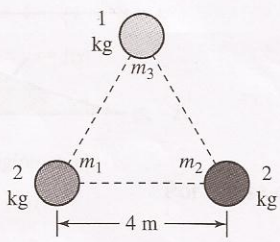


FIGURA 3.10.13 Masas en el problema 6

En los problemas 7-14, una barra de densidad lineal $\rho(x)$ kg/m coincide con el eje x en el intervalo indicado. Encuentre su centro de masa.

7. $\rho(x) = 2x + 1; \quad [0, 5]$
8. $\rho(x) = -x^2 + 2x; \quad [0, 2]$
9. $\rho(x) = x^{1/3}; \quad [0, 1]$
10. $\rho(x) = -x^2 + 1; \quad [0, 1]$
11. $\rho(x) = |x - 3|; \quad [0, 4]$
12. $\rho(x) = 1 + |x - 1|; [0, 3]$
13. $\rho(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}; \quad [0, 2]$
14. $\rho(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x \le 3 \end{cases}; \quad [0, 3]$
15. La densidad de una barra de 10 pies varía con el cuadrado de la distancia al extremo izquierdo. Encuentre su centro de masa si la densidad en su centro es 12.5 slug/pie.
16. La densidad lineal de una barra de 3 m varía con la distancia al extremo derecho. Encuentre la densidad lineal en el centro de la barra si su masa total es de 6 kg.

En los problemas 17-20, encuentre el centro de masa del sistema de masas dado. La masa m_k está en el punto P_k. Suponga que la masa se mide en gramos y que la distancia se mide en centímetros.

17. $m_1 = 3, m_2 = 4; P_1 = (-2, 3), P_2 = (1, 2)$
18. $m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 2; P_1 = (-4, 1), P_2 = (2, 2), P_3 = (5, -2)$
19. $m_1 = 4, m_2 = 8, m_3 = 10; P_1 = (1, 1), P_2 = (-5, 2), P_3 = (7, -6)$
20. $m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{2}, m_3 = 4, m_4 = \frac{5}{2}; P_1 = (9, 3), P_2 = (-4, -6), P_3 = (\frac{3}{2}, -1), P_4 = (-2, 10)$

En los problemas 21-38, encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

21. $y = 2x + 4, y = 0, x = 0, x = 2$
22. $y = x + 1, y = 0, x = 3$
23. $y = x^2, y = 0, x = 1$
24. $y = x^2 + 2, y = 0, x = -1, x = 2$
25. $y = x^3, y = 0, x = 3$
26. $y = x^3, y = 8, x = 0$
27. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 4$
28. $x = y^2, x = 1$
29. $y = x^2, y - x = 2$
30. $y = x^2, y = \sqrt{x}$
31. $y = x^3, y = x^{1/3}$, primer cuadrante
32. $y = 4 - x^2, y = 0, x = 0$, segundo cuadrante
33. $y = 1/x^3, y = 0, x = 1, x = 3$
34. $y = x^2 - 2x + 1, y = -4x + 9$
35. $x = y^2 - 1, y = -1, y = 2, x = -2$
36. $y = x^2 - 4x + 6, y = 0, x = 0, x = 4$
37. $y = 4 - 4x^2, y = 1 - x^2$
38. $y^2 + x = 1, y + x = -1$

En los problemas 39 y 40, use simetría para localizar $\bar{x}$ e integración para encontrar $\bar{y}$ de la región acotada por las gráficas de las funciones dadas.

39. $y = 1 + \cos x,\ y = 1,\ -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

40. $y = 4 \operatorname{sen} x,\ y = -\operatorname{sen} x,\ 0 \leq x \leq \pi$

≡ Piense en ello

41. Un teorema atribuido a **Pappus de Alejandría** (c. 350 d.C.) afirma lo siguiente:

> *Sean* L *un eje en un plano y* R *una región en el mismo plano que no corta a* L. *Cuando* R *gira alrededor de* L, *el volumen* V *del sólido de revolución resultante es igual al área* A *de* R *multiplicada por la longitud de la ruta recorrida por el centroide de* R.

a) Como se muestra en la FIGURA 3.10.14, sea R la región acotada por las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$. Muestre que si R gira alrededor del eje x, entonces $V = (2\pi\bar{y})A$, donde A es el área de la región.

b) ¿Qué considera que proporciona V cuando la región R gira alrededor del eje y?

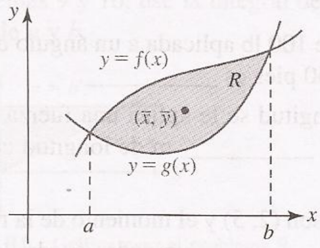


FIGURA 3.10.14 Región en el problema 41

42. Compruebe el teorema de Pappus en el problema 41 cuando la región acotada por $y = x^2 + 1,\ y = 1,\ x = 2$ gira alrededor del eje x.

43. Use el teorema de Pappus en el problema 41 para encontrar el volumen del toroide que se muestra en la FIGURA 3.10.15.

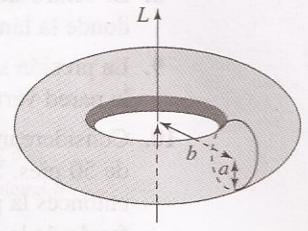


FIGURA 3.10.15 Toroide en el problema 43

44. Una barra de densidad lineal $\rho(x)$ kg/m coincide con el eje x sobre el intervalo [0, 6]. Si $\rho(x) = x(6 - x) + 1$, ¿dónde se espera de manera intuitiva que esté el centro de masa? Demuestre su respuesta.

45. Considere la región triangular R en la FIGURA 3.10.16. ¿Dónde cree que está el centroide del triángulo? Piense geométricamente.

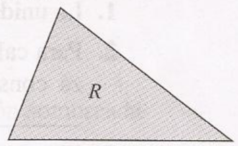


FIGURA 3.10.16 Región triangular en el problema 45

46. Sin integración, determine el centroide de la región R mostrada en la FIGURA 3.10.17.

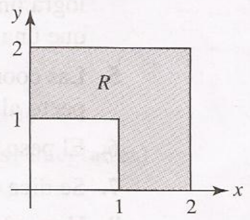


FIGURA 3.10.17 Región en el problema 46

Competencia final de la unidad 3

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-12, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Cuando $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, la integral proporciona el área bajo la gráfica de $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$. _____

2. $\int_0^3 (x - 1)\,dx$ es el área bajo la gráfica $y = x - 1$ sobre [0, 3]. _____

3. La integral $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ proporciona el área entre las gráficas de las funciones continuas f y g siempre que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$. _____

4. Los métodos del disco y la arandela para encontrar volúmenes de sólidos de revolución son casos especiales del método de rebanar. _____

5. El valor promedio f_{pro} de una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ necesariamente es un número que satisface $m \leq f_{pro} \leq M$, donde m y M son los valores mínimo y máximo de f sobre el intervalo, respectivamente. _____

6. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces el valor medio de $f + g$ es $(f + g)_{pro} = f_{pro} + g_{pro}$. _____

7. El centro de masa de un lápiz con densidad lineal constante ρ está en su centro geométrico. _____

8. El centro de masa de una lámina que coincide con una región plana R es un punto en R donde la lámina colgaría en equilibrio. _____

9. La presión sobre el fondo plano de una piscina es la misma que la presión horizontal sobre la pared vertical a la misma profundidad. _____

10. Considere una delgada lata de aluminio con radio de 6 pulg y un depósito circular con radio de 50 pies. Si cada uno tiene fondo plano y contiene agua hasta una profundidad de 1 pie, entonces la presión del líquido sobre el fondo del depósito es mayor que la presión sobre el fondo de la lata de aluminio. _____

11. Si $s(t)$ es la función de posición de un cuerpo que se mueve en línea recta, entonces $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$ es la distancia que el cuerpo se mueve en el intervalo $[t_1, t_2]$. _____

12. Cuando no hay resistencia del aire y desde la misma altura se sueltan al mismo tiempo una bala de cañón y un dulce, la bala de cañón llega primero al suelo. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-8, llene los espacios en blanco.

1. La unidad de trabajo en el sistema SI es _____.
2. Para calentarse, un corredor de 200 lb empuja contra un árbol durante 5 minutos con fuerza constante de 60 lb y luego corre 2 mi en 10 minutos. El trabajo total realizado es _____.
3. El trabajo realizado por una fuerza constante de 100 lb aplicada a un ángulo de 60° con respecto a la horizontal durante una distancia de 50 pies es _____.
4. A un resorte que mide inicialmente 1 m de longitud se le aplica una fuerza de 80 N, y se logra una longitud de 1.5 m. El resorte medirá _____ m de longitud cuando se aplique una fuerza de 100 N.
5. Las coordenadas del centroide de una región R son (2, 5) y el momento de la región con respecto al eje x es 30. Por tanto, el área de R es _____ unidades cuadradas.
6. El peso específico del agua es _____ lb/pie^3.
7. Se dice que la gráfica de una función con primera derivada continua es _____.
8. Una pelota soltada desde una gran altura choca contra el suelo en T segundos con una velocidad v_{impacto}. Si la función velocidad es $v(t) = -gt$, entonces la velocidad media v_{pro} de la pelota para $0 \leq t \leq T$ en términos de v_{impacto} es _____.

C. Ejercicios

En los problemas 1-8, establezca la(s) integral(es) definida(s) para encontrar el área de la región sombreada en cada figura.

1.

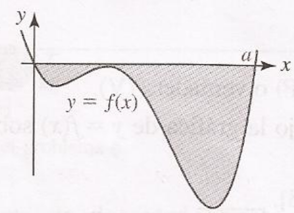


FIGURA 3.R.1 Gráfica para el problema 1

2.

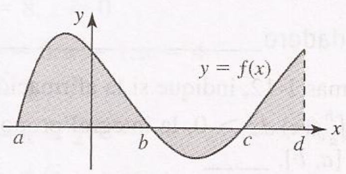


FIGURA 3.R.2 Gráfica para el problema 2

3.

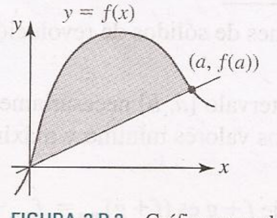


FIGURA 3.R.3 Gráfica para el problema 3

4.

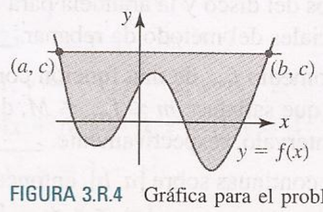


FIGURA 3.R.4 Gráfica para el problema 4

5.

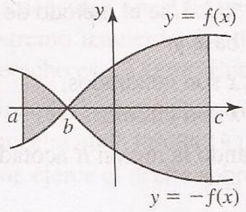


FIGURA 3.R.5 Gráfica para el problema 5

6.

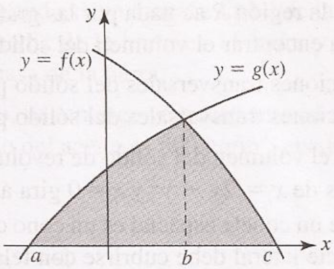


FIGURA 3.R.6 Gráfica para el problema 6

7.

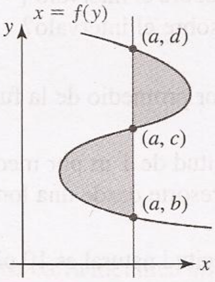


FIGURA 3.R.7 Gráfica para el problema 7

8.

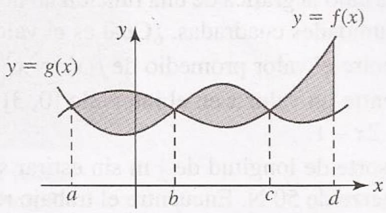


FIGURA 3.R.8 Gráfica para el problema 8

En los problemas 9 y 10, use la integral definida para encontrar el área de la región sombreada en términos de a y b.

9.

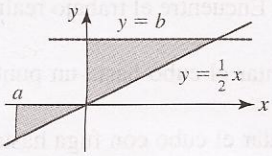


FIGURA 3.R.9 Gráfica para el problema 9

10.

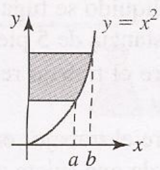


FIGURA 3.R.10 Gráfica para el problema 10

En los problemas 11-16, considere la región R en la FIGURA 3.R.11. Establezca la(s) integral(es) definida(s) para la cantidad indicada.

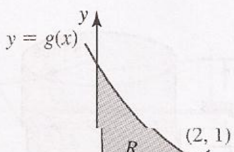


FIGURA 3.R.11 Región para los problemas 11-16

11. El centroide de la región

12. El volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje x

13. El volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y

14. El volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor de la recta $y = -1$

15. El volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor de la recta $x = 2$

16. El volumen del sólido con R como su base de modo que las secciones transversales del sólido paralelas al eje y son cuadradas

17. Encuentre el área acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$ sobre el intervalo $[0, \pi]$.

18. Considere la región acotada por las gráficas de $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y $x = \ln 2$.

a) Encuentre el área de la región.

b) Encuentre el volumen del sólido de revolución si la región gira alrededor del eje x.

19. Considere la región R acotada por las gráficas de $x = y^2$ y $x = \sqrt{2}$. Use el método de rebanadas para encontrar el volumen del sólido si la región R es su base y

a) las secciones transversales del sólido perpendiculares al eje x son cuadrados,

b) las secciones transversales del sólido perpendiculares al eje x son círculos.

20. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma cuando la región R acotada por las gráficas de $x = 2y - y^2$ y $x = 0$ gira alrededor de la recta $y = 3$.

21. La nariz de un cohete espacial es un cono circular recto de 8 pies de altura y 10 pies de radio. La superficie lateral debe cubrirse con tela excepto por una sección de 1 pie de altura en el ápice del cono de la nariz. Encuentre el área de la tela necesaria.

22. El área bajo la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ sobre el intervalo $[-3, 4]$ es 21 unidades cuadradas. ¿Cuál es el valor medio de la función sobre el intervalo?

23. Encuentre el valor promedio de $f(x) = x^{3/2} + x^{1/2}$ sobre $[1, 4]$.

24. Encuentre un valor x en el intervalo $[0, 3]$ que corresponda al valor promedio de la función $f(x) = 2x - 1$.

25. Un resorte de longitud de $\frac{1}{2}$ m sin estirar se alarga hasta una longitud de 1 m por medio de una fuerza de 50 N. Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte desde una longitud de 1 m hasta una longitud de 1.5 m.

26. El trabajo realizado para estirar un resorte 6 pulg más allá de su longitud natural es 10 pies-lb. Encuentre la constante del resorte.

27. Un tanque de agua, en forma de cubo de 10 pies de lado, se llena con agua. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta un punto situado a 5 pies por arriba del tanque.

28. Un cubo que pesa 2 lb contiene 30 lb de líquido. A medida que el cubo se levanta verticalmente a razón de 1 pie/s, el líquido se fuga a razón de $\frac{1}{4}$ lb/s. Encuentre el trabajo realizado para levantar el cubo una distancia de 5 pies.

29. En el problema 28, encuentre el trabajo realizado para levantar el cubo hasta un punto en que esté vacío.

30. En el problema 28, encuentre el trabajo realizado para levantar el cubo con fuga hasta una distancia de 5 pies si la cuerda que sujeta al cubo pesa $\frac{1}{8}$ lb/pie.

31. Un tanque en la parte superior de una torre de 15 pies de altura consta de un tronco de un cono sobrepuesto por un cilindro circular recto. Las dimensiones (en pies) se muestran en la FIGURA 3.R.12. Encuentre el trabajo realizado para llenar el tanque con agua desde el nivel del suelo.

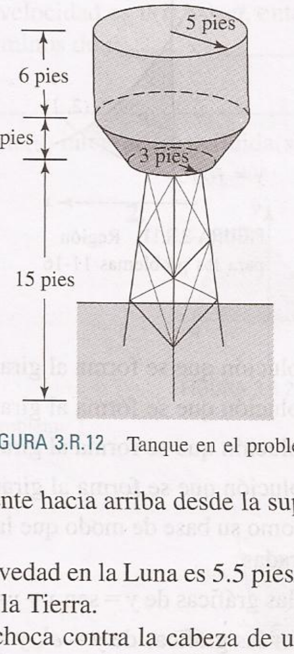


FIGURA 3.R.12 Tanque en el problema 31

32. Una roca se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Luna con una velocidad inicial de 44 pies/s.

a) Si la aceleración de la gravedad en la Luna es 5.5 pies/s^2, encuentre la altura máxima que se alcanza. Compare con la Tierra.

b) En su descenso, la roca choca contra la cabeza de un astronauta de 6 pies de estatura. ¿Cuál es la velocidad de impacto de la roca?

33. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = (x - 1)^{3/2}$ desde $(1, 0)$ hasta $(5, 8)$.

34. La densidad lineal de una barra de 6 m de longitud es una función lineal de la distancia a su extremo izquierdo. La densidad en la parte media de la barra es 11 kg/m y en el extremo derecho es 17 kg/m. Encuentre el centro de masa de la barra.

35. Una placa plana, en forma de cuarto de círculo, se sumerge verticalmente en aceite como se muestra en la FIGURA 3.R.13. Si el peso específico del aceite es 800 kg/m^3, encuentre la fuerza que ejerce el aceite sobre un lado de la placa.

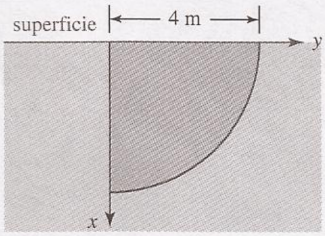


FIGURA 3.R.13 Placa vertical sumergida en el problema 35

36. Una barra metálica uniforme de masa 4 kg y longitud 2 m soporta dos masas, como se muestra en la FIGURA 3.R.14. ¿Dónde debe atarse el cable a la barra de modo que el sistema cuelgue en equilibrio?

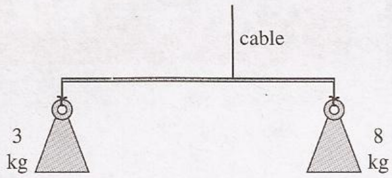


FIGURA 3.R.14 Masas en el problema 36

37. Tres masas están suspendidas de barras uniformes de masa despreciable como se muestra en la FIGURA 3.R.15. Determine dónde deben colocarse los cables indicados de modo que todo el sistema cuelgue en equilibrio.

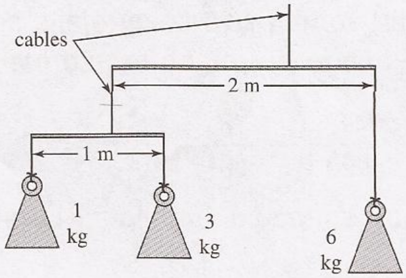
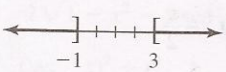


FIGURA 3.R.15 Masas en el problema 37

Respuestas a la evaluación diagnóstica

Evaluación diagnóstica, página xv

1. falso
2. verdadero
3. falso
4. verdadero
5. 12
6. -243
7. $\dfrac{3x^3 + 8x}{\sqrt{x^2 + 4}}$
8. $2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$
9. *a*) 0, 7 *b*) $-1 + \sqrt{6}, -1 - \sqrt{6}$ *c*) 1 *d*) 1
10. *a*) $(5x + 1)(2x - 3)$ *b*) $x^2(x + 3)(x - 5)$ *c*) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ *d*) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$
11. falso
12. falso
13. verdadero
14. 6; -6
15. $-a + 5$
16. *a*), *b*), *d*), *e*), *g*), *h*), *i*), *l*)
17. *i*) *d*); *ii*) *c*), *iii*) *a*); *iv*) *b*)
18. *a*) $-2 < x < 2$; *b*) $|x| < 2$
19.



20. $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right)$
21. $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$
22. $(-\infty, -2) \cup [0, 1]$
23. cuarto
24. $(5, -7)$
25. -12; 9
26. *a*) $(1, -5)$ *b*) $(-1, 5)$ *c*) $(-1, -5)$
27. $(-2, 0)$, $(0, -4)$, $(0, 4)$
28. segundo y cuarto
29. $x = 6$ o $x = -4$
30. $x^2 + y^2 = 25$
31. $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$
32. *c*)
33. falso
34. -27
35. 8
36. $\frac{2}{3}$; $(-9, 0)$; $(0, 6)$
37. $y = -5x + 3$
38. $y = 2x - 14$
39. $y = -\frac{1}{3}x + 3$
40. $y = -\frac{5}{8}x$
41. $x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 7 = 0$
42. *i*) *g*); *ii*) *e*); *iii*) *h*); *iv*) *a*); *v*) *b*); *vi*) *f*); *vii*) *d*); *viii*) *c*)
43. falso
44. falso
45. $4\pi/3$
46. 15
47. 0.23
48. $\cos t = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
49. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$; $\tan\theta = \frac{3}{4}$; $\cot\theta = \frac{4}{3}$; $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $\csc\theta = \frac{5}{3}$
50. $b = 10\tan\theta$, $c = 10\sec\theta$
51. $k = 10\ln 5$
52. $4 = 64^{1/3}$
53. $\log_b 125$
54. aproximadamente 2.3347
55. 1 000
56. verdadero

Respuestas de los problemas impares

Problemas 1.1

1. $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

3. $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4}$

5. $-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25}$

7. $(2^2 - 4) + (3^2 - 6) + (4^2 - 8) + (5^2 - 10)$

9. $-1 + 1 - 1 + 1 - 1$

11. $\sum_{k=1}^{7} (2k + 1)$

13. $\sum_{k=0}^{12} (3k + 1)$

15. $\sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

17. $\sum_{k=1}^{8} 6$

19. $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^k k^{+1}}{k^2} \cos\frac{k\pi}{p}x$

21. 420

23. 65

25. 109

27. 3 069

29. 18

31. 28

33. $\frac{8}{3}$

35. $\frac{4}{3}$

37. $\frac{16}{3}$

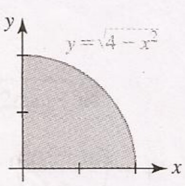
39. $\frac{1}{4}$

41. $\frac{25}{2}$

43. $\frac{77}{60}$; $\frac{25}{12}$

45. 9

47.



Problemas 1.2

1. $\frac{33}{2}$; 1

3. $\frac{189}{256}$; $\frac{3}{4}$

5. $\frac{1}{4}(3 - \sqrt{2})\pi$; π

7. 5

9. $\int_{-2}^{4} \sqrt{9 + x^2}\, dx$

11. $\int_{0}^{2} (1 + x)\, dx$

13. -4

15. $\frac{5}{6}$

17. $-\frac{3}{4}$

21. 4

23. 12

25. -3

27. 40

29. $-\frac{28}{3}$

31. -32

33. $\frac{28}{3}$

35. 36

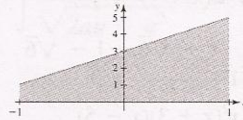
37. 0

39. 2.5

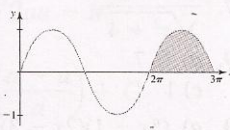
41. 11

43. *a*) -2.5 *b*) 3.9 *c*) -1.2 *d*) 1.4 *e*) 2.7 *f*) 0.2

45.



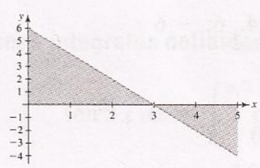
47.



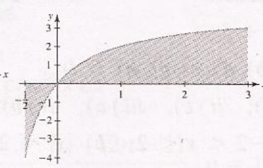
49. 18

51. $\frac{9}{4}\pi$

53.



55.



57. 15

59. $-\frac{\pi}{2}$

61. -2

63. $\frac{5}{2}$

69. $\geq$

Problemas 1.3

1. $3x + C$

3. $\frac{1}{6}x^6 + C$

5. $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

7. $t - \frac{25}{12}t^{0.48} + C$

9. $x^3 + x^2 - x + C$

11. $\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + C$

13. $\frac{16}{3}x^3 + 4x^2 + x + C$

15. $16w^4 - 16w^3 + 6w^2 - w + C$

17. $\ln|r| + 10r^{-1} - 2r^{-2} + C$

19. $-\frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{4}x^{-4} + C$

21. $-4\cos x - x - 2x^{-4} + C$

23. $-\cot x + \csc x + C$

25. $-2\cot x + 3x + C$

27. $4x^2 + x - 9e^x + C$

29. $x^2 - x + 5\tan^{-1} x + C$

31. $\tan x - x + C$

41. $x^2 - 4x + 5$

43. $2x^3 + 9x + C$

45. $-x^{-1} + C$

47. $x - x^2 - \cos x + C$

49. $y = x^2 - x + 1$

51. $f'(x) = x^2 + C_1$; $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$

53. $f(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$ **55.** G

57. $y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$

Problemas 1.4

1. $-\frac{1}{6}(1 - 4x)^{3/2} + C$ **3.** $-\frac{1}{10}(5x + 1)^{-2} + C$

5. $\frac{1}{3}(x^2 + 4)^{3/2} + C$ **7.** $\frac{1}{18}\operatorname{sen}^6 3x + C$

9. $\frac{1}{6}\tan^3 2x + C$ **11.** $-\frac{1}{4}\cos 4x + C$

13. $\frac{1}{3}(2t)^{3/2} - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6t + C$ **15.** $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

17. $\frac{1}{3}\tan x^3 + C$ **19.** $-2\csc\sqrt{x} + C$

21. $\frac{1}{7}\ln|7x + 3| + C$ **23.** $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$

25. $x - \ln|x + 1| + C$ **27.** $\ln|\ln x| + C$

29. $-\cos(\ln x) + C$ **31.** $\frac{1}{10}e^{10x} + C$

33. $-\frac{1}{6}e^{-2x^3} + C$ **35.** $-2e^{-\sqrt{x}} + C$

37. $\ln(e^x + e^{-x}) + C$ **39.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$

41. $\frac{1}{5}\tan^{-1} 5x + C$ **43.** $\tan^{-1} e^x + C$

45. $-2\sqrt{1 - x^2} - 3\operatorname{sen}^{-1} x + C$

47. $\frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 + C$ **49.** $-\frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$

51. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$ **53.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 8x + C$

55. $11x + 12\cos x - \operatorname{sen} 2x + C$ **57.** $-\frac{3}{4}(1 - x)^{4/3} + C$

59. $y = x + 2\cos 3x + 1 - \pi$

63. *b)* $\frac{1}{2}\pi\sqrt{L/g}$ *c)* $2\pi\sqrt{L/g}$

Problemas 1.5

1. 4 **3.** 12

5. 46 **7.** 1

9. $-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$ **11.** $\frac{2}{3}$

13. $e - e^{-1}$ **15.** $-\frac{2}{3}$

17. $-\frac{28}{3}$ **19.** $\frac{8}{3}$

21. $\frac{\pi}{12}$ **23.** $\frac{128}{3}$

25. 1 **27.** $\frac{65}{4}$

29. $\sqrt{6} - \sqrt{3}$ **31.** $\frac{1}{2}$

33. 1 **35.** $\frac{2}{3}$

37. $\frac{4\pi + 6}{(\pi + 2)(\pi + 3)}$ **39.** $\frac{3}{8} + \frac{1}{4\pi}$

41. $\frac{1}{2}\ln\frac{11}{3}$ **43.** xe^x

45. $(3t^2 - 2t)^6$ **47.** $6\sqrt{24x + 5}$

49. $\frac{2x}{x^6 + 1} - \frac{3}{27x^3 + 1}$

53. *a)* 0 *b)* $\ln 3$ *c)* $\frac{2}{3}$ *d)* $-\frac{4}{9}$

55. $\frac{19}{6}$ **57.** 9

59. $\frac{38}{3}$ **61.** 5

63. 22 **65.** 4

67. $\frac{1}{6}(1 + \ln 2)^6$ **69.** $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2}}\right)$

Competencia final de la unidad 1

A. 1. falso **3.** verdadero

5. verdadero **7.** verdadero

9. falso **11.** verdadero

13. falso **15.** verdadero

B. 1. $f(x)$ **3.** $\frac{\ln x}{x}$

5. $-f(g(x))g'(x)$ **7.** $\sum_{k=1}^{5}\frac{k}{2k + 1}$

9. $\int_5^{17}$ **11.** $\frac{5}{2}$

13. $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$; $\frac{16}{3}$ **15.** $2 + e^{-1} - e$; $e - e^{-1}$

C. 1. -6 **3.** $\frac{1}{505}(5t + 1)^{101} + C$

5. $\frac{1}{2}$ **7.** 0

9. $-\frac{1}{56}\cot^7 8x + C$ **11.** $\frac{1}{40}(4x^2 - 16x + 7)^5 + C$

13. $\frac{1}{2}(x^3 + 3x - 16)^{2/3} + C$ **15.** $\frac{1}{2}\ln 2$

17. $\frac{\pi}{6}$ **19.** $-\frac{1}{10}\ln|\cos 10x| + C$

21. 5 **23.** $\frac{11}{2}$

25. 0 **27.** $\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$

29. $\frac{1}{2}$

31. 156 lb; aproximadamente 20 min **33.** $\frac{51}{4}$

Problemas 2.1

1. $-\frac{5^{-5x}}{5\ln 5} + C$ **3.** $-2\cos\sqrt{1 + x} + C$

5. $-\frac{1}{4}\sqrt{25 - 4x^2} + C$ **7.** $\frac{1}{5}\sec^{-1}\left|\frac{2}{5}x\right| + C$

9. $\frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}x\right)+C$ **11.** $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{2x-5}{2x+5}\right|+C$

13. $\frac{1}{10}\ln|\text{sen}\,10x|+C$ **15.** $(3-5t)^{-1.2}+C$

17. $\frac{1}{3}\ln|\sec 3x+\tan 3x|+C$ **19.** $\frac{1}{2}(\text{sen}^{-1}x)^2+C$

21. $-\tan^{-1}(\cos x)+C$ **23.** $\frac{1}{4}\tanh x^4+C$

25. $\frac{1}{2}\sec 2x+C$ **27.** $\csc(\cos x)+C$

29. $\frac{1}{3}(1+\tan x)^3+C$ **31.** $\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$

Problemas 2.2

1. $\frac{1}{5}(x+1)^5-\frac{1}{4}(x+1)^4+C$

3. $\frac{4}{5}(x-5)^{5/2}+\frac{22}{3}(x-5)^{3/2}+C$

5. $\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+2(x-1)^{1/2}+C$

7. $\frac{2}{9}(3x-4)^{1/2}-\frac{26}{9}(3x-4)^{-1/2}+C$

9. $2\sqrt{x}-2\tan^{-1}\sqrt{x}+C$

11. $(\sqrt{t}+1)^2-10(\sqrt{t}+1)+8\ln(\sqrt{t}+1)+C$

13. $\frac{3}{10}(x^2+1)^{5/3}-\frac{3}{4}(x^2+1)^{2/3}+C$

15. $-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+C$

17. $2\sqrt{e^x-1}-2\tan^{-1}\sqrt{e^x-1}+C$

19. $\frac{4}{5}(1-\sqrt{v})^{5/2}-\frac{4}{3}(1-\sqrt{v})^{3/2}+C$

21. $\frac{4}{3}(1+\sqrt{t})^{3/2}+C$

23. $\ln(x^2+2x+5)+\frac{5}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

25. $-2\sqrt{16-6x-x^2}-\text{sen}^{-1}\left(\frac{x+3}{5}\right)+C$

27. $2x^{1/2}+3x^{1/3}+6x^{1/6}+6\ln|x^{1/6}-1|+C$

29. $\frac{506}{375}$ **31.** $6+20\ln\frac{11}{14}$

33. $\frac{177}{2}$ **35.** $\frac{1}{1\,326}$

37. $3+3\ln\frac{2}{3}$ **39.** $\frac{1}{168}$

43. $-\frac{3}{2}+3\ln 2$ **45.** $\frac{32\pi}{3}-4\pi\ln 3$

47. $\frac{232}{15}$

Problemas 2.3

1. $\frac{2}{3}x(x+3)^{3/2}-\frac{4}{15}(x+3)^{5/2}+C$

3. $x\ln 4x-x+C$ **5.** $\frac{1}{2}x^2\ln 2x-\frac{1}{4}x^2+C$

7. $-x^{-1}\ln x-x^{-1}+C$ **9.** $t(\ln t)^2-2t\ln t+2t+C$

11. $x\,\text{sen}^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C$ **13.** $\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+C$

15. $-\frac{1}{4}x^3e^{-4x}-\frac{3}{16}x^2e^{-4x}-\frac{3}{32}xe^{-4x}-\frac{3}{128}e^{-4x}+C$

17. $\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+C$ **19.** $\frac{1}{8}t\,\text{sen}\,8t+\frac{1}{64}\cos 8t+C$

21. $-x^2\cos x+2x\,\text{sen}\,x+2\cos x+C$

23. $\frac{1}{3}x^3\,\text{sen}\,3x+\frac{1}{3}x^2\cos 3x-\frac{2}{9}x\,\text{sen}\,3x-\frac{2}{27}\cos 3x+C$

25. $\frac{1}{17}e^x(\text{sen}\,4x-4\cos 4x)+C$ **27.** $\frac{1}{5}e^{-2\theta}(\text{sen}\,\theta-2\cos\theta)+C$

29. $\theta\sec\theta-\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$

31. $\frac{1}{3}\cos x\cos 2x+\frac{2}{3}\text{sen}\,x\,\text{sen}\,2x+C$

33. $\frac{1}{3}x^2(x^2+4)^{3/2}-\frac{2}{15}(x^2+4)^{5/2}+C$

35. $\frac{1}{2}x\,\text{sen}(\ln x)-\frac{1}{2}x\cos(\ln x)+C$

37. $-\frac{1}{2}\csc x\cot x+\frac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|+C$

39. $x\tan x+\ln|\cos x|+C$ **41.** $\frac{3}{2}\ln 3$

43. $-12e^{-2}+8e^{-1}$ **45.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

47. $3\ln 3+e^{-1}$

49. $5\pi(\ln 5)^2-10\pi\ln 5+8\pi$

51. $2\pi^2$ **53.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

55. $v(t)=-te^{-t}-e^{-t}+2;\quad s(t)=te^{-t}+2e^{-t}+2t-3$

57. $(124.8)\cdot\frac{8(\pi-2)}{\pi^2}\approx 115.48$ lb

59. $4\tan^{-1}2-\pi/2-\ln\frac{5}{2}$

61. $-2\sqrt{x+2}\cos\sqrt{x+2}+2\,\text{sen}\sqrt{x+2}+C$

67. $-\frac{1}{3}\text{sen}^2x\cos x-\frac{2}{3}\cos x+C$

69. $\frac{1}{30}\cos^2 10x\,\text{sen}\,10x+\frac{1}{15}\text{sen}\,10x+C$

73. $\frac{35\pi}{256}$ **83.** *b)* $\frac{17\pi}{4}$

Problemas 2.4

1. $\frac{2}{3}(\text{sen}\,x)^{3/2}+C$ **3.** $\text{sen}\,x-\frac{1}{3}\text{sen}^3x+C$

5. $-\cos t+\frac{2}{3}\cos^3t-\frac{1}{5}\cos^5t+C$ **7.** $\frac{1}{4}\text{sen}^4x-\frac{1}{6}\text{sen}^6x+C$

9. $\frac{3}{8}t-\frac{1}{4}\text{sen}\,2t+\frac{1}{32}\text{sen}\,4t+C$

11. $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\text{sen}\,4x+\frac{1}{48}\text{sen}^3 2x+C$

13. $\frac{3}{128}x-\frac{1}{128}\text{sen}\,4x+\frac{1}{1\,024}\text{sen}\,8x+C$

15. $\frac{1}{8}\tan^4 2t + \frac{1}{12}\tan^6 2t + C$

17. $\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x - \frac{1}{8}\sec x\tan x - \frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$

19. $\frac{2}{3}(\sec x)^{3/2} + 2(\sec x)^{-1/2} + C$ **21.** $\frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C$

23. $\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x + \frac{3}{8}\sec x\tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$

25. $\ln|\text{sen}\, x| + \frac{1}{2}\cos^2 x + C$

27. $-\frac{1}{11}\cot^{11} x - \frac{1}{13}\cot^{13} x + C$

29. $\frac{1}{7\tan^7(1-t)} + \frac{1}{5\tan^5(1-t)} + C$

31. $\frac{1}{2}\sec x\tan x + 2\sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$

33. $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$ **35.** $-\frac{1}{2}\csc^2 t - \ln|\text{sen}\, t| + C$

37. $\frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + C$ **39.** $-\frac{1}{2}\cos x^2 + \frac{1}{6}\cos^3 x^2 + C$

41. $\frac{25\sqrt{2}}{168}$ **43.** 0

45. $\frac{3}{4}$ **47.** $-\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C$

49. $\frac{1}{4}\text{sen}\, 2x - \frac{1}{12}\text{sen}\, 6x + C$ **51.** $\frac{5}{12}$

55. $\frac{16\pi}{3}$ **57.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

Problemas 2.5

1. $-\text{sen}^{-1} x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$ **3.** $\ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 36}}{6}\right| + C$

5. $\frac{1}{3}(x^2 + 7)^{3/2} + C$

7. $-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + \frac{1}{5}(1 - x^2)^{5/2} + C$

9. $-\frac{x}{4\sqrt{x^2 - 4}} + C$

11. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 4} + x}{2}\right| + C$

13. $\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C$

15. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{4 - \sqrt{16 - x^2}}{x}\right| + C$

17. $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}\right| + C$ **19.** $-\frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$

21. $\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

23. $\frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{x}{2(1 + x^2)} + C$

25. $\frac{x}{16\sqrt{4 + x^2}} - \frac{x^3}{48(4 + x^2)^{3/2}} + C$

27. $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 10} + x + 1}{3}\right| + C$

29. $\frac{1}{16}\tan^{-1}\left(\frac{x+3}{2}\right) + \frac{x + 3}{8(x^2 + 6x + 13)} + C$

31. $\frac{-5x - 1}{9\sqrt{5 - 4x - x^2}} + C$ **33.** $\ln(x^2 + 4x + 13) + C$

35. $x - 4\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + C$

37. $\frac{9}{2}\text{sen}^{-1}\left(\frac{x-3}{3}\right) + \frac{1}{2}(x - 3)\sqrt{9 - (x - 3)^2} + C$

39. $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$ **41.** $\frac{\sqrt{2}}{50}$

43. $2\sqrt{3} - \frac{172}{81}$

45. $\frac{1}{3}x^3\,\text{sen}^{-1} x + \frac{1}{3}\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{9}(1 - x^2)^{3/2} + C$

47. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{3}}\right)$ **51.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}\right)$

53. $12\pi\sqrt{2} - 4\pi\ln(\sqrt{2} + 1)$

55. $2 - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{6} - \sqrt{3})$

57. *b)* $y = -10\ln\left(\frac{10 - \sqrt{100 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{100 - x^2}$

59. $15.6\pi \approx 49.01$ lb

Problemas 2.6

1. $\frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1}$

3. $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2} + \frac{D}{(x + 2)^3}$

5. $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 3}$

7. $\frac{Ax + B}{x^2 + 9} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 9)^2}$

9. $-\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x - 2| + C$

11. $-2\ln|x| + \frac{5}{2}\ln|2x - 1| + C$

13. $\frac{5}{8}\ln|x - 4| + \frac{3}{8}\ln|x + 4| + C$

15. $-\frac{1}{6}\ln|2x + 1| + \frac{2}{3}\ln|x + 2| + C$

17. $6\ln|x| - \frac{7}{2}\ln|x + 1| - \frac{3}{2}\ln|x - 1| + C$

19. $\frac{1}{2}\ln|x + 1| - \ln|x + 2| + \frac{1}{2}\ln|x + 3| + C$

21. $-2\ln|t| - t^{-1} + 6\ln|t - 1| + C$

23. $\ln|x| - \ln|x + 1| + (x + 1)^{-1} + C$

25. $-2(x + 1)^{-1} + \frac{3}{2}(x + 1)^{-2} + C$

27. $-\frac{1}{32}\ln|x + 1| - \frac{1}{16}(x + 1)^{-1} + \frac{1}{32}\ln|x + 5| - \frac{1}{16}(x + 5)^{-1} + C$

29. $-\frac{19}{16}\ln|x| - \frac{19}{8}x^{-1} + \frac{11}{8}x^{-2} - \frac{3}{2}x^{-3} + \frac{35}{16}\ln|x + 2| + C$

31. $-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x + C$

33. $\frac{1}{2}(x+1)^{-1} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$

35. $\frac{1}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

37. $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

39. $5\ln|x+1| - \ln(x^2+2x+2) - 7\tan^{-1}(x+1) + C$

41. $\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

43. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{11}{16}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5x+12}{8(x^2+4)} + C$

45. $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 6x - 10\ln|x+1| - 8(x+1)^{-1} + C$

47. $-\frac{1}{2}\ln 3$ **49.** $2\ln\frac{5}{3} - \frac{14}{15}$

51. $\frac{1}{6}\ln\frac{8}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + C$ **53.** 0

55. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + C$

57. $3(x+1)^{1/3} + \ln|(x+1)^{1/3} - 1| -$
$\frac{1}{2}\ln|(x+1)^{2/3} + (x+1)^{1/3} + 1| - \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2(x+1)^{1/3}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

59. $\frac{1}{4}\ln\frac{15}{7} \approx 0.191$

61. $7\ln 2 - 8\ln 3 + 3\ln 4 \approx 0.222$

63. $8\pi\ln\frac{2}{3} + \frac{11\pi}{3} \approx 1.329$

65. $8\pi\ln 2 - 4\pi \approx 4.854$

Problemas 2.7

1. 78; $M_3 = 77.25$ **3.** 22; $T_3 = 22.5$

5. 1.7564; 1.8667 **7.** 1.1475; 1.1484

9. 0.4393; 0.4228 **11.** 0.4470; 0.4900

13. $\frac{26}{3}$; $S_4 = 8.6611$ **15.** 1.6222

17. 0.7854 **19.** 0.4339

21. 11.1053 **23.** $n \geq 8$

25. 1.11

27. la regla de Simpson: $n \geq 26$; la regla trapezoidal: $n \geq 366$

29. la regla trapezoidal resulta en 1.10

31. para $n = 2$ y $n = 4$, la regla del punto medio proporciona el valor exacto del entero: 36

33. *a*) $\frac{2}{3}$ *b*) $M_8 = \frac{21}{22}$ *c*) $T_8 = \frac{11}{16}$

d) $E_8 = \frac{1}{96}$ para la regla del punto medio y $E_8 = \frac{1}{48}$ para la regla trapezoidal. El error de la regla del punto medio es la mitad del error de la regla trapezoidal.

37. 7.0667 **39.** aproximadamente 4 975 gal

41. 41.4028 **43.** *b*) 1.2460

45. 1.4804 **47.** 14.9772

Competencia final de la unidad 2

A. 1. verdadero **3.** verdadero

5. verdadero **7.** falso

9. falso

B. 1. $2\sqrt{x} - 18\ln(\sqrt{x}+9) + C$

3. $(x^2+4)^{1/2} + C$

5. $\frac{3}{256}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{32(x^2+4)} + \frac{x}{32(x^2+4)^2} - \frac{x^3}{128(x^2+4)^2} + C$

7. $x - \frac{4}{x} + C$

9. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{5}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

11. $\frac{1}{10}(\ln x)^{10} + C$

13. $\frac{1}{2}t^2\operatorname{sen}^{-1}t - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}t + \frac{1}{4}t\sqrt{1-t^2} + C$

15. $\frac{1}{5}(x+1)^5 - \frac{3}{4}(x+1)^4 + C$

17. $x\ln(x^2+4) - 2x + 4\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

19. $-\frac{2}{125}\ln|x| - \frac{1}{25}x^{-1} + \frac{2}{125}\ln|x+5| - \frac{1}{25}(x+5)^{-1} + C$

21. $-\frac{1}{12}\ln|x+3| - \frac{1}{2}(x+3)^{-1} + \frac{1}{12}\ln|x-3| + C$

23. $\tan t - t + C$ **25.** $\frac{1}{13}\tan^{13}t + \frac{1}{11}\tan^{11}t + C$

27. $y\operatorname{sen}y + \cos y + C$ **29.** $\operatorname{sen}t - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 t + C$

31. $\frac{1}{6}(1+e^w)^6 + C$

33. $-\frac{1}{8}\csc^2 4x - \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen}4x| + C$

35. $\frac{1}{4}$ **37.** $\sec x - \tan x + x + C$

39. $\frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$ **41.** $\frac{1}{10}e^x(\cos 3x + 3\operatorname{sen}3x) + C$

43. $\frac{1}{2}t\cos(\ln t) + \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(\ln t) + C$

45. $2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$

47. $-\frac{2}{3}\cos^3 x + C$

49. $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}{2}\right| + C$

51. $\frac{1}{7}\tan^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

53. $\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$

55. $\frac{5}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x - \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1} + C$

57. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\operatorname{sen}2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$

59. $2(\operatorname{sen}x)e^{\operatorname{sen}x} - 2e^{\operatorname{sen}x} + C$ **61.** $\sqrt{6} - 2$

63. $t\operatorname{senh}^{-1}t - \sqrt{t^2+1} + C$ **65.** $\ln\frac{3}{2}$

67. $\frac{1}{39}\tan^{13}3u + \frac{1}{45}\tan^{15}3u + C$

69. $3 \tan x + \sec x + C$

71. $\frac{1}{2}x^2(1 + \ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2(1 + \ln x) + \frac{1}{4}x^2 + C$

73. $e^{e^x} + C$ **75.** $t^2 - \ln(1 + e^{t^2}) + C$

77. $\frac{1}{5}\ \text{sen}^{-1}(5x + 2) + C$ **79.** $(\text{sen}\, x)\ln|\text{sen}\, x| - \text{sen}\, x + C$

Problemas 3.1

1. $s(t) = 6t - 7$

3. $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 15$

5. $s(t) = -\frac{5}{2}\,\text{sen}\,(4t + \pi/6) + \frac{5}{2}$

7. $v(t) = -5t + 9;\quad s(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 9t - \frac{9}{2}$

9. $v(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 3;\ s(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 3t + 10$

11. $v(t) = \frac{21}{4}t^{4/3} - t - 26;\quad s(t) = \frac{9}{4}t^{7/3} - \frac{1}{2}t^2 - 26t - 48$

13. 17 cm **15.** 34 cm

17. 24 cm **19.** $\frac{1}{30}$ mi = 176 pies

21. 256 pies **23.** 30.625 m

25. 400 pies; 6 s **27.** −80 pies/s

Problemas 3.2

1. $\frac{4}{3}$ **3.** $\frac{81}{4}$

5. $\frac{9}{2}$ **7.** $\frac{11}{2}$

9. $\frac{11}{4}$ **11.** $\frac{11}{6}$

13. 2 **15.** $\frac{3}{4}(2^{4/3} + 3^{4/3})$

17. 4 **19.** 2π

21. $\frac{7}{3}$ **23.** $\frac{27}{2}$

25. $\frac{32}{3}$ **27.** $\frac{81}{4}$

29. 4 **31.** $\frac{10}{3}$

33. $\frac{64}{3}$ **35.** $\frac{128}{5}$

37. $\frac{118}{3}$ **39.** 22

41. $\frac{9}{2}$ **43.** $\frac{8}{3}$

45. 8 **47.** $2\sqrt{2} - 2$

49. $4\sqrt{3} - 4\pi/3$ **53.** $7 + 3\ln\frac{3}{4} \approx 6.1370$

55. $9\pi/4$ **57.** $4 + 2\pi$

59. πab **61.** $\frac{52}{3}$

63. $A = \int_0^{\ln \frac{3}{2}} (e^x - 1)\,dx + \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} (2 - e^x)\,dx,$

$A = \int_1^2 \left[\ln y - \ln \frac{1}{2}(y + 1)\right] dy;\quad \ln\frac{32}{27} \approx 0.1699$

Problemas 3.3

1. $\frac{256\sqrt{3}}{3}$ **3.** 128

5. $10\pi/3$ **7.** 9

9. $\pi/2$ **11.** $4\pi/5$

13. $\pi/6$ **15.** $1\,296\pi/5$

17. $\pi/2$ **19.** $32\pi/5$

21. 32π **23.** $7\pi/3$

25. $256\pi/15$ **27.** $3\pi/5$

29. 36π **31.** $500\pi/3$

33. $16\pi/105$ **35.** $\pi\left(2e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}\right)$

37. π^2 **39.** $\frac{1}{4}(4\pi - \pi^2)$

Problemas 3.4

1. $4\pi/5$ **3.** $\pi/6$

5. $8\pi/15$ **7.** $250\pi/3$

9. $36\sqrt{3}\pi/5$ **11.** $3\pi/2$

13. 16π **15.** $8\pi/5$

17. $21\pi/10$ **19.** $\pi/6$

21. $243\pi/10$ **23.** 4π

25. $625\pi/6$ **27.** $248\pi/15$

29. $\frac{1}{2}(\pi^2 - 2\pi)$ **31.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

33. $\frac{4}{3}\pi r^3$ **35.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$

37. $V = \pi r^2 h - \frac{\pi\omega^2 r^4}{4g}$

Problemas 3.5

1. $2\sqrt{2}$ **3.** $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8) \approx 1.4397$

5. 45 **7.** $\frac{10}{3}$

9. $\frac{4\,685}{288} \approx 16.2674$ **11.** 9

13. $\int_{-1}^{3} \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$ **15.** $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$

17. $\frac{1}{27}(40^{3/2} - 8) \approx 9.0734$ **19.** *b*) 6

21. $\pi/2$

Problemas 3.6

1. $208\pi/3$ **3.** $\frac{\pi}{27}(10^{3/2} - 1) \approx 3.5631$

5. $\frac{\pi}{6}(37^{3/2} - 1) \approx 117.3187$
7. $100\sqrt{5}\pi$
9. $253\pi/20$
11. *a*) $(\pi r/6h^2)\left[(r^2 + 4h^2)^{3/2} - r^3\right]$
b) aproximadamente $0.99\% < 1\%$
13. $20\sqrt{2}\pi$

Problemas 3.7

1. -4
3. $\frac{34}{3}$
5. 3
7. 0
9. 2
11. $\frac{61}{9}$
13. 24
15. $\frac{1}{12}$
17. 0
19. $3\sqrt{3}/\pi$
21. $-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 0.1547$
23. 12
25. 103°
29. $2kt_1/3$

Problemas 3.8

1. 3 300 pies-lb
3. $\frac{2}{5}$pies
5. *a*) 10 joules *b*) 27.5 joules
7. *a*) 7.5 pies-lb *b*) 37.5 pies-lb
9. 453.1×10^8 joules
11. 127 030.9 pies-lb
13. 45 741.6 pies-lb
15. 57 408 pies-lb
17. 64 000 pies-lb
19. *a*) 5 200 pies-lb *b*) 6 256.25 pies-lb
21. $3k/4$, donde k es la constante de proporcionalidad

Problemas 3.9

1. *a*) 196 000 N/m^2; $4\,900\,000\pi$N
b) 196 000 N/m^2; $784\,000\pi$N
c) 196 000 N/m^2; $19\,600\,000\pi$N
3. *a*) 499.2 lb/pie^2; 244 640 lb *b*) 59 904 lb; 29 952 lb
5. 129.59 lb
7. 1 280 lb
9. 3 660.8 lb
11. 13 977.6 lb
13. $9\,984\pi$ lb
15. 5 990.4 lb

Problemas 3.10

1. $-\frac{2}{7}$
3. $-\frac{13}{30}$
5. 1
7. $\frac{115}{36}$
9. $\frac{4}{7}$
11. $\frac{19}{15}$
13. $\frac{11}{10}$
15. $\frac{15}{2}$
17. $\bar{x} = -\frac{2}{7}$, $\bar{y} = \frac{17}{7}$
19. $\bar{x} = \frac{17}{11}$, $\bar{y} = \frac{20}{11}$
21. $\bar{x} = \frac{10}{9}$, $\bar{y} = \frac{28}{9}$
23. $\bar{x} = \frac{3}{4}$, $\bar{y} = \frac{3}{10}$
25. $\bar{x} = \frac{12}{5}$, $\bar{y} = \frac{54}{7}$
27. $\bar{x} = \frac{93}{35}$, $\bar{y} = \frac{45}{56}$
29. $\bar{x} = \frac{1}{2}$, $\bar{y} = \frac{8}{5}$
31. $\bar{x} = \frac{16}{35}$, $\bar{y} = \frac{16}{35}$
33. $\bar{x} = \frac{3}{2}$, $\bar{y} = \frac{121}{540}$
35. $\bar{x} = -\frac{7}{10}$, $\bar{y} = \frac{7}{8}$
37. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 2$
39. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{1}{8}(\pi + 8)$

Competencia final de la unidad 3

A. 1. falso
3. verdadero
5. verdadero
7. verdadero
9. verdadero
11. falso

B. 1. joule
3. 2 500 pies-lb
5. 6
7. suave

C. 1. $-\int_0^a f(x)\,dx$
3. $\int_0^a \left[f(x) - \frac{f(a)}{a}x \right] dx$
5. $-\int_a^b 2f(x)\,dx + \int_b^c 2f(x)\,dx$
7. $\int_b^c [a - f(y)]\,dy + \int_c^d [f(y) - a]\,dy$
9. $\frac{1}{4}a^2 + b^2$
11. $\bar{x} = \dfrac{\int_0^2 x\,[f(x) - g(x)]\,dx}{\int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx}$, $\bar{y} = \dfrac{\frac{1}{2}\int_0^2 \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx}{\int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx}$
13. $2\pi\int_0^2 x[f(x) - g(x)]\,dx$
15. $2\pi\int_0^2 (2 - x)[f(x) - g(x)]\,dx$
17. $\frac{5}{2}$
19. *a*) 4 *b*) π
21. $\frac{315\sqrt{41}}{16}\pi$ pies$^2 \approx 396.03$ pies^2
23. $\frac{256}{45}$
25. 37.5 joules
27. 624 000 pies-lb
29. 2 040 pies-lb
31. 691 612.83 pies-lb
33. $\frac{1}{27}(40^{3/2} - 8) \approx 9.07$
35. 17 066.7 N
37. $\frac{3}{4}$ m desde la izquierda sobre la barra de 1 m y $\frac{6}{5}$ m desde la izquierda en la barra de 2 m

Problemas 4.1

1. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$
3. $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
5. 10, 100, 1 000, 10 000, . . .
7. 2, 4, 12, 48, …
9. $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \ldots$
15. 0
17. 0
19. $\frac{1}{2}$
21. la secuencia diverge
23. la secuencia diverge
25. 0

27. 0

29. la sucesión diverge

31. 0

33. $\frac{5}{7}$

35. 1

37. 6

39. 1

41. 1

43. $\ln \frac{4}{3}$

45. 0

47. $\left\{\frac{2n}{2n-1}\right\}$, converge a 1

49. $\{(-1)^{n+1}(2n+1)\}$, diverge

51. $\left\{\frac{2}{3^{n-1}}\right\}$, converge a 0

53. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

55. $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$

57. 8

59. $a_{n+1} = \frac{5}{n+1}a_n,\ a_1 = 5$

61. converge a 0

63. converge a 0

67. $\frac{40}{9}$ pie; $15\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pies

69. 15, 18, 18.6, 18.72, 18.744, 18.7488, …

71. 32

Problemas 4.2

1. creciente

3. no monótona

5. creciente

7. no creciente

9. creciente

11. no monótona

13. acotada y creciente

15. acotada y creciente

17. acotada y decreciente

19. acotada y decreciente

21. acotada y creciente

23. acotada y decreciente

25. 10

27. 7

Problemas 4.3

1. $3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + +\frac{9}{4} + \cdots$

3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \cdots$

5. $1 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \cdots$

7. $2 + \frac{8}{3} + \frac{16}{5} + \frac{128}{35} + \cdots$

9. $-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots$

11. 1

13. $\frac{1}{2}$

15. $\frac{15}{4}$

17. $\frac{2}{3}$

19. diverge

21. 9 000

23. diverge

25. $\frac{2}{9}$

27. $\frac{61}{99}$

29. $\frac{1\,313}{999}$

31. $\frac{17}{6}$

43. $-2 < x < 2$

45. $-2 < x < 0$

47. 75 pies

49. $\frac{N_0}{1-s}$; 1 000

51. 18.75 mg

Problemas 4.4

1. converge

3. converge

5. diverge

7. converge

9. converge

11. converge

13. diverge

15. converge

17. converge

19. diverge

21. converge

23. diverge

25. converge

27. converge

29. converge

31. diverge

33. converge

35. converge para $p > 1$, diverge para $p \leq 1$

Problemas 4.5

1. converge

3. diverge

5. diverge

7. diverge

9. converge

11. converge

13. converge

15. diverge

17. converge

19. converge

21. converge

23. converge

25. diverge

27. converge

29. diverge

31. diverge

33. converge

35. diverge

37. converge

39. diverge

Problemas 4.6

1. converge

3. diverge

5. converge

7. diverge

9. converge

11. converge

13. converge

15. diverge

17. converge

19. diverge

21. converge

23. converge

25. diverge

27. converge

29. diverge

31. converge

33. converge para $0 \leq p < 1$

35. converge para todos los valores reales de p

39. utilice la prueba del cociente

Problemas 4.7

1. converge

3. diverge

5. converge

7. converge

9. converge

11. converge

13. diverge

15. condicionalmente convergente

17. absolutamente convergente

19. absolutamente convergente

21. absolutamente convergente

23. divergente

25. condicionalmente convergente

27. divergente

29. condicionalmente convergente

31. absolutamente convergente

33. divergente

35. 0.84147

37. 5 **39.** 0.9492

41. menor que $\frac{1}{101} \approx 0.009901$

43. la serie contiene signos algebraicos mixtos pero los signos no se alternan; converge

45. los signos algebraicos no se alternan; converge

47. $a_{k+1} \leq a_k$ no se satisface para k suficientemente grande. La sucesión de las sumas parciales $\{S_{2n}\}$ es la misma que la sucesión de las sumas parciales para la serie armónica. Lo anterior implica que la serie diverge.

49. diverge **51.** converge

Problemas 4.8

1. $(-1, 1]$; 1 **3.** $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\frac{1}{2}$

5. $[2, 4]$; 1 **7.** $(-5, 15)$; 10

9. $\{0\}$; 0 **11.** $\left[0, \frac{2}{3}\right]$; $\frac{1}{3}$

13. $[-1, 1)$; 1 **15.** $(-16, 2)$; 9

17. $\left(-\frac{75}{32}, \frac{75}{32}\right)$; $\frac{75}{32}$ **19.** $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$; $\frac{1}{3}$

21. $(-\infty, \infty)$; ∞ **23.** $(-3, N)$; 3

25. $(-\infty, \infty)$; ∞ **27.** $\left(-\frac{15}{4}, -\frac{9}{4}\right)$; $\frac{3}{4}$

29. 4 **31.** $x > 1$ o $x < -1$

33. $x < -\frac{1}{2}$ **35.** $-2 < x < 2$

37. $x < 0$

39. $0 \leq x < \pi/3, 2\pi/3 < x < 4\pi/3, 5\pi/3 < x \leq 2\pi$

41. *a)* $(-\infty, \infty)$

Problemas 4.9

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^{k+1}}$; $(-3, 3)$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k x^k$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$; $(-1, 1)$ **7.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} x^{2k}$; $(-2, 2)$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^{k+1}} x^{k-1}$; $(-3, 3)$

11. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k(k-1)2^{k-3}}{5^{k+1}} x^{k-2}$; $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{2k-1}$; $(-1, 1)$

15. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$; $[-1, 1]$

17. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{2k+2}$; $[-1, 1]$

19. $\ln 4 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)4^{k+1}} x^{k+1}$; $(-4, 4]$

21. $1 + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2x)^k$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

23. $\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k(k-1) x^k$; $(-1, 1)$

25. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{2k+3}$; $[-1, 1]$

27. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} x^{2k+2}$; $[-1, 1]$

29. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{5^{k+1}} (x-6)^k$; $(1, 11)$

31. $-1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x+1)^{k+1}$; $(-2, 0)$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{4^k} - \left\{\frac{1}{3^k}\right\}\right] x^k$; $(-3, 3)$

35. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \cdots$ **37.** $(-3, 3]$

39. 0.0953 **41.** 0.4854

43. 0.0088

Problemas 4.10

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^{k+1}}$ **3.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ **7.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

11. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$

13. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^{k+1}} (x-4)^k$ **15.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$

17. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots$

19. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$

21. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!} (x-1)^k$

23. $\ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k2^k} (x-2)^k$ **25.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}$

27. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k+1}$ **29.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k} x^k$

31. $1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + \cdots$ **33.** 6

35. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

37. $1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + \cdots$

39. $1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots$

43. $\frac{\pi}{4}$ **45.** -1

47. 0.71934; cuatro lugares decimales

49. 1.34983; cuatro lugares decimales

55. *c)* $y = 7.92$ pulg *d)* $y = 7.92000021$ pulg

Problemas 4.11

1. $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}x^3 - \cdots;\quad 1$

3. $3 - \frac{3}{2 \cdot 9}x - \frac{3 \cdot 1}{2^2 \cdot 2! \cdot 9^2}x^2 - \frac{3 \cdot 1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3! \cdot 9^3}x^3 - \cdots;\quad 9$

5. $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \cdots;\quad 1$

7. $8 + \frac{8 \cdot 3}{2 \cdot 4}x + \frac{8 \cdot 3 \cdot 1}{2^2 \cdot 2! \cdot 4^2}x^2 - \frac{8 \cdot 3 \cdot 1}{2^3 \cdot 3! \cdot 4^3}x^3 + \cdots;\quad 4$

9. $\frac{1}{4}x - \frac{2}{4 \cdot 2}x^2 + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 2! \cdot 2^2}x^3 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 3! \cdot 2^3}x^4 + \cdots;\quad 2$

11. $|S_2 - S| < a_3 = \frac{1}{9}x^2$

13. $x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1}$

17. $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

19. $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^2}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{2^4 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 3}{2^6 \cdot 3!}(x-1)^3 - \cdots$

Competencia final de la unidad 4

A. 1. falso **3.** falso
5. verdadero **7.** falso
9. verdadero **11.** falso
13. verdadero **15.** falso
17. verdadero **19.** falso
21. falso **23.** falso
25. falso **27.** verdadero
29. verdadero

B. 1. 20; 9; $\frac{4}{5}$; 16 **3.** 4
5. $n/9$; 22/9 **7.** e^x
9. $x < -5$ o $x > 5$ **11.** $(-1, 1]$

C. 1. converge **3.** converge
5. converge **7.** diverge
9. diverge **11.** converge
13. $\frac{61\,004}{201}$ **15.** $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$
17. $\{-5\}$ **19.** $\frac{4}{3}$
21. $\frac{1}{\alpha - 1}$ **23.** $1 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{2}{9}x^{10} - \cdots$
25. $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \cdots$
27. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}(x - \pi/2)^{2k+1}$ **29.** \$6 millones

Problemas apéndice

1. $\frac{1}{81}$ **3.** diverge
5. $\frac{1}{2}e^6$ **7.** diverge
9. $\frac{1}{2}$ **11.** 0
13. $-\frac{1}{18}$ **15.** $3e^{-2}$
17. 1 **19.** $\frac{\pi}{2}$
21. $\frac{1}{2}$ **23.** 4
25. ln 2 **27.** $\frac{1}{4} \ln \frac{7}{3}$
29. $\frac{1}{21}$ **31.** diverge
33. 100 **35.** $2\sqrt{2}$
37. diverge **39.** 6
41. $-\frac{1}{4}$ **43.** diverge
45. diverge **47.** $-\frac{4}{3}$
49. $\frac{\pi}{4}$ **51.** $\frac{\pi}{2}$
53. $\frac{\pi}{6}$ **55.** $\frac{1}{6}$
57. 2 **59.** 8
61. $\frac{1}{2} \ln 2$ **63.** 2.86×10^{10} joules
65. $\frac{1}{s}, s > 0$ **67.** $\frac{1}{s-1}, s > 1$
69. $\frac{1}{s^2+1}, s > 0$ **71.** $\frac{e^{-s}}{s}, s > 0$

Competencia final (apéndice)

A. 1. verdadero **3.** verdadero
5. falso **7.** verdadero
9. falso

B. 1. $\frac{1}{5}$ **3.** $\sqrt{\pi}$
5. $\ln \sqrt{2}$

C. 1. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$ **3.** 0
5. diverge **7.** 0
9. diverge **11.** $2 - 2e^{-1}$
15. $\frac{1}{2}$ **17.** $\frac{2}{3}$
19. *a*) 2π *b*) las áreas son infinitas
21. 126 joules

Repaso de álgebra

Enteros

$\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Enteros positivos (números naturales)

$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Enteros no negativos (números enteros)

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Números racionales

Un número racional es un número en la forma p/q, donde p y $q \neq 0$ son enteros.

Números irracionales

Un número irracional es un número que no puede escribirse en la forma p/q, donde p y $q \neq 0$ son enteros.

Números reales

El conjunto R de números reales es la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales.

Leyes de exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a^0 = 1, a \neq 0$$

Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \; n > 0$$

Radical

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, $n > 0$ un entero

Exponentes racionales y radicales

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Fórmula cuadrática

Las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Expansiones binomiales

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Triángulo de Pascal

Los coeficientes en la expansión de $(a + b)^n$ siguen el patrón:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ \vdots \end{array}$$

Cada número en el interior de este arreglo es la suma de los dos números directamente arriba del mismo:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ \searrow\swarrow\searrow\swarrow\searrow\swarrow\searrow\swarrow \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

El último renglón son los coeficientes en la expansión de $(a + b)^5$.

Fórmulas de factorización

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

Definición del valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es no negativo } (a \geq 0) \\ -a & \text{si } a \text{ es negativo } (a < 0) \end{cases}$$

Propiedades de desigualdades

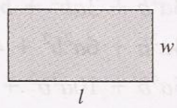
Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
Si $a < b$, entonces $ac < bc$ para $c > 0$.
Si $a < b$, entonces $ac > bc$ para $c < 0$.

Fórmulas de geometría

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

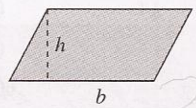
Área A, circunferencia C, volumen V, área superficial S

RECTÁNGULO



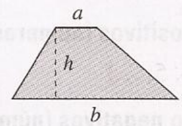
$A = lw,\ \ C = 2l + 2w$

PARALELOGRAMO



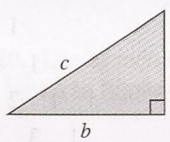
$A = bh$

TRAPEZOIDE



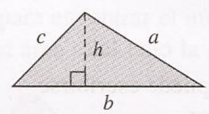
$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



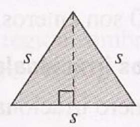
Teorema de Pitágoras:
$c^2 = a^2 + b^2$

TRIÁNGULO



$A = \frac{1}{2}bh,\ \ C = a + b + c$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO

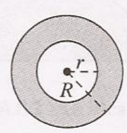


$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s,\ \ A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

CÍRCULO

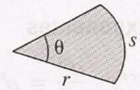
$A = \pi r^2,\ \ C = 2\pi r$

ANILLO CIRCULAR



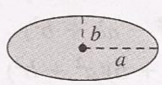
$A = \pi(R^2 - r^2)$

SECTOR CIRCULAR



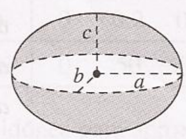
$A = \frac{1}{2}r^2\theta,\ \ s = r\theta$

ELIPSE



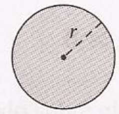
$A = \pi ab$

ELIPSOIDE



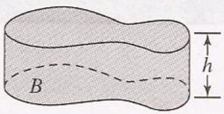
$V = \frac{4}{3}\pi abc$

ESFERA



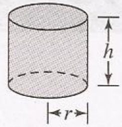
$V = \frac{4}{3}\pi r^3,\ \ S = 4\pi r^2$

CILINDRO RECTO



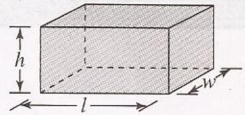
$V = Bh$, B, área de la base

CILINDRO CIRCULAR RECTO



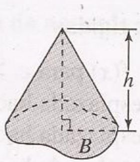
$V = \pi r^2 h$, $S = 2\pi r h$ (lado lateral)

PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR



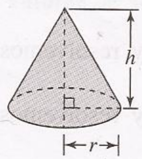
$V = lwh$, $S = 2(hl + lw + hw)$

CONO



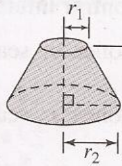
$V = \frac{1}{3}Bh$, B, área de la base

CONO CIRCULAR RECTO



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

FRUSTO DE UN CONO



$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Gráficas y funciones

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Para encontrar intersecciones

Intersecciones y: sea $x = 0$ en la ecuación y resolvemos para y
Intersecciones x: sea $y = 0$ en la ecuación y resolvemos para x

Funciones de polinomios

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo.

Función lineal

$$f(x) = ax + b, a \neq 0$$

La gráfica de una función lineal es una recta.

Formas de ecuaciones de rectas:

Punto pendiente: $y - x_0 = m(x - x_0)$,
Pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$,

donde m es la pendiente.

Función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

La gráfica de una función cuadrática es una parábola.

Vértice (h, k) de una parábola

Complete el cuadrado en x para $f(x) = ax^2 + bx + c$ para obtener $f(x) = a(x - h)^2 + k$. De manera alterna, calcule las coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Funciones par e impar

Par: $f(-x) = f(x)$; simetría de la gráfica: el eje y
Impar: $f(-x) = -f(x)$; simetría de la gráfica: el origen

Transformaciones rígidas

La gráfica de $y = f(x)$ para $c > 0$:
$y = f(x) + c$, desplazada hacia arriba c unidades
$y = f(x) - c$, desplazada hacia abajo c unidades
$y = f(x + c)$, desplazada hacia la izquierda c unidades
$y = f(x - c)$, desplazada hacia la derecha c unidades
$y = f(-x)$, reflexión sobre el eje y
$y = -f(x)$, reflexión sobre el eje x

Función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.

Asíntotas

Si las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ no tienen ningún factor en común, entonces la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

tiene una

asíntota vertical:
$x = a$ cuando $q(a) = 0$,
asíntota horizontal:
$y = a_n/b_m$ cuando $n = m$ y $y = 0$ cuando $n < m$,
asíntota oblicua:
$y = ax + b$ cuando $n = m + 1$.

La gráfica no tiene una asíntota horizontal cuando $n > m$. Una asíntota oblicua se encuentra mediante una división.

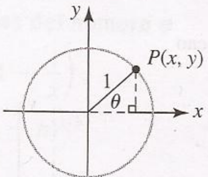
Función potencia

$$f(x) = x^n,$$

donde n es cualquier número real.

Revisión de trigonometría

Definición de seno y coseno de acuerdo con el círculo unitario



$$y = \operatorname{sen}\theta$$
$$x = \cos\theta$$

Otras funciones trigonométricas

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

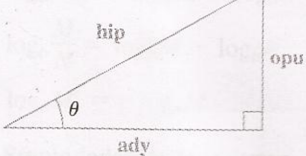
$$\sec\theta = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

Fórmulas de conversión

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

Definición de seno y coseno de acuerdo con el triángulo recto



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opu}}{\text{hip}}$$

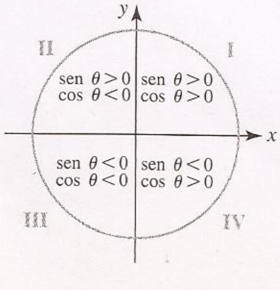
$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$$

Otras funciones trigonométricas

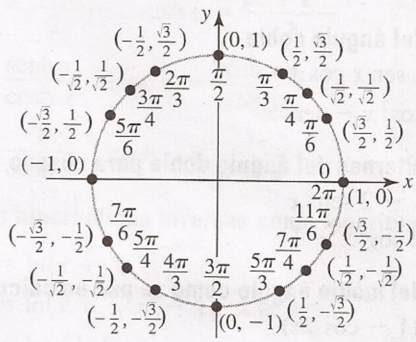
$$\tan\theta = \frac{\text{opu}}{\text{ady}}, \quad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{opu}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}, \quad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{opu}}$$

Signos de seno y coseno



Valores de seno y coseno para ángulos especiales



Límites para las funciones seno y coseno

$$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \quad \text{y} \quad -1 \le \cos x \le 1$$

Periodicidad de las funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$
$$\sec(x + 2\pi) = \sec x, \quad \csc(x + 2\pi) = \csc x$$
$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Identidades de cofunción

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

= (csc2-1)

Identidades par/impar

Par	Impar
$\cos(-x) = \cos x$	$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\cot(-x) = -\cot x$

Fórmulas de suma

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

Fórmulas de diferencia

$$\operatorname{sen}(x_1 - x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2}$$

Fórmulas del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Fórmulas alternas del ángulo doble para coseno

$$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Fórmulas del medio ángulo como se usa en cálculo

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Leyes de los senos

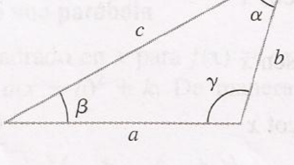
$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Leyes de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



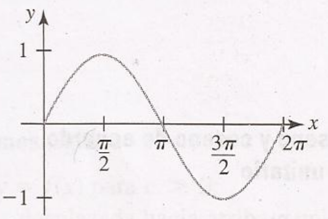
Funciones trigonométricas inversas

$y = \operatorname{sen}^{-1} x$ si y sólo si $x = \operatorname{sen} y, \quad -\pi/2 \le y \le \pi/2$

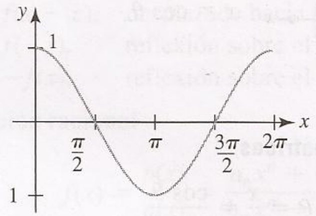
$y = \cos^{-1} x$ si y sólo si $x = \cos y, \quad 0 \le y \le \pi$

$y = \tan^{-1} x$ si y sólo si $x = \tan y, \quad -\pi/2 < y < \pi/2$

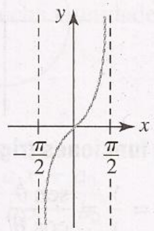
Ciclos para seno, coseno y tangente



seno



coseno



tangente

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Funciones exponencial y logarítmica

El número e

$e = 2.718281828459...$

Definiciones del número e

$$e = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e = \lim_{h \to 0}(1 + h)^{1/h}$$

Función exponencial

$f(x) = b^x,\ b > 0, b \neq 1$

Función exponencial natural

$f(x) = e^x$

Función logarítmica

$f(x) = \log_b x, \quad x > 0$

donde $y = \log_b x$ es equivalente a $x = b^y$

Función logarítmica natural

$f(x) = \log_e x = \ln x, \quad x > 0$

donde $y = \ln x$ es equivalente a $x = e^y$

Leyes de logaritmos

$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

$\log_b \dfrac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

$\log_b M^c = c \log_b M$

Propiedades de logaritmos

$\log_b b = 1, \qquad \log_b 1 = 0$

$\log_b b^x = x, \qquad b^{\log_b x} = x$

Cambio de la base b a la base e

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

Funciones hiperbólicas inversas como logaritmos

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),\ x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right),\ |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right),\ |x| > 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right),\ 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right),\ x \neq 0$$

Identidades par/impar

Par	Impar
$\cosh(-x) = \cosh x$	$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

Identidades adicionales

$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

$\operatorname{senh}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{senh} x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \operatorname{senh} x_2$

$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \operatorname{senh} x_1 \operatorname{senh} x_2$

$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

$\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(-1 + \cosh 2x)$

$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Diferenciación

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Reglas

1. Constante: $\frac{d}{dx}c = 0$

2. Múltiplo constante: $\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x)$

3. Suma: $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

4. Producto: $\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

5. Cociente: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

6. Cadena: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

7. Potencia: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

8. Potencia: $\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$

Funciones

Trigonométricas:

9. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

10. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$

11. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

12. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

13. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

14. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

Trigonométricas inversas:

15. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

17. $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

18. $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2}$

19. $\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

20. $\frac{d}{dx}\csc^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Hiperbólicas:

21. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$

22. $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$

23. $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

24. $\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

25. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

26. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

Hiperbólicas inversas:

27. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

28. $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

29. $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$

30. $\frac{d}{dx}\coth^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$

31. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

32. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

Exponenciales:

33. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

34. $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$

Logarítmicas:

35. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$

36. $\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x(\ln b)}$

Fórmulas de integración

Formas básicas

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C,\ n \neq -1$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u\,du = e^u + C$

5. $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$

6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

17. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

19. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

20. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Formas que implican $\sqrt{a^2+u^2}$

21. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C$

22. $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C$

23. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

24. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C$

25. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C$

26. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C$

27. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$

28. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + C$

29. $\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

Formas que implican $\sqrt{a^2-u^2}$

30. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

31. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

32. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

33. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

34. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

35. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

36. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2-u^2} + C$$

37. $$\int (a^2-u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

38. $$\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$$

Formas que implican $\sqrt{u^2 - a^2}$

39. $$\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

40. $$\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

41. $$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{u} + C$$

42. $$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

43. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

44. $$\int \frac{u^2du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

45. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + C$$

46. $$\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$$

Formas que implican $a + bu$

47. $$\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(a+bu-a\ln|a+bu|) + C$$

48. $$\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|\right] + C$$

49. $$\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$$

50. $$\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$$

51. $$\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$$

52. $$\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$$

53. $$\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bu-\frac{a^2}{a+bu}-2a\ln|a+bu|\right) + C$$

54. $$\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$$

55. $$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$$

56. $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu} + C$$

57. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, \text{ si } a > 0$$
$$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \text{ si } a < 0$$

58. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

59. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

60. $$\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2u^n(a+bu)^{3/2}}{b(2n+3)} - \frac{2na}{b(2n+3)}\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du$$

61. $$\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$$

62. $$\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$$

Formas trigonométricas

63. $$\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$$

64. $$\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$$

65. $$\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$$

66. $$\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$$

67. $$\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2+\operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$$

68. $$\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2+\cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$$

69. $$\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$$

70. $$\int \cot^2 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

71. $$\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$$

72. $\displaystyle\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u\cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

73. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

74. $\displaystyle\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

75. $\displaystyle\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$

76. $\displaystyle\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$

77. $\displaystyle\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan u\sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

78. $\displaystyle\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot u\csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$

79. $\displaystyle\int \operatorname{sen} au\operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\displaystyle\int \cos au\cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\displaystyle\int \operatorname{sen} au\cos bu\,du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\displaystyle\int u\operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83. $\displaystyle\int u\cos u\,du = \cos u + u\operatorname{sen} u + C$

84. $\displaystyle\int u^n\operatorname{sen} u\,du = -u^n\cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

85. $\displaystyle\int u^n\cos u\,du = u^n\operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

86. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n u\cos^m u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u\cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-1} u\cos^m u\,du$

$\displaystyle\int \frac{1}{1-\operatorname{sen} av}\,du$

$\displaystyle = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u\cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u\cos^{m-2} u\,du$

87. $\displaystyle\int \frac{du}{1-\operatorname{sen} au} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + C$

88. $\displaystyle\int \frac{du}{1+\operatorname{sen} au} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right) + C$

89. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{1-\operatorname{sen} au} = \frac{u}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right)\right| + C$

Formas trigonométricas inversas

90. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u\operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

91. $\displaystyle\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

92. $\displaystyle\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

93. $\displaystyle\int u\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

94. $\displaystyle\int u\cos^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

95. $\displaystyle\int u\tan^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

96. $\displaystyle\int u^n\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\quad n \neq -1$

97. $\displaystyle\int u^n\cos^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\quad n \neq -1$

98. $\displaystyle\int u^n\tan^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{1+u^2}\right],\quad n \neq -1$

Formas exponenciales y logarítmicas

99. $\displaystyle\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

100. $\displaystyle\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

101. $\displaystyle\int e^{au}\operatorname{sen} bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

102. $\displaystyle\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

103. $\displaystyle\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

104. $\displaystyle\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

105. $\displaystyle\int u^n\ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

106. $\displaystyle\int u^m\ln^n u\,du = \frac{u^{m+1}\ln^n u}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int u^m\ln^{n-1} u\,du,\quad m \neq -1$

107. $$\int \ln(u^2+a^2)\,du = u\ln(u^2+a^2) - 2u + 2a\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$$

108. $$\int \ln|u^2-a^2|\,du = u\ln|u^2-a^2| - 2u + a\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

109. $$\int \frac{du}{a+be^u} = \frac{u}{a} - \frac{1}{a}\ln|a+be^u| + C$$

Formas hiperbólicas

110. $$\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$$

111. $$\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$$

112. $$\int \tanh u\,du = \ln(\cosh u) + C$$

113. $$\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$$

114. $$\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}(\operatorname{senh} u) + C$$

115. $$\int \operatorname{csch} u\,du = \ln|\tanh \tfrac{1}{2}u| + C$$

116. $$\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$$

117. $$\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$$

118. $$\int \operatorname{sech} u \tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$$

119. $$\int \operatorname{csch} u \coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$$

Formas que implican $\sqrt{2au-u^2}$

120. $$\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

121. $$\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

122. $$\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u}\,du = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

123. $$\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

124. $$\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

125. $$\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

126. $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

127. $$\int \frac{du}{u\sqrt{2ua-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$$

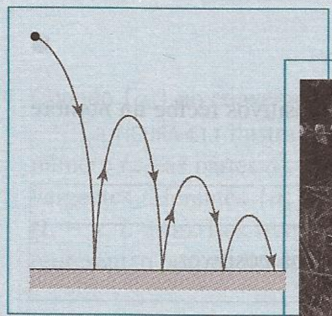
Algunas integrales definidas

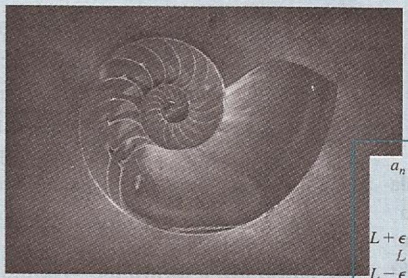
128. $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n},\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

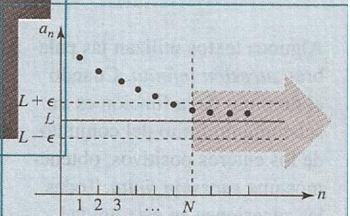
129. $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)},\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Unidad 4

Sucesiones y series







En esta unidad La experiencia cotidiana brinda un sentimiento intuitivo de la noción de una sucesión. Las palabras *sucesión de eventos* o *sucesión de números* sugiere un arreglo en el que los eventos E o los números n se establecen en algún orden: $E_1, E_2, E_3, \ldots$ o $n_1, n_2, n_3, \ldots$

Cualquier estudiante de matemáticas también está familiarizado con el hecho de que cualquier número real puede escribirse como un decimal. Por ejemplo, el número racional $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$, donde los misteriosos tres puntos (una elipsis) significan que los tres dígitos se repiten eternamente. Esto quiere decir que el decimal 0.333... es una suma infinita o la *serie infinita*

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots.$$

En esta unidad observaremos que los conceptos de sucesión y serie infinita están relacionados.

Competencias específicas

- Identificar series finitas e infinitas en distintos contextos.
- Determinar la convergencia de una serie infinita.
- Usar el teorema de Taylor para representar una función como una serie de potencias y aplicarlo para calcular la integral de una función.

4.1 Sucesiones

Introducción Si el dominio de una función f es el conjunto de enteros positivos, entonces los elementos $f(n)$ en el rango pueden arreglarse en un orden correspondiente a los valores crecientes de n:

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

En la discusión que sigue sólo se considerarán funciones cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos y cuyos elementos del rango son números reales.

EJEMPLO 1 Función con los enteros positivos como dominio

Si n es un entero positivo, entonces los primeros elementos en el rango de la función $f(n) = (1 + 1/n)^n$ son

$$f(1) = 2, \qquad f(2) = \frac{9}{4}, \qquad f(3) = \frac{64}{27}, \ldots$$

∎

Una función cuyo dominio es el conjunto completo de enteros positivos recibe un nombre especial.

Definición 4.1.1 Sucesión

Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.

Algunos textos utilizan las palabras *sucesión infinita*. Cuando el dominio de la función es un subconjunto finito del conjunto de los enteros positivos, obtenemos una *sucesión finita*. Todas las sucesiones en esta unidad serán infinitas.

Notación y términos En lugar de la notación de función usual $f(n)$, una sucesión suele denotarse mediante $\{a_n\}$ o $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. El entero n algunas veces recibe el nombre de **índice** de a_n. Los **términos** de la sucesión se forman dejando que el índice n tome los valores 1, 2, 3, . . . ; el número a_1 es el *primer término*, a_2 es el *segundo término*, y así en lo sucesivo. El número a_n se denomina el *término* n-*ésimo* o el **término general** de la sucesión. De tal modo, $\{a_n\}$ es equivalente a

$$\begin{array}{cccccl} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots & a_n, \ldots & \leftarrow \text{números en el rango} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ 1 & 2 & 3 & & n & \leftarrow \text{números en el dominio} \end{array}$$

Por ejemplo, la sucesión definida en el ejemplo 1 sería escrita $\{(1 + 1/n)^n\}$.

En algunas circunstancias es conveniente tomar el primer término de una sucesión como a_0 y la sucesión es entonces

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

EJEMPLO 2 Términos de una sucesión

Escriba los primeros cuatro términos de las sucesiones

a) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ *b*) $\{n^2 + n\}$ *c*) $\{(-1)^n\}$.

Solución Al sustituir $n = 1, 2, 3, 4$ en el término general respectivo de cada sucesión, obtenemos

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots$ *b*) $2, 6, 12, 20, \ldots$ *c*) $-1, 1, -1, 1, \ldots$ ∎

Sucesión convergente Para la sucesión del inciso *a*) del ejemplo 2, se ve que a medida que el índice n se vuelve progresivamente más grande, los valores $a_n = \frac{1}{2^n}$ no se incrementan sin límite. En realidad, observamos que cuando $n \to \infty$, los términos

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$$

se aproximan al valor límite 0. Se afirma que la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}$ **converge** a 0. En contraste, los términos de las sucesiones en los incisos *b*) y *c*) no se aproximan a un valor límite cuando $n \to \infty$. En general se tiene la siguiente definición.

Definición 4.1.2 Sucesión convergente

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ **converge** a un número real L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ siempre que } n > N. \quad (1)$$

El número L se llama el **límite** de la sucesión.

◀ Compare esta definición con la redacción en la definición del límite de una función.

Si una sucesión $\{a_n\}$ converge, entonces su límite L es único.

Sucesión convergente Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, (1) significa que los términos a_n pueden hacerse arbitrariamente cercanos a L para n suficientemente grande. Se indica que una sucesión converge a un número L escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Cuando $\{a_n\}$ no converge, esto es, cuando $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, la sucesión **diverge**.

La FIGURA 4.1.1 ilustra varias maneras en las cuales una sucesión $\{a_n\}$ puede converger a un número L. Las partes *a*), *b*), *c*) y *d*) de la figura 4.1.1 muestran que para cuatro sucesiones convergentes diferentes $\{a_n\}$, *al menos un número finito* de términos de a_n están en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Los términos de la sucesión $\{a_n\}$ que están en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ para $n > N$ se representan por medio de puntos en la figura.

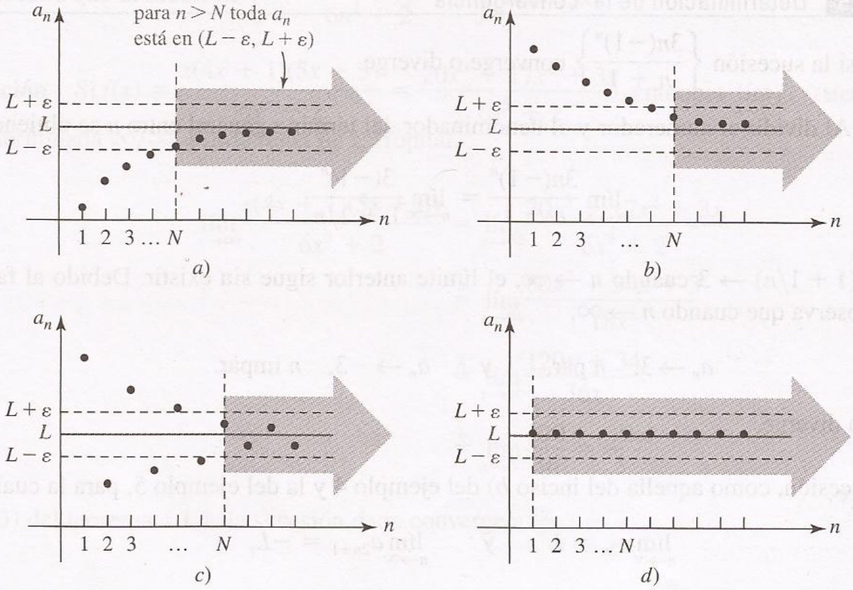


FIGURA 4.1.1 Cuatro maneras en las que una sucesión puede converger a L

EJEMPLO 3 Sucesión convergente

Use la definición 4.1.2 para demostrar que la sucesión $\{1/\sqrt{n}\}$ converge a 0.

Solución Intuitivamente, es posible ver a partir de los términos

$$1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \ldots$$

que cuando el índice n aumenta sin límite los términos tienden al valor límite 0. Para probar la convergencia, suponemos primero que $\varepsilon > 0$ está dado. Puesto que los términos de la sucesión son positivos, la desigualdad $|a_n - 0| < \varepsilon$ es la misma que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Esto es equivalente a $\sqrt{n} > 1/\varepsilon$ o $n > 1/\varepsilon^2$. En consecuencia, sólo se necesita elegir N como el primer entero positivo mayor o igual que $1/\varepsilon^2$. Por ejemplo, si se elige $\varepsilon = 0.01$, entonces $|1/\sqrt{n} - 0| = 1/\sqrt{n} < 0.01$ siempre que $n > 10\,000$. Esto es, se elige $N = 10\,000$. ■

En la práctica, para determinar si una sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge, debemos trabajar directamente con $\lim_{n\to\infty} a_n$ y proceder igual que al examinar el $\lim_{n\to\infty} f(x)$. Si a_n aumenta o disminuye sin límite cuando $n \to \infty$, entonces $\{a_n\}$ es necesariamente divergente y escribimos, respectivamente,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty. \tag{2}$$

En el primer caso en (2) afirmamos que $\{a_n\}$ **diverge a infinito** y en el segundo que $\{a_n\}$ **diverge a infinito negativo**. Una sucesión tal vez diverja de manera distinta a la que se indica en (2). El siguiente ejemplo ilustra dos sucesiones; cada una diverge de un modo diferente.

EJEMPLO 4 Sucesiones divergentes

a) La sucesión $\{n^2 + n\}$ diverge a infinito, ya que $\lim_{n\to\infty} (n^2 + n) = \infty$.

b) La sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente puesto que $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe. El término general de la sucesión no se aproxima a una constante cuando $n \to \infty$; como puede verse en el inciso *c)* del ejemplo 2, el término $(-1)^n$ se alterna entre 1 y −1 cuando $n \to \infty$. ■

EJEMPLO 5 Determinación de la convergencia

Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{3n(-1)^n}{n+1}\right\}$ converge o diverge.

Solución Al dividir el numerador y el denominador del término general entre n se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n(-1)^n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(-1)^n}{1 + 1/n}.$$

Aunque $3/(1 + 1/n) \to 3$ cuando $n \to \infty$, el límite anterior sigue sin existir. Debido al factor $(-1)^n$, se observa que cuando $n \to \infty$,

$$a_n \to 3, \quad n \text{ par}, \qquad \text{y} \qquad a_n \to -3, \quad n \text{ impar}.$$

La sucesión diverge. ■

Una sucesión, como aquella del inciso *b)* del ejemplo 4 y la del ejemplo 5, para la cual

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -L,$$

$L \neq 0$, se dice que **diverge por oscilación**.

Sucesión de constantes Una sucesión de constantes

$$c, c, c, \ldots$$

se escribe $\{c\}$. El sentido común indica que esta sucesión converge y que su límite es c. Vea la figura 4.1.1*d)*. Por ejemplo, la sucesión $\{\pi\}$ converge a π.

Al determinar el límite de una sucesión resulta muchas veces útil sustituir la variable discreta n por una variable continua x. Si una función es f tal que $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$ y el valor de f en los enteros positivos, $f(1), f(2), f(3), \ldots$, concuerda con los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de $\{a_n\}$, esto es,

$$f(1) = a_1, \qquad f(2) = a_2, \qquad f(3) = a_3, \ldots,$$

entonces necesariamente la sucesión $\{a_n\}$ converge al número L. La validez de este resultado se ilustra en la FIGURA 4.1.2.

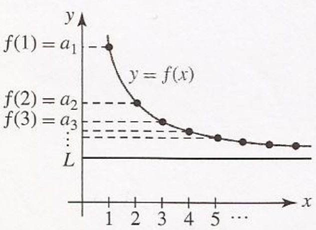


FIGURA 4.1.2 Si $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$, entonces $f(n) = a_n \to L$ cuando $n \to \infty$

Teorema 4.1.1 Límite de una sucesión

Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión y f es una función tal que $f(n) = a_n$ para $n \geq 1$. Si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L. \tag{3}$$

EJEMPLO 6 Empleo de la regla de L'Hôpital

Muestre que la sucesión $\{(n+1)^{1/n}\}$ converge.

Solución Si definimos $f(x) = (x+1)^{1/x}$, entonces reconocemos que $\lim_{n\to\infty} f(x)$ tiene la forma indeterminada ∞^0 cuando $x \to \infty$. Por tanto, y utilizando la regla de L'Hôpital,

◀ Aplique la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} \ln f(x) = \ln[\lim_{n\to\infty} f(x)] = 0$ y que $\lim_{n\to\infty} f(x) = e^0 = 1$. Por tanto, por (3) tenemos $\lim_{n\to\infty} (n+1)^{1/n} = e^0 = 1$. La sucesión converge a 1. ■

EJEMPLO 7 Sucesión convergente

Demuestre que la sucesión $\left\{\dfrac{n(4n+1)(5n+3)}{6n^3+2}\right\}$ converge.

Solución Si $f(x) = \dfrac{x(4x+1)(5x+3)}{6x^3+2} = \dfrac{20x^3+17x^2+3x}{6x^3+2}$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x)$ tiene la forma indeterminada ∞/∞. Por la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x(4x+1)(5x+3)}{6x^3+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{20x^3+17x^2+3x}{6x^3+2} \\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{60x^2+34x+3}{18x^2} \\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{120x+34}{36x} \\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{120}{36} = \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

De (3) del teorema 4.1.1, la sucesión dada converge a $\frac{10}{3}$. ■

EJEMPLO 8 Determinación de convergencia

Determine si la sucesión $\left\{\sqrt{\dfrac{n}{9n+1}}\right\}$ converge.

Solución Se continúa con la aplicación de la regla de L'Hôpital, se divide el numerador y el denominador entre x y resulta que $x/(9x+1) \to \frac{1}{9}$ cuando $x \to \infty$. De tal modo, podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{9n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{9n+1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

La sucesión converge a $\frac{1}{3}$. ■

Propiedades Las siguientes **propiedades** de sucesiones son análogas a las propiedades de los límites de funciones.

Teorema 4.1.2 Límite de una sucesión

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes. Si $\lim_{n\to\infty} b_n = L_1$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$, entonces

i) $\lim_{n\to\infty} c = c$, c un número real

ii) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = kL_1$, k un número real

iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 + L_2$

iv) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 \cdot L_2$

v) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$.

EJEMPLO 9 Determinación de convergencia

Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{2-3e^{-n}}{6+4e^{-n}}\right\}$ converge.

Solución Observe que $2 - 3e^{-n} \to 2$ y $6 + 4e^{-n} \to 6 \neq 0$ cuando $n \to \infty$. De acuerdo con el teorema 4.1.2*v*), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-3e^{-n}}{6+4e^{-n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2-3e^{-n})}{\lim_{n\to\infty}(6+4e^{-n})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

La sucesión converge a $\frac{1}{3}$. ■

El primero de los siguientes dos teoremas debe ser verosímil de acuerdo con su conocimiento del comportamiento de la función exponencial. Recuerde que, para $0 < b < 1$, $b^x \to 0$ cuando $x \to \infty$, en tanto que para $b > 1$, $b^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

Teorema 4.1.3 Sucesiones de la forma $\{r^n\}$

Suponga que r es una constante distinta de cero. La sucesión $\{r^n\}$ converge a 0 si $|r| < 1$ y diverge si $|r| > 1$.

Teorema 4.1.4 Sucesiones de la forma $\{1/n^r\}$

La sucesión $\left\{\dfrac{1}{n^r}\right\}$ converge a 0 para r cualquier número racional positivo.

EJEMPLO 10 Aplicaciones de los teoremas 4.1.3 y 4.1.4

a) La sucesión $\{e^{-n}\}$ converge a 0 por el teorema 4.1.3, ya que $e^{-n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ y $r = 1/e < 1$.

b) La sucesión $\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right\}$ diverge por el teorema 4.1.3, ya que $r = \frac{3}{2} > 1$.

c) La sucesión $\left\{\dfrac{4}{n^{5/2}}\right\}$ converge a 0 por el teorema 4.1.2*ii*) y el teorema 4.1.4, ya que $r = \frac{5}{2}$ es un número racional positivo. ■

EJEMPLO 11 Determinación de convergencia

Del teorema 4.1.2*iii*) y el teorema 4.1.4 observamos que la sucesión $\left\{10 + \dfrac{4}{n^{3/2}}\right\}$ converge a 10. ■

Sucesión definida recursivamente Como el siguiente ejemplo indica, una sucesión puede definirse especificando el primer término a_1 junto con una regla para obtener los términos subsecuentes a partir de los términos precedentes. En este caso se dice que la sucesión está definida **recursivamente**. La regla de definición se denomina **fórmula de recursión**. Vea los problemas 59 y 60 en los ejercicios 4.1.

EJEMPLO 12 Una sucesión definida recursivamente

Suponga que una sucesión se define recursivamente mediante $a_{n+1} = 3a_n + 4$, donde $a_1 = 2$. Sustituyendo entonces $n = 1, 2, 3, \ldots$ se obtiene

el número está dado como 2

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 + 4 = 3(2) + 4 = 10 \\ a_3 &= 3a_2 + 4 = 3(10) + 4 = 34 \\ a_4 &= 3a_3 + 4 = 3(34) + 4 = 106 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Teorema de compresión El siguiente teorema es el equivalente al teorema de compresión de funciones.

Teorema 4.1.5 Teorema de compresión

Suponga que $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones tales que

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

para todos los valores de n mayores que algún índice N (esto es, $n > N$). Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen a un límite común L, entonces $\{c_n\}$ también converge a L.

Factorial Antes de presentar un ejemplo que ilustre el teorema 4.1.5 necesitamos revisar un símbolo que aparece con frecuencia en esta unidad. Si n es un entero positivo, el símbolo $n!$, que se lee "n factorial", es el producto de los primeros n enteros positivos:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n. \tag{4}$$

Por ejemplo, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Una propiedad importante del factorial está dada por

$$n! = (n-1)!n.$$

Para ver esto, considere el caso cuando $n = 6$:

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = \overbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)}^{5!}\, 6 = 5!6.$$

Enunciada de una manera un poco diferente, la propiedad $n! = (n-1)!n$ es equivalente a

$$(n+1)! = n!(n+1). \tag{5}$$

Un último punto: por propósitos de conveniencia y para asegurar que la fórmula $n! = (n-1)!n$ es válida cuando $n = 1$, se define $0! = 1$.

EJEMPLO 13 Determinación de convergencia

Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ converge.

Solución La convergencia o divergencia de la sucesión dada no es evidente ya que $2^n \to \infty$ y $n! \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Aun cuando la forma límite de $\lim_{n\to\infty} (2^n/n!)$ es ∞/∞ no es posible que utilicemos la regla de L'Hôpital puesto que no hemos estudiado ninguna función $f(x) = x!$ Sin embargo, podemos recurrir al teorema 4.1.5 manipulando algebraicamente el término general de la sucesión. En vista de (4), el término general puede escribirse

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}^{n \text{ factores de } 2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} = \overbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{2}{n}}^{n \text{ fracciones}}$$

De la línea anterior se obtiene la desigualdad

$$0 \le \frac{2^n}{n!} = \overbrace{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdots\frac{2}{n}}^{n\text{ fracciones}} \le 2\cdot 1\cdot \overbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{3}}^{n-2\text{ fracciones}} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \tag{6}$$

Las $n-2$ fracciones de $\frac{2}{3}$ en el lado derecho de (6) resultan del hecho de que después del segundo factor en el producto de n fracciones, 3 es el denominador más pequeño que hace $\frac{2}{3}$ más grande que $\frac{2}{4}$, más grande que $\frac{2}{5}$, y así sucesivamente hacia abajo hasta el último factor $\frac{2}{n}$. Por las leyes de los exponentes (6) es lo mismo que

$$0 \le \frac{2^n}{n!} \le \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{o} \quad a_n \le c_n \le b_n,$$

donde se han identificado las sucesiones $\{a_n\} = \{0\}$, $\{b_n\} = \{\frac{9}{2}(\frac{2}{3})^n\}$ y $\{c_n\} = \{2^n/n!\}$. La sucesión $\{a_n\}$ es una de ceros y por ello converge a 0. La sucesión $\{b_n\} = \{\frac{9}{2}(\frac{2}{3})^n\}$ también converge a 0 al invocar el teorema 4.1.2*ii)* y el teorema 4.1.3 con $r = \frac{2}{3} < 1$. De tal manera que por el teorema 4.1.5, $\{c_n\} = \{2^n/n!\}$ también debe converger a 0. ■

El resultado $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$ muestra que $n!$ crece mucho más rápido que 2^n cuando $n\to\infty$. Por ejemplo, para $n = 10$, $2^{10} = 1\,024$, en tanto que $10! = 3\,628\,800$.

La sucesión en el ejemplo anterior también puede definirse recursivamente. Para $n = 1$, $a_1 = 2^1/1! = 2$. Entonces por (5) y las leyes de los exponentes,

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2\cdot 2^n}{(n+1)\cdot n!} = \frac{2}{n+1}\cdot \overset{\text{esto es } a_n}{\overset{\downarrow}{\frac{2^n}{n!}}}.$$

Así, $\{2^n/n!\}$ es lo mismo que

$$a_{n+1} = \frac{2}{n+1}a_n, \qquad a_1 = 2. \tag{7}$$

Es posible usar la fórmula de recursión (7) como un medio alterno de encontrar el límite L de la sucesión $\{2^n/n!\}$. Puesto que se mostró que la sucesión es convergente tenemos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Este último enunciado es equivalente también a $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$. Haciendo que $n\to\infty$ en (7) y usando las propiedades de límites podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}a_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right). \tag{8}$$

En la última línea se ve que $L = 0\cdot L$, lo cual implica que el límite de la sucesión es $L = 0$.

El último teorema para esta sección es una consecuencia inmediata del teorema 4.1.5.

Teorema 4.1.6 Sucesión de valores absolutos

Si la sucesión $\{|a_n|\}$ converge a 0, entonces $\{a_n\}$ converge a 0.

DEMOSTRACIÓN Por la definición de valor absoluto, $|a_n| = a_n$ si $a_n \ge 0$ y $|a_n| = -a_n$ si $a_n < 0$. Se sigue que

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|. \tag{9}$$

Por suposición, $\{|a_n|\}$ converge a 0 y por ello $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$. De la desigualdad (9) y el teorema 4.1.5 se concluye que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por tanto, $\{a_n\}$ converge a 0. ■

EJEMPLO 14 Empleo del teorema 4.1.6

La sucesión $\left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}$ converge a 0 puesto que ya se ha demostrado en el ejemplo 3 que la sucesión de valores absolutos $\{|(-1)^n/\sqrt{n}|\} = \{1/\sqrt{n}\}$ converge a 0. ■

4.1 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, liste los primeros cuatro términos de la sucesión cuyo término general es a_n.

1. $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$ **2.** $a_n = \dfrac{3}{4n-2}$

3. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ **4.** $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{n+1}$

5. $a_n = 10^n$ **6.** $a_n = 10^{-n}$

7. $a_n = 2n!$ **8.** $a_n = (2n)!$

9. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ **10.** $a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$

En los problemas 11-14, emplee la definición 4.1.2 para demostrar que cada sucesión converge al número dado L.

11. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$; $L = 0$ **12.** $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$; $L = 0$

13. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$; $L = 1$ **14.** $\left\{\dfrac{e^n+1}{e^n}\right\}$; $L = 1$

En los problemas 15-46, determine si la sucesión dada converge. Si la sucesión converge, entonces encuentre su límite.

15. $\left\{\dfrac{10}{\sqrt{n+1}}\right\}$ **16.** $\left\{\dfrac{1}{n^{3/2}}\right\}$

17. $\left\{\dfrac{1}{5n+6}\right\}$ **18.** $\left\{\dfrac{4}{2n+7}\right\}$

19. $\left\{\dfrac{3n-2}{6n+1}\right\}$ **20.** $\left\{\dfrac{n}{1-2n}\right\}$

21. $\{20(-1)^{n+1}\}$ **22.** $\left\{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

23. $\left\{\dfrac{n^2-1}{2n}\right\}$ **24.** $\left\{\dfrac{7n}{n^2+1}\right\}$

25. $\{ne^{-n}\}$ **26.** $\{n^3e^{-n}\}$

27. $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}\right\}$ **28.** $\left\{\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}\right\}$

29. $\{\cos n\pi\}$ **30.** $\{\operatorname{sen} n\pi\}$

31. $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ **32.** $\left\{\dfrac{e^n}{\ln(n+1)}\right\}$

33. $\left\{\dfrac{5-2^{-n}}{7+4^{-n}}\right\}$ **34.** $\left\{\dfrac{2^n}{3^n+1}\right\}$

35. $\left\{\dfrac{e^n+1}{e^n}\right\}$ **36.** $\left\{4+\dfrac{3^n}{2^n}\right\}$

37. $\left\{n \operatorname{sen}\left(\dfrac{6}{n}\right)\right\}$ **38.** $\left\{\left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n\right\}$

39. $\left\{\dfrac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}\right\}$ **40.** $\left\{\dfrac{\pi}{4}-\arctan(n)\right\}$

41. $\{n^{2/(n+1)}\}$ **42.** $\{10^{(n+1)/n}\}$

43. $\left\{\ln\left(\dfrac{4n+1}{3n-1}\right)\right\}$ **44.** $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 3n}\right\}$

45. $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$ **46.** $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

En los problemas 47-52, encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión. Determine si la sucesión dada converge. Si la sucesión converge, entonces encuentre su límite.

47. $\dfrac{2}{1}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{7}, \ldots$

48. $1+\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}, \ldots$

49. $3, -5, 7, -9, \ldots$

50. $-2, 2, -2, 2, \ldots$

51. $2, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{27}, \ldots$

52. $\dfrac{1}{1\cdot 4}, \dfrac{1}{2\cdot 8}, \dfrac{1}{3\cdot 16}, \dfrac{1}{4\cdot 32}, \ldots$

En los problemas 53-56, para la sucesión dada definida recursivamente, escriba los siguientes cuatro términos después del (de los) término(s) inicial(es) indicado(s).

53. $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n, \quad a_1 = -1$

54. $a_{n+1} = 2a_n - 1, \quad a_1 = 2$

55. $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3$

56. $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4$

En los problemas 57 y 58, se sabe que la sucesión definida recursivamente converge para un valor inicial dado $a_1 > 0$. Suponga que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, y proceda como en (8) de esta sección para encontrar el límite L de la sucesión.

57. $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + 6$ **58.** $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{5}{a_n}\right)$

En los problemas 59 y 60, encuentre una fórmula de recursión que defina la sucesión dada.

59. $\left\{\dfrac{5^n}{n!}\right\}$

60. $\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \ldots$

En los problema 61-64, utilice el teorema de compresión para establecer la convergencia de la sucesión dada.

61. $\left\{\dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{4^n}\right\}$ **62.** $\left\{\sqrt{16+\dfrac{1}{n^2}}\right\}$

63. $\left\{\dfrac{\ln n}{n(n+2)}\right\}$

64. $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$ $\left[\textit{Sugerencia: } a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{3}{n}\cdot\dfrac{4}{n}\cdots\dfrac{n}{n}\right).\right]$

65. Demuestre que para cualquier número real x, la sucesión $\{(1+x/n)^n\}$ converge a e^x.

66. Se sabe que la sucesión

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

converge a un número γ llamado **constante de Euler**. Calcule los primeros diez términos de la sucesión.

Aplicaciones

67. Una pelota se deja caer desde una altura inicial de 15 pies sobre una plancha de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura de $\frac{2}{3}$ de su altura precedente. ¿A qué altura llegará en su tercer rebote? ¿En su n-ésimo rebote? Vea la FIGURA 4.1.3.

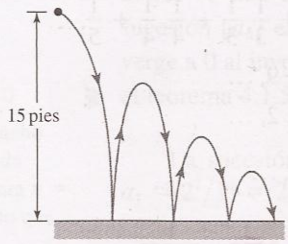


FIGURA 4.1.3 Rebote de la pelota del problema 67

68. Una pelota, que cae desde una gran altura, recorre 16 pies durante el primer segundo, 48 pies durante el segundo, 80 pies durante el tercero, y así en lo sucesivo. ¿Cuál es la distancia recorrida por la pelota durante el sexto segundo?

69. Un paciente toma 15 mg de un fármaco cada día. Suponga que 80% del fármaco acumulado es excretado cada día por las funciones corporales. Escriba los primeros seis términos de la sucesión $\{A_n\}$, donde A_n es la cantidad de fármaco presente en el cuerpo del paciente inmediatamente después de la dosis n-ésima.

70. Se deposita un dólar en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés anual r. Si no se extrae dinero, ¿cuál es la cantidad de dinero acumulado en la cuenta después del primero, segundo y tercer años?

71. Cada persona tiene dos padres. Determine cuántos tatatatarabuelos tiene cada persona.

72. La sucesión definida recursivamente

$$p_{n+1} = 3p_n - \frac{p_n^2}{400}, \quad p_0 = 450$$

se denomina **ecuación logística discreta**. Una sucesión de este tipo se utiliza a menudo para modelar una población p_n en un ambiente; aquí p_0 es la población inicial en el ambiente. Determine la **capacidad de transporte** $K = \lim_{n\to\infty} p_n$ del ambiente. Calcule los siguientes nueve términos de la sucesión y demuestre que estos términos oscilan alrededor de K.

Piense en ello

73. Considere la sucesión $\{a_n\}$ cuyos primeros cuatro términos son

$$1, \quad 1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \ldots$$

a) Con $a_1 = 1$, encuentre una fórmula de recursión que defina a la sucesión.

b) ¿Cuáles son el quinto y el sexto términos de la sucesión?

c) Se sabe que la sucesión $\{a_n\}$ converge. Encuentre el límite de la sucesión.

74. Conjeture respecto al límite de la sucesión convergente $\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots$

75. Si converge la sucesión $\{a_n\}$, ¿diverge la sucesión $\{a_n^2\}$? Apoye su respuesta con argumentos matemáticos sólidos.

76. En la FIGURA 4.1.4 el cuadrado más grande que se muestra es de 1 unidad por lado. Un segundo cuadrado se construye dentro del primer cuadrado conectando los puntos medios del primero. Un tercer cuadrado se construye conectando los puntos medios de los lados del segundo cuadrado, y así en lo sucesivo.

a) Encuentre una fórmula para el área A_n del n-ésimo cuadrado inscrito.

b) Considere la sucesión $\{S_n\}$, donde $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$. Calcule los valores numéricos de los primeros diez términos de esta sucesión.

c) Conjeture acerca de la convergencia de $\{S_n\}$.

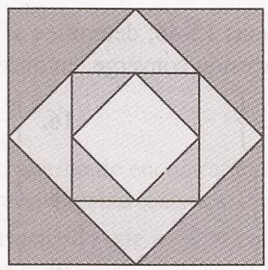


FIGURA 4.1.4 Cuadrados incrustados del problema 76

Proyectos

77. **Un clásico matemático** Considere un triángulo equilátero con lados de longitud 1 como se muestra en la FIGURA 4.1.5*a*). Como se muestra en la figura 4.1.5*b*), sobre cada uno de los tres lados del triángulo se construye otro triángulo equilátero con lados de longitud $\frac{1}{3}$. Como se señala en las figuras 4.1.5*c*) y 4.1.5*d*), se continúa esta construcción: se construyen triángulos equiláteros sobre los lados de cada nuevo triángulo previo de modo tal que la longitud de los lados del nuevo triángulo es $\frac{1}{3}$ la longitud de los lados del triángulo anterior. Considere que el perímetro de la primera figura es P_1, el perímetro de la segunda figura P_2, y así en lo sucesivo.

a) Encuentre los valores de P_1, P_2, P_3 y P_4.

b) Encuentre la fórmula para el perímetro P_n de la n-ésima figura.

c) ¿Cuál es el $\lim_{n\to\infty} P_n$? El perímetro de la región similar a un copo de nieve que se obtuvo dejando $n \to \infty$ se llama **curva del copo de nieve de Koch** y fue inventada en 1904 por el matemático sueco **Helge von Koch** (1870-1924). La curva de Koch aparece en la teoría de **fractales**.

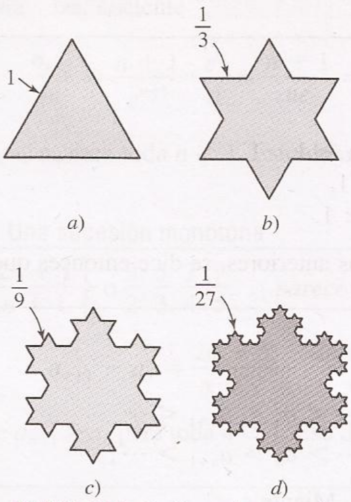


FIGURA 4.1.5 Regiones de copos de nieve del problema 77

78. Un poco de historia: ¿Cuántos conejos? Además de su famosa torre inclinada, la ciudad de Pisa, Italia, se conoce también como el lugar natal de **Leonardo Pisano**, alias **Leonardo Fibonacci** (1170-1250). Fibonacci fue el primero en Europa en introducir el sistema de lugares decimales hindú-árabe y el uso de los numerales arábigos. Su libro *Liber Abacci*, publicado en 1202, es básicamente un texto acerca de cómo hacer aritmética en este sistema decimal. Sin embargo, en el capítulo 12 de *Liber Abacci*, Fibonacci plantea y resuelve el siguiente problema sobre la reproducción de conejos:

¿Cuántos pares de conejos se reproducirán en un año empezando con un solo par, si cada mes cada par tiene un nuevo par que se vuelve fértil a partir del segundo mes en adelante?

Distinga el patrón de la solución de este problema y complete la siguiente tabla.

	Inicios	Después de cada mes											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Parejas adultas	1	1	2	3	5	8	13	21					
Parejas de bebés	0	1	1	2	3	5	8	13					
Total de parejas	1	2	3	5	8	13	21	34					

79. Escriba cinco términos, después de los dos iniciales, de la sucesión definida recursivamente por medio de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Reexamine el problema 78.

80. Razón áurea Si la fórmula de recursión del problema 79 se divide entre F_n, entonces

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Si se define $a_n = F_{n+1}/F_n$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente por medio de

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}, \quad a_1 = 1, n \geq 2.$$

Se sabe que la sucesión $\{a_n\}$ converge en la **razón áurea** $\phi = \lim_{n\to\infty} a_n$.

a) Encuentre ϕ.

b) Escriba un pequeño informe acerca del significado del número ϕ que incluya la relación entre este número y la forma del caparazón de cámaras múltiples del nautilo. Vea la foto al inicio de esta unidad.

4.2 Sucesiones monótonas

Introducción En la sección anterior se demostró que una sucesión $\{a_n\}$ convergía al determinar $\lim_{n\to\infty} a_n$. Sin embargo, no siempre es fácil o incluso posible determinar si una sucesión $\{a_n\}$ converge buscando el valor exacto de $\lim_{n\to\infty} a_n$. Por ejemplo, ¿la sucesión

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

converge? Resulta que es posible demostrar que esta sucesión converge, pero no utilizando las ideas básicas de la última sección. En esta sección se considera un tipo especial de sucesión cuya convergencia puede establecerse sin determinar el valor de $\{a_n\}$.

Empezamos con una definición.

Definición 4.2.1 Sucesión monótona

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que será

i) **creciente** si $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geq 1$,
ii) **no decreciente** si $a_{n+1} \geq a_n$ para toda $n \geq 1$,
iii) **decreciente** si $a_{n+1} < a_n$ para toda $n \geq 1$,
iv) **no creciente** si $a_{n+1} \leq a_n$ para toda $n \geq 1$.

Si una sucesión $\{a_n\}$ es de alguno de los tipos anteriores, se dice entonces que es **monótona**.

En otras palabras, sucesiones del tipo

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$
$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots,$$

son crecientes y decrecientes, respectivamente. Mientras,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$
$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots,$$

son sucesiones no decrecientes y no crecientes, respectivamente. Las nociones de *no decreciente* y *no creciente* permiten que algunos términos adyacentes en una sucesión resulten iguales.

EJEMPLO 1 Monótona/no monótona

a) Las tres sucesiones

$$4, 6, 8, 10, \ldots \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \qquad \text{y} \qquad 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, \ldots$$

son monótonas. Éstas son, respectivamente, creciente, decreciente y no creciente.

b) La sucesión $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$ es no monótona. ■

No siempre resulta evidente si una sucesión es creciente, decreciente, y así en lo sucesivo. Las siguientes guías ilustran algunas de las maneras en que puede demostrarse la monotonía.

Guías para demostrar la monotonía

i) Formar una **función** $f(x)$ tal que $f(n) = a_n$. Si $f'(x) > 0$, entonces $\{a_n\}$ es creciente. Si $f'(x) < 0$, entonces $\{a_n\}$ es decreciente.

ii) Formar el **cociente** a_{n+1}/a_n donde $a_n > 0$ para toda n. Si $a_{n+1}/a_n > 1$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es creciente. Si $a_{n+1}/a_n < 1$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es decreciente.

iii) Formar la **diferencia** $a_{n+1} - a_n$. Si $a_{n+1} - a_n > 0$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es creciente. Si $a_{n+1} - a_n < 0$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es decreciente.

EJEMPLO 2 Una sucesión monótona

Demuestre que $\left\{\dfrac{n}{e^n}\right\}$ es una sucesión monótona.

Solución Si se define $f(x) = x/e^x$, entonces $f(n) = a_n$. En este caso,

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} < 0$$

para $x > 1$ implica que f es decreciente sobre $[1, \infty)$. De ese modo se concluye que

$$f(n+1) = a_{n+1} < f(n) = a_n.$$

Por la definición 4.2.1, la sucesión dada es decreciente.

Solución alterna Del cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n} = \frac{n+1}{ne} = \frac{1}{e} + \frac{1}{ne} \leq \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} < 1$$

vemos que $a_{n+1} < a_n$ para toda $n \geq 1$. Esto demuestra que la sucesión es decreciente. ■

EJEMPLO 3 Una sucesión monótona

La sucesión $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$ o $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots$ *parece* ser creciente. De

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

se concluye que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geq 1$. Eso demuestra que la sucesión es creciente. ■

Definición 4.2.2 Sucesión acotada

i) Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada por arriba** si hay un número positivo M tal que $a_n \leq M$ para toda n.

ii) Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada por abajo** si hay un número positivo m tal que $a_n \geq m$ para toda n.

iii) Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada** si está acotada por arriba y acotada por abajo.

Desde luego, si una sucesión $\{a_n\}$ no está acotada, entonces se afirma que es **no acotada**. Una sucesión no acotada es divergente. La sucesión de Fibonacci (vea los problemas 78 y 79 en los ejercicios 4.1)

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

es no decreciente y es un ejemplo de una sucesión no acotada.

La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ en el ejemplo 1 es acotada puesto que $0 \leq a_n \leq 1$ para toda n. Cualquier número más pequeño que una cota inferior m de una sucesión también es una cota inferior y cualquier número mayor que una cota superior M es una cota superior; en otras palabras, los números m y M en la definición 4.2.2 no son únicos. Para la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ es igualmente cierto que $-2 \leq a_n \leq 2$ para toda $n \geq 1$.

EJEMPLO 4 Una sucesión acotada

La sucesión $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$ está acotada por arriba por 2, ya que la desigualdad

$$\frac{2n+1}{n+1} \leq \frac{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2$$

muestra que $a_n \leq 2$ para $n \geq 1$. Además,

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1} \geq 0$$

para $n \geq 1$ muestra que la sucesión está acotada por abajo por 0. De tal modo, $0 \leq a_n \leq 2$ para toda n implica que la sucesión está acotada. ■

◀ En realidad, del ejemplo 3 advertimos que los términos de la sucesión están acotados por abajo por el primer término de la sucesión.

El siguiente resultado será útil en las secciones subsecuentes de esta unidad.

Teorema 4.2.1 Condición suficiente para la convergencia

Una sucesión monótona acotada $\{a_n\}$ converge.

La existencia de una *cota superior mínima*, esto es, una cota superior que es más pequeña que todas las demás cotas superiores de la sucesión, es uno de los axiomas básicos en matemáticas. Recibe el nombre de **propiedad de completitud** del sistema de números reales.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos el teorema en el caso de una sucesión no decreciente. Por suposición, $\{a_n\}$ está acotada y por ello $m \leq a_n \leq M$ para toda n. A su vez, esto significa que el conjunto infinito de términos $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ está acotado por arriba y por tanto tiene una cota superior mínima o más pequeña L. La sucesión en realidad converge a L. Para $\varepsilon > 0$ sabemos que $L - \varepsilon < L$, y consecuentemente $L - \varepsilon$ no es una cota superior de S (no hay cotas superiores más pequeñas que la cota superior mínima). En consecuencia, existe un entero positivo N tal que $a_N > L - \varepsilon$. Pero, puesto que $\{a_n\}$ es no decreciente,

$$L - \varepsilon \leq a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq a_{N+3} \leq \cdots \leq L + \varepsilon.$$

Se concluye que para $n > N$, $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$ o $|a_n - L| < \varepsilon$. De la definición 4.1.2 determinamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. ■

EJEMPLO 5 Acotada y monótona

Se demostró que la sucesión $\left\{\dfrac{2n+1}{n+1}\right\}$ es monótona (ejemplo 3) y acotada (ejemplo 4). Por consiguiente, por el teorema 4.2.1 la sucesión es convergente. ■

EJEMPLO 6 Determinación de convergencia

Demuestre que la sucesión $\left\{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right\}$ converge.

Solución Primero, el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

muestra que $a_{n+1} < a_n$ para toda n. La sucesión es monótona puesto que es decreciente. Luego, de la desigualdad

¿Por qué el producto $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{7}{8} \cdots \dfrac{2n-1}{2n}$ es menor que 1?

$$0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n-1}{2n} < 1$$

se observa que la sucesión está acotada. Se concluye del teorema 4.2.1 que la sucesión es convergente. ■

El teorema 4.2.1 es útil para probar que la sucesión $\{a_n\}$ converge, esto es, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, pero el teorema no brinda el número específico L. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra cómo determinar L cuando la sucesión se define recursivamente.

EJEMPLO 7 Determinación de convergencia

Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ definida por la fórmula de recursión $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6$, $a_1 = 1$, converge.

Esto puede probarse utilizando un método llamado *inducción matemática*.

Solución Primero, la sucesión $\{a_n\}$ está acotada. Puede demostrarse que $a_n < 8$, para toda n. Este hecho se sugiere al calcular a_n para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_2 = \frac{1}{4}a_1 + 6 = \frac{1}{4}(1) + 6 = \frac{25}{4} = 6.25 < 8$$

$$a_3 = \frac{1}{4}a_2 + 6 = \frac{1}{4}\left(\frac{25}{4}\right) + 6 = \frac{121}{16} = 7.5625 < 8$$

$$a_4 = \frac{1}{4}a_3 + 6 = \frac{1}{4}\left(\frac{121}{16}\right) + 6 = \frac{505}{64} = 7.890625 < 8$$

$$\vdots$$

Como $a_n > 0$ para toda n, se tiene que $0 < a_n < 8$ para toda n. De tal modo, $\{a_n\}$ está acotada.

Luego, demostraremos que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona. Debido a que $a_n < 8$ necesariamente $\frac{3}{4}a_n < \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$. Por tanto, de la fórmula de recursión,

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6 > \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}a_n = a_n.$$

Esto demuestra que $a_{n+1} > a_n$ para toda n, y por ello la sucesión es creciente.

Como $\{a_n\}$ es acotada y monótona, se sigue del teorema 4.2.1 que la sucesión converge. Puesto que debemos tener $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$, el límite de la sucesión se determina a partir de la fórmula de recursión:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}a_n + 6\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} a_n + 6$$

$$L = \frac{1}{4}L + 6.$$

Al resolver la última ecuación para L encontramos que $\frac{3}{4}L = 6$ o $L = 8$. ■

Σ NOTAS DESDE EL AULA

i) Toda sucesión convergente $\{a_n\}$ está necesariamente acotada. Vea el problema 31 en los ejercicios 4.2. No obstante, no se concluye que toda sucesión acotada es convergente. Se le pedirá que dé un ejemplo que ilustre este último enunciado en el problema 30 de los ejercicios 4.2.

ii) Algunas sucesiones $\{a_n\}$ no exhiben comportamiento monótono hasta algún punto en la sucesión, esto es, hasta que el índice satisface $n \geq N$, donde N es algún entero positivo. Por ejemplo, los términos de la sucesión $\{5^n/n!\}$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ son:

$$5, \frac{25}{2}, \frac{125}{6}, \frac{625}{24}, \frac{625}{24}, \frac{3\,125}{144}, \ldots \tag{1}$$

Para observar mejor lo que está ocurriendo en (1), se aproximarán los términos utilizando números redondeados hasta dos decimales:

$$5, 12.5, 20.83, 26.04, 26.04, 21.70, \ldots \tag{2}$$

En (2) vemos que los primeros cuatro términos de $\{5^n/n!\}$ aumentan de manera evidente, pero empezando con el *cuarto término* los términos parecen empezar a no crecer. Esto se prueba a partir de la versión definida recursivamente de la sucesión. Procediendo como se hizo al obtener la fórmula de recurrencia en (7) en la sección 4.1, $\{5^n/n!\}$ es la misma que $a_{n+1} = \dfrac{5}{n+1}a_n$, $a_1 = 5$. Puesto que $\dfrac{5}{n+1} \leq 1$ para $n \geq 4$ observamos que $a_{n+1} \leq a_n$, esto es, $\{5^n/n!\}$ es no creciente sólo para $n \geq 4$. De la misma manera, es fácil demostrar que $\{100^n/n!\}$ se vuelve a la larga no creciente sólo cuando $n \geq 99$. Tomando el límite de la fórmula de recursión como $n \to \infty$, como en el ejemplo 7, es posible demostrar que tanto $\{5^n/n!\}$ como $\{100^n/n!\}$ convergen a 0.

4.2 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-9.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-12, determine si la sucesión dada es monótona. Si es así, indique si es creciente, decreciente o no decreciente o no creciente.

1. $\left\{\dfrac{n}{3n+1}\right\}$ **2.** $\left\{\dfrac{10+n}{n}\right\}$

3. $\{(-1)^n\sqrt{n}\}$ **4.** $\{(n-1)(n-2)\}$

5. $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}$ **6.** $\left\{\dfrac{e^n}{n^5}\right\}$

7. $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ **8.** $\left\{\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right\}$

9. $\left\{n + \dfrac{1}{n}\right\}$ **10.** $\{n^2 + (-1)^n n\}$

11. $\{(\operatorname{sen} 1)(\operatorname{sen} 2)\cdots(\operatorname{sen} n)\}$ **12.** $\left\{\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)\right\}$

En los problemas 13-24, utilice el teorema 4.2.1 para demostrar que la sucesión dada converge.

13. $\left\{\dfrac{4n-1}{5n+2}\right\}$ **14.** $\left\{\dfrac{6-4n^2}{1+n^2}\right\}$

15. $\left\{\dfrac{3^n}{1+3^n}\right\}$ **16.** $\{n5^{-n}\}$

17. $\{e^{1/n}\}$

18. $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$

19. $\left\{\dfrac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\right\}$

20. $\left\{\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}\right\}$

21. $\{\tan^{-1} n\}$

22. $\left\{\dfrac{\ln(n+3)}{n+3}\right\}$

23. $(0.8), (0.8)^2, (0.8)^3, \ldots$

24. $\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}, \ldots$

En los problemas 25 y 26, use el teorema 4.2.1 para demostrar que la sucesión definida recursivamente converge. Encuentre el límite de la sucesión.

25. $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 5, a_1 = 1$

26. $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, a_1 = 0$

27. Exprese

$$\sqrt{7}, \sqrt{7\sqrt{7}}, \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}, \ldots$$

como una sucesión $\{a_n\}$ definida recursivamente. Utilice el hecho de que la sucesión está acotada, $0 < a_n < 7$ para toda n, para demostrar que $\{a_n\}$ es creciente. Encuentre el límite de la sucesión.

28. Recurra al teorema 4.2.1 para demostrar que la sucesión definida recursivamente

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)a_n, \quad a_1 = 2, a_2 = 1, n \geq 2$$

es acotada y monótona y en consecuencia converge. Explique por qué la fórmula de recursión no es de ayuda para determinar el límite de la sucesión.

≡ Aplicaciones

29. Ciertos estudios en administración pesquera argumentan que el tamaño de una población de peces no perturbada cambia de un año al siguiente de acuerdo con la fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}, \quad n \geq 0,$$

donde $p_n > 0$ es la población después de n años, y a y b son parámetros positivos que dependen de las especies y de su ambiente. Suponga que el tamaño de una población p_0 se introduce en el año 0.

a) Emplee la fórmula de recursión para demostrar que los únicos valores límite posibles para la sucesión $\{p_n\}$ son 0 y $b - a$.

b) Demuestre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.

c) Utilice el resultado del inciso *b*) para demostrar que si $a > b$, entonces la población muere; esto es, $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

d) Suponga ahora $a < b$. Demuestre que si $0 < p_0 < b - a$, entonces la sucesión $\{p_n\}$ es creciente y está acotada por arriba por $b - a$. Demuestre que si $0 < b - a < p_0$, entonces la sucesión $\{p_n\}$ es decreciente y acotada por abajo por $b - a$. Concluya que $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$ para cualquier $p_0 > 0$. [*Sugerencia*: Examine $|b - a - p_{n+1}|$, la cual es la distancia entre p_{n+1} y $|b - a|$.]

≡ Piense en ello

30. Proporcione un ejemplo de una sucesión acotada que no es convergente.

31. Demuestre que toda sucesión convergente $\{a_n\}$ está acotada. [*Sugerencia*: Puesto que $\{a_n\}$ es convergente, se sigue de la definición 4.1.2 que existe una N tal que $|a_n - L| < 1$ siempre que $n > N$.]

32. Demuestre que $\{\int_1^n e^{-t^2} dt\}$ converge. [*Sugerencia*: Para $x > 1$, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.]

33. **Un clásico matemático** Demuestre que la sucesión

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

es acotada y monótona, y, en consecuencia, convergente. El límite de la sucesión se denota por medio de γ y se llama **constante de Euler** en honor al notable matemático suizo **Leonhard Euler** (1707-1783). Del problema 66 del ejercicio 4.1, $\gamma \approx 0.5772\ldots$ [*Sugerencia*: Primero demuestre la desigualdad

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

considerando el área bajo la gráfica de $y = 1/x$ sobre el intervalo $[1, n]$.]

4.3 Series

Introducción El concepto de una *serie* se relaciona estrechamente con el concepto de *sucesión*. Si $\{a_n\}$ es la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, entonces la suma de los términos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

se llama **serie infinita**, o simplemente una **serie**. Las a_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, se denominan los **términos** de la serie y a_n se llama el **término general**. Escribimos (1) de manera compacta utilizando la notación de sumatoria como

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{o por conveniencia} \quad \sum a_k.$$

La pregunta que deseamos responder en ésta y en varias de las secciones siguientes es:

- ¿Cuándo una serie infinita de constantes "suma" un número?

EJEMPLO 1 Una serie infinita

En los comentarios de inicio de esta unidad se advirtió que la representación decimal de un número racional $\frac{1}{3}$ es, de hecho, una serie infinita

$$0.333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

De manera intuitiva, esperamos que $\frac{1}{3}$ sea la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$. Sin embargo, de manera intuitiva, esperamos que una serie infinita tal como

$$100 + 1\,000 + 10\,000 + 100\,000 + \cdots$$

donde los términos se vuelven más y más grandes, no tenga suma. En otras palabras, no se espera que la serie última "sume" o *converja* a un número cualquiera. El concepto de convergencia de una serie infinita se define en términos de la convergencia de un tipo especial de sucesión.

Sucesión de sumas parciales Asociada con toda serie finita $\sum a_k$, existe una **sucesión de sumas parciales** $\{S_n\}$ cuyos términos están definidos por

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

El término general $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ de esta sucesión se denomina la **suma parcial *n*-ésima** de la serie.

EJEMPLO 2 Una serie infinita

La sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ para la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$ es

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{10} = 0.3 \\ S_2 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} = 0.33 \\ S_3 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0.333 \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} = 0.\overbrace{333\ldots3}^{3\ n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

En el ejemplo 2, cuando n es muy grande, S_n dará una buena aproximación a $\frac{1}{3}$, de modo que parece razonable escribir

$$\frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

Esto lleva a la siguiente definición.

Definición 4.3.1 Serie convergente

La serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se dice que es **convergente** si su sucesión de sumas parciales $\{S_n\} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ converge; esto es,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

El número S se dice que es la **suma** de la serie. Si $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe, entonces se dice que la serie es **divergente**.

EJEMPLO 3 Empleo de la sucesión de sumas parciales

Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)}$ es convergente.

Solución Por fracciones parciales el término general a_n de la serie puede escribirse como

$$a_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}.$$

De tal modo, la suma parcial n-ésima de la serie es

$$S_n = \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right] + \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right] + \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right] + \left[\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right]$$

$$= \frac{1}{5} + \overbrace{-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+4}}^{0} - \frac{1}{n+5}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{n+5}.$$

De la última línea observamos que $\lim_{n\to\infty} 1/(n+5) = 0$, y por ello

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{n+5}\right] = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

En consecuencia, la serie converge y se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{1}{5}.$$

Serie telescópica Debido a la manera en la cual el término general de la sucesión de sumas parciales "colapsa" hasta dos términos, la serie en el ejemplo 3 se dice que es una **serie telescópica**. Vea los problemas 11-14 en los ejercicios 4.3.

Serie geométrica Otro tipo de serie que puede probarse como convergente o divergente a partir directamente de su sucesión de sumas parciales tiene la forma

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}, \tag{2}$$

donde $a \neq 0$ y r son números reales fijos. Una serie de la forma (2) se llama **serie geométrica**. Advierta en (2) que cada término después del primero se obtiene al multiplicar el término precedente por r. El número r se denomina la **razón común** y, como se ve en el siguiente teorema, su magnitud determina si una serie geométrica converge o diverge.

Teorema 4.3.1 Suma de una serie geométrica

i) Si $|r| < 1$, entonces una serie geométrica converge y su suma es

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}, \quad a \neq 0.$$

ii) Si $|r| \geq 1$, entonces una serie geométrica diverge.

DEMOSTRACIÓN La prueba del teorema 4.3.1 se dará en dos partes. En cada parte se supone que $a \neq 0$.

Empezaremos con el caso en que $|r| = 1$. Para $r = 1$, la serie es

$$\sum_{k=1}^{\infty} a = a + a + a + \cdots$$

y por ello la suma parcial n-ésima $S_n = \overbrace{a + a + \cdots + a}^{n\,a}$ es simplemente $S_n = na$. En este caso, $\lim_{n\to\infty} S_n = a \cdot \lim_{n\to\infty} n = \infty$. De tal modo, la serie diverge. Para $r = -1$, la serie es

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(-1)^{k-1} = a + (-a) + a + (-a) + \cdots$$

y por ello la sucesión de sumas parciales es

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, \ldots \quad \text{o} \quad a, 0, a, 0, a, 0, \ldots,$$

la cual es divergente,

Considere ahora el caso $|r| \neq 1$, el cual significa que $|r| < 1$ o $|r| > 1$. Considere el término general de la sucesión de sumas parciales de (2):

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}. \tag{3}$$

Multiplicando ambos lados de (3) por r, se obtiene

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \tag{4}$$

Después se resta (4) de (3) y se resuelve para S_n:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1 - r)S_n = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad r \neq 1. \tag{5}$$

Ahora, de acuerdo con el teorema 4.1.3 sabemos que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ para $|r| < 1$. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}, \quad |r| < 1.$$

Si $|r| > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n$ no existe y por ello el límite de (5) tampoco existe. ■

EJEMPLO 4 Serie geométrica

a) En la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$$

se identifica $a = 1$ y la razón común $r = -\frac{1}{3}$. Puesto que $|r| = |-\frac{1}{3}| = \frac{1}{3} < 1$, la serie converge. Del teorema 4.3.1, la suma de la serie es entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}.$$

b) La razón común en la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = 5 + \frac{15}{2} + \frac{45}{4} + \frac{135}{8} + \cdots$$

es $r = \frac{3}{2}$. La serie diverge debido a $r = \frac{3}{2} > 1$. ■

Todo número racional p/q, donde p y $q \neq 0$ son enteros, se puede expresar como un decimal interrumpido o como un decimal repetido. De tal modo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$ en el ejemplo 1 converge puesto que es una serie geométrica con $r = \frac{1}{10} < 1$. Con $a = \frac{3}{10}$ encontramos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

En general:

- Todo decimal repetido es una serie geométrica convergente.

EJEMPLO 5 Número racional

Exprese el decimal repetido 0.121212 . . . como un cociente de enteros.

Solución Se escribe primero el número dado como una serie geométrica

$$\begin{aligned} 0.121212\ldots &= \frac{12}{100} + \frac{12}{10\,000} + \frac{12}{1\,000\,000} + \cdots \\ &= \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \cdots \end{aligned}$$

y se hacen las identificaciones $a = \frac{12}{100}$ y $r = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$. Por el teorema 4.3.1, la serie converge pues $r = \frac{1}{100} < 1$ y su suma es

$$0.121212\ldots = \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$ ■

EJEMPLO 6 Observación de una pelota que rebota

Si una pelota se deja caer desde una altura de s pies sobre el suelo, entonces el tiempo t que tarda en llegar al suelo se relaciona con s por medio de $s = \frac{1}{2}gt^2$. En otras palabras, la pelota tarda $t = \sqrt{2s/g}$ s para llegar al suelo. Suponga que la pelota rebota siempre hasta cierta fracción fija $\beta (0 < \beta < 1)$ de su altura previa. Encuentre una fórmula para el tiempo T que la pelota tarda en llegar al reposo. Vea la FIGURA 4.3.1.

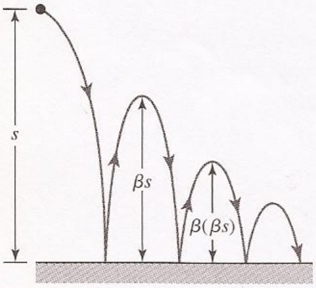


FIGURA 4.3.1 Pelota que rebota del ejemplo 6

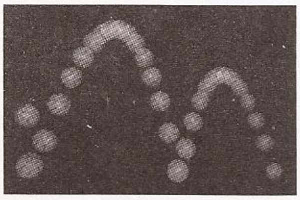


Foto estroboscópica de una pelota de basquetbol rebotando

Solución El tiempo para caer desde una altura de s pies hasta el suelo es: $\sqrt{2s/g}$; el tiempo para ascender βs pies y después caer βs pies hasta el suelo es: $2\sqrt{2\beta s/g}$; el tiempo para ascender $\beta(\beta s)$ pies y después caer $\beta(\beta s)$ pies hasta el suelo es $2\sqrt{2\beta^2 s/g}$; y así sucesivamente. De esta manera, el tiempo total T está dado por la serie infinita

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{2s/g} + 2\sqrt{2\beta s/g} + 2\sqrt{2\beta^2 s/g} + \cdots + 2\sqrt{2\beta^n s/g} + \cdots \\ &= \sqrt{2s/g}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\beta}\right)^k\right]. \end{aligned}$$

Como $0 < \beta < 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{\beta})^k$ es una serie geométrica convergente con $a = \sqrt{\beta}$ y $r = \sqrt{\beta}$. En consecuencia, de acuerdo con el teorema 4.3.1,

$$T = \sqrt{2s/g}\left[1 + 2\frac{\sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}}\right] \quad \text{o} \quad T = \sqrt{2s/g}\left[\frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}}\right].$$ ■

Serie armónica Una de las series más famosas es también un ejemplo de una serie divergente. La **serie armónica** es la suma de los recíprocos de los enteros positivos:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}. \tag{6}$$

Recordar esta serie. Será de mucha importancia en las secciones subsecuentes de esta unidad.

El término general de la sucesión de las sumas parciales para (6) está dado por

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

De tal modo,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq S_n + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ términos de } \frac{1}{2n}} = S_n + n \cdot \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La desigualdad $S_{2n} \geq S_n + \frac{1}{2}$ implica que la sucesión de sumas parciales para la serie armónica no está acotada. Para ver lo anterior, observe que

$$\begin{aligned} S_2 &\geq S_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ S_4 &\geq S_2 + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \\ S_8 &\geq S_4 + \frac{1}{2} \geq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ S_{16} &\geq S_8 + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. En consecuencia, se concluye que la serie armónica es divergente.

Una consecuencia de convergencia Si a_n y S_n son los términos generales de una serie y la sucesión correspondiente de sumas parciales, respectivamente, entonces de la resta

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$$

vemos que $a_n = S_n - S_{n-1}$. En este caso, si la serie $\sum a_k$ converge a un número S, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ y $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Hemos establecido el siguiente teorema.

Teorema 4.3.2 Condición necesaria para convergencia

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Prueba para una serie divergente El teorema 4.3.2 establece simplemente que si una serie infinita converge, es necesario que el término n-ésimo, o general, tienda a cero. De modo equivalente, se concluye:

- Si el n-ésimo término a_n de una serie infinita **no** tiende a cero cuando $n \to \infty$, entonces la serie **no** converge.

Formalizamos este resultado como una prueba para la divergencia.

Teorema 4.3.3 Prueba del término *n*-ésimo para divergencia

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

El teorema 4.3.3 corrobora de inmediato la parte *ii*) de la prueba del teorema 4.3.1, a saber, una serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$, $a \neq 0$, diverge cuando $r = \pm 1$. Por ejemplo, cuando $r = 1$, $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} a \neq 0$.

EJEMPLO 7 Serie divergente

a) Considere la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k-1}{5k+3}$. De

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{5n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{5+\frac{3}{n}} = \frac{4}{5} \neq 0$$

se concluye del teorema 4.3.3 que la serie diverge.

b) Considere la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$ no existe, es posible afirmar que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. ¿La serie diverge por el teorema 4.3.3? ■

En este momento se le recomienda leer (y recordar) *iii*) de las *Notas desde el aula*. Se enuncian los siguientes tres teoremas sin demostración.

Teorema 4.3.4 Múltiplo constante de una serie

Si c es cualquier constante distinta de cero, entonces las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ convergen ambas o divergen ambas.

Teorema 4.3.5 Suma de dos series convergentes

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen a S_1 y S_2, respectivamente, entonces

i) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ converge a $S_1 + S_2$, y

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ converge a $S_1 - S_2$.

El teorema 4.3.5 indica que cuando $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Teorema 4.3.6 Suma de una serie convergente y una divergente

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ diverge.

EJEMPLO 8 Suma de dos series convergentes

Con la ayuda del teorema 4.3.1, se observa que las series geométricas $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ y $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ convergen a 2 y $\frac{3}{2}$, respectivamente. En consecuencia, del teorema 4.3.5, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right]$ converge y

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}. \quad ■$$

EJEMPLO 9 Suma de dos series

Del ejemplo 3 se sabe que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+4)(k+5)}$ converge. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ es la serie armónica divergente, se sigue del teorema 4.3.6 que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(k+4)(k+5)}+\frac{1}{k}\right]$$

diverge. ■

NOTAS DESDE EL AULA

i) El término *n*-ésimo de la sucesión de sumas parciales de la serie armónica a menudo se denota mediante $H_n=\sum_{k=1}^{n}(1/k)$. Los términos de la sucesión $H_1=1$, $H_2=\frac{3}{2}$, $H_3=\frac{11}{6},\ldots$ se denominan **números armónicos**. Vea el problema 71 en los ejercicios 4.3.

ii) Cuando se escribe en términos de notación de sumatoria, una serie geométrica quizá no se reconozca de inmediato, o si lo es, los valores de *a* y *r* tal vez no sean manifiestos. Por ejemplo, para ver si $\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ es una serie geométrica es buena idea escribir dos o tres términos:

$$\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=\overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}^{a}+\overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}^{ar}+\overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{7}}^{ar^2}+\cdots.$$

Del lado derecho de la última igualdad, es posible hacer las identificaciones $a=4\left(\frac{1}{2}\right)^5$ y $r=\frac{1}{2}<1$. En consecuencia, la suma de la serie es $\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$. Si se desea, aunque no hay una necesidad real para hacer esto, puede expresarse $\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ en la forma más familiar $\sum_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}$ haciendo $k=n-2$. El resultado es

$$\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=\sum_{k=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{k+4}=\sum_{k=1}^{\infty}\overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}^{a}\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}^{r^{k-1}}.$$

iii) Observe con cuidado cómo se enuncian los teoremas 4.3.2 y 4.3.3. En específico, el teorema 4.3.3 *no* dice si $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, entonces $\sum a_k$ converge. En otras palabras, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ no es *suficiente* para garantizar que $\sum a_k$ converge. De hecho, si $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, la serie puede ser convergente o divergente. Por ejemplo, en la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$, $a_n=1/n$ y $\lim_{n\to\infty}(1/n)=0$, pero la serie diverge.

iv) Cuando se determina la convergencia, es posible, y algunas veces conveniente, borrar o ignorar varios de los primeros términos de la serie. En otras palabras, las series infinitas $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, $N > 1$ difieren a lo sumo por un número finito de términos y son ambas convergentes o ambas divergentes. Desde luego, eliminar los primeros $N-1$ términos de una serie convergente suele no afectar la suma de la serie.

4.3 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-9.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, escriba los primeros cuatro términos de cada serie.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k}$ **2.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$ **4.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k3^k}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ **6.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^2+1}$

7. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2m)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}$ **8.** $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{m!}$

9. $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{\cos j\pi}{2j+1}$ **10.** $\sum_{i=5}^{\infty} i \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2}$

En los problemas 11-14, proceda como en el ejemplo 3 para encontrar la suma de la serie telescópica dada.

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ **12.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ **14.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+7k+12}$

En los problemas 15-24, determine si la serie geométrica dada converge o diverge. Si es convergente, encuentre la suma de la serie.

15. $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$ **16.** $\sum_{k=1}^{\infty} 10\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}$ **18.** $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

19. $\sum_{r=1}^{\infty} 5^r 4^{-r}$ **20.** $\sum_{s=1}^{\infty} (-3)^s 7^{-s}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} 1\,000(0.9)^n$ **22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1.1)^n}{1\,000}$

23. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^k}$ **24.** $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^k$

En los problemas 25-30, escriba cada número decimal que se repite como un cociente de enteros.

25. 0.222… **26.** 0.555…

27. 0.616161… **28.** 0.393939…

29. 1.314314… **30.** 0.5262626…

En los problemas 31 y 32, encuentre la suma de las series dadas.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right]$ **32.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k-1}{4^k}$

En los problemas 33-42, muestre que la serie dada es divergente.

33. $\sum_{k=1}^{\infty} 10$ **34.** $\sum_{k=1}^{\infty} (5k+1)$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$ **36.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2+2k+3}$

37. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ **38.** $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{3k+1}\right)$

39. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{k}$ **40.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k}$

41. $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{k}\right]$ **42.** $\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen} \frac{1}{k}$

En los problemas 43-46, determine los valores de x para los cuales la serie dada converge.

43. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}$ **44.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}$

45. $\sum_{k=1}^{\infty} (x+1)^k$ **46.** $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k}$

≡ Aplicaciones

47. Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15 pies sobre una plancha de concreto. Cada vez que la pelota rebota, alcanza una altura de $\frac{2}{3}$ de su altura precedente. Recurra a la serie geométrica para determinar la distancia que la pelota recorre antes de quedar en reposo.

48. En el problema 47 determine el tiempo que tarda la pelota en llegar al reposo.

49. Para erradicar plagas agrícolas (como la mosca de la fruta), se liberan moscas macho esterilizadas dentro de la población general en intervalos de tiempo regulares. Considere que N_0 es el número de moscas liberadas cada día y que s es la proporción de las que sobreviven en un día determinado. De los N_0 machos esterilizados originales, $N_0 s^n$ sobrevivirán en n semanas sucesivas. En consecuencia, el número total de tales machos que sobreviven n semanas después de que se ha iniciado el programa es $N_0 + N_0 s + N_0 s^2 + \cdots + N_0 s^n$. ¿A qué se aproxima esta suma cuando $n \to \infty$? Suponga $s = 0.9$ y que se necesitan 10 000 machos esterilizados para controlar la población en cierta área. Determine el número de moscas macho que debe ser liberado cada día.

50. En algunas circunstancias la cantidad de un fármaco que se acumularía en el cuerpo de un paciente después de un largo periodo es $A_0 + A_0e^{-k} + A_0e^{-2k} + \cdots$, donde $k > 0$ es una constante y A_0 es la dosis diaria del fármaco. Encuentre la suma de la serie.

51. Un paciente toma 15 mg de un fármaco diariamente. Si 80% del fármaco acumulado se excreta cada día mediante las funciones corporales, ¿qué cantidad del fármaco se acumulará después de un largo periodo, esto es, cuando $n \to \infty$? (Suponga que la medición de la acumulación se hace inmediatamente después de cada dosis. Vea el problema 69 en los ejercicios 4.1.)

52. Se aplica una fuerza a una partícula, que se mueve en una línea recta, de tal manera que después de cada segundo la partícula sólo se mueve la mitad de la distancia que recorrió en el segundo anterior. Si la partícula se mueve 20 cm en el primer segundo, ¿cuánto se desplazará?

≡ Piense en ello

53. Suponga que la sucesión $\{a_n\}$ converge a un número $L \neq 0$. Explique por qué la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

54. Determine si la serie

$$\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.11} + \frac{1}{1.111} + \cdots$$

converge o diverge.

55. Determine si la suma de dos series divergentes es necesariamente divergente.

56. Considere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Puesto que $k^2 = k \cdot k$, la n-ésima suma parcial de la serie es

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot n}.$$

Explique por qué las siguientes desigualdades son ciertas y por qué pueden usarse para demostrar que una serie dada converge:

$$0 < S_n < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

o

$$0 < S_n < 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

57. Encuentre la suma de la serie

$$\frac{1+9}{25} + \frac{1+27}{125} + \frac{1+81}{625} + \cdots.$$

58. Encuentre la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} xe^{-x}\, dx \right).$$

59. Encuentre todos los valores de x en $(-\pi/2, \pi/2)$ para los cuales

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 - \tan x} - \sum_{k=0}^{n} \tan^k x \right) = 0.$$

60. Muestre que si $\lim_{n \to \infty} f(n+1) = L$, donde L es un número, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} [f(k+1) - f(k)] = L - f(1)$.

61. Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$ converge o diverge.

62. Muestre que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ es divergente demostrando que $S_n \geq \sqrt{n}$.

63. Vimos que la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge puesto que el término general S_n de la sucesión de sumas parciales puede hacerse tan grande como se quiera tomando a n lo suficientemente grande ($S_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$). No obstante, la serie armónica diverge *muy lentamente*.

a) Use la gráfica de $f(x) = 1/x$ para $x \geq 1$ a fin de establecer la desigualdad

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

b) Emplee una calculadora y la desigualdad del inciso *a)* para estimar el valor de n para el cual $S_n \geq 10$. Estime el valor de n para el cual $S_n \geq 100$.

64. En el problema 77 en los ejercicios 4.1 se consideraron *los perímetros de las regiones acotadas por las curvas de* Koch que se muestran en la figura 4.1.5. En el inciso *c)* del problema usted debe haber demostrado que el perímetro de la región límite es infinito. En este problema se consideran las *áreas* de las figuras sucesivas. Considere que el área de la primera figura es A_1, el área de la segunda figura A_2, y así en lo sucesivo.

a) Utilizando el hecho de que el área de un triángulo equilátero con lados de longitud s es $\frac{1}{4}\sqrt{3}s^2$, encuentre los valores de A_1, A_2, A_3 y A_4.

b) Demuestre que el área de la figura n-ésima es

$$A_n = \frac{1}{20}\sqrt{3}\left[8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right].$$

c) ¿Cuál es $\lim_{n \to \infty} A_n$?

≡ Proyectos

65. Un poco de historia: Muerte por pan En 1972, un brote de envenenamiento por metilmercurio en Irak produjo 459 muertes entre 6 530 casos de envenenados admitidos en hospitales. El brote epidémico fue provocado por el consumo de pan casero preparado a partir de trigo que había sido tratado con un fungicida de metilmercurio. Los primeros síntomas de parestesia (pérdida de sensaciones en la boca, manos y pies) empezaron a ocurrir cuando el nivel acumulado de mercurio alcanzó 25 mg. Los síntomas de ataxia (pérdida de coordinación al andar) iniciaron con 55 mg, la disartria (arrastrar las palabras) con 90 mg y la sordera con 170 mg. La muerte se volvió una posibilidad cuando el nivel de mercurio acumulado superó 200 mg. Se estimó que

Pan casero

una barra de pan típica elaborada a partir de trigo contaminado contenía 1.4 mg de mercurio, y también que el cuerpo elimina sólo alrededor de 0.9% del mercurio acumulado diariamente.

a) Suponga que una persona recibió una dosis d de mercurio al día, y que el cuerpo eliminó una fracción p del mercurio acumulado diariamente. Encuentre una fórmula para L_n, el nivel acumulado después de comer en el n-ésimo día, y una fórmula para el nivel límite, $\lim_{n\to\infty} L_n$.

b) Empleando $d = 1.4$ y $p = 0.009$, encuentre el valor límite del mercurio y determine qué día empezaron a ocurrir los diversos síntomas.

c) ¿Cuál sería la dosis diaria para que la muerte fuera posible en el día 100? (Utilice $p = 0.009$.)

66. Un poco de historia: La paradoja de Zenón El filósofo griego **Zenón de Elea** (c. 490 a.C.) fue discípulo del filósofo presocrático Parménides, que afirmaba que el cambio o el movimiento era una ilusión. De las paradojas de Zenón que apoyaban esta filosofía, la más famosa es su argumento acerca de que Aquiles, conocido por su habilidad de correr rápido, no podría superar a una tortuga en movimiento. La forma usual de la historia es como se narra a continuación:

Aquiles empieza desde el punto S, *y exactamente en el mismo instante una tortuga empieza desde un punto* A *adelante de* S. *Después de cierta cantidad de tiempo, Aquiles alcanza el punto de inicio* A *de la tortuga, pero durante este tiempo la tortuga ha avanzado a un nuevo punto* B. *Durante el tiempo que tarda Aquiles en alcanzar* B, *la tortuga se ha movido hacia delante otra vez hasta un nuevo punto* C. *Al continuar de esta manera, eternamente, Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.*

Vea la FIGURA 4.3.2. Utilice una serie infinita para resolver esta aparente paradoja. Suponga que cada uno se mueve con una velocidad constante. Ayudaría inventar valores razonables para ubicar en el inicio la cabeza de la tortuga y para las dos velocidades.

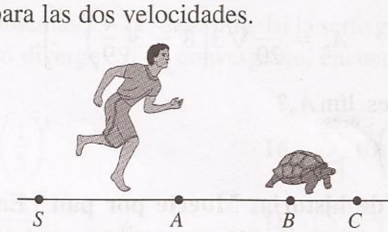


FIGURA 4.3.2 Aquiles y la tortuga en el problema 66

67. Números primos Escriba un breve informe en el cual defina un número primo. Incluya en el informe una demostración acerca de si la serie de los recíprocos de primos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots$$

converge o diverge.

68. Longitud de una trayectoria en zigzag En la FIGURA 4.3.3*a*), el triángulo ABC es un triángulo recto isósceles. El segmento de línea AP_1 es perpendicular a BC, el segmento de línea P_1P_2 es perpendicular a AC, y así en lo sucesivo. Encuentre la longitud de la trayectoria en zigzag $AP_1P_2P_3\ldots$

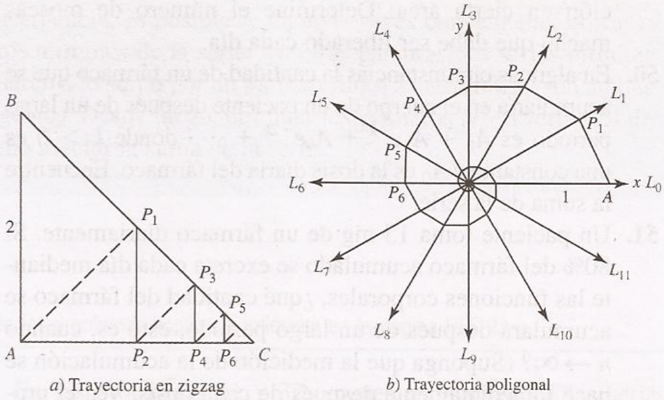


FIGURA 4.3.3 Trayectorias en zigzag y poligonal de los problemas 68 y 69

69. Longitud de una trayectoria poligonal En la figura 4.3.3*b*), hay doce rayos que emanan del origen y el ángulo entre cada par de rayos consecutivos es 30°. El segmento de recta AP_1 es perpendicular al rayo L_1, el segmento de recta P_1P_2 es perpendicular al rayo L_2, y así en lo sucesivo. Encuentre la longitud de la trayectoria poligonal $AP_1P_2P_3\ldots$

70. Una integral impropia Al final del apéndice "Integrales impropias" se deja pendiente la pregunta de si $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ es un requisito necesario para la convergencia de una integral impropia $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$. A continuación se presenta la respuesta. Observe que la función f cuya grafica está dada en la FIGURA 4.3.4 *no* se aproxima a 0 cuando $x \to \infty$. Demuestre que $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

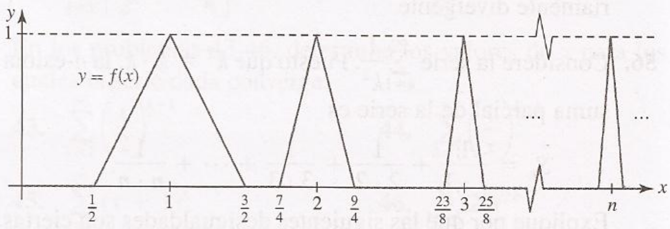


FIGURA 4.3.4 Gráfica del problema 70

71. Un problema de apilamiento Tómese su tiempo para hacer su tarea y efectúe un experimento. Necesitará un suministro de n objetos rectangulares idénticos, por ejemplo, libros, aunque también pueden ser tableros, cartas, fichas de dominó, etcétera. Suponga que la longitud de cada libro es L. A continuación encontrará un enunciado burdo del problema:

¿Qué tanto puede sobresalir una pila de n libros colocada sobre el borde de una mesa sin que se caiga?

Intuitivamente la pila *no* caerá siempre que su centro de masa permanezca por arriba de la cubierta de la mesa. Empleando la regla de apilamiento que se ilustra en la FIGURA 4.3.5, observe que lo que sobresale del libro mostrado en la figura 4.3.5*a*) alcanza su máximo $d_1 = L/2$ cuando su centro de masa está ubicado directamente en el borde de la mesa.

a) Calcule las distancias que sobresalen los libros d_2, d_3 y d_4 del borde de la mesa para la pila de libros de la figura 4.3.5*b*), 4.3.5*c*) y 4.3.5*d*), respectivamente.

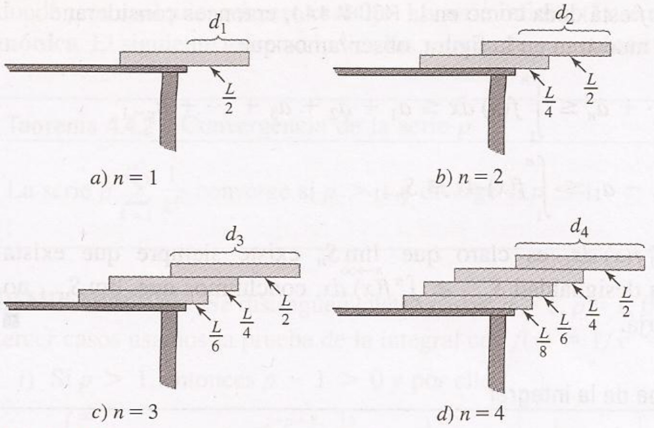


FIGURA 4.3.5 Método de apilamiento de libros del problema 71

Luego utilice (1) de la sección 3.10 para demostrar que el centro de masa de cada pila está en el borde de la mesa. [*Sugerencia*: Para n libros ponga el eje x a lo largo de la cubierta horizontal de la mesa con el origen O en el borde izquierdo del primer libro, o del fondo, en la pila.]

b) ¿Qué indica el valor de d_4 en el inciso *a*) acerca del cuarto libro, o superior, en la pila?

c) Siguiendo el patrón de apilamiento que se indica en la figura 4.3.5, para n libros la parte que sobresale del primer libro desde el borde de la mesa sería $L/2n$, lo que sobresale del segundo libro desde el borde del primer libro sería $L/2(n-1)$, lo que sobresale del tercer libro desde el borde del segundo correspondería a $L/2(n-2)$, y así en lo sucesivo. Encuentre una fórmula para d_n, lo que sobresalen n libros desde el borde de la mesa. Demuestre que el centro de masa de la pila de n libros está en el borde de la mesa.

d) Utilice la fórmula d_n para encontrar la distancia que sobresale un libro en el inciso *c*) y encuentre el valor más pequeño de n de manera que lo que sobresalen n libros apilados en la manera descrita en el inciso *c*) es mayor que el doble de la longitud de un libro.

e) En teoría, utilizando la regla de apilamiento del inciso *c*), ¿hay alguna limitación acerca del número de libros en una pila?

72. Un clásico matemático: Los trenes y la mosca En un tiempo específico dos trenes T_1 y T_2, separados por 20 millas sobre el mismo riel, inician un curso de choque a una velocidad de 10 mph. Suponga que en el preciso instante en que parten los trenes, una mosca sale del frente del tren T_1, vuela a una velocidad de 20 mph en línea recta hacia el frente del motor del tren T_2, después vuela de regreso hacia T_1 a 20 mph, después regresa a T_2, y así en lo sucesivo. Recurra a una serie geométrica para encontrar la distancia total recorrida por la mosca cuando los trenes chocan (y la mosca es aplastada). Después use el sentido común para determinar la distancia total que vuela la mosca. Vea la FIGURA 4.3.6.

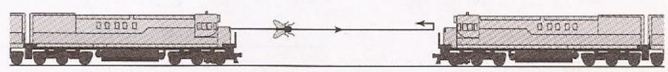


FIGURA 4.3.6 Trenes y mosca en el problema 72

4.4 Prueba de la integral

Introducción A menos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sea una serie telescópica o una serie geométrica, es una tarea difícil, si no inútil, demostrar la convergencia o divergencia directamente de la sucesión de sumas parciales. Sin embargo, suele ser posible determinar si una serie converge o diverge por medio de una *prueba* que utiliza sólo los términos de la serie. En ésta y en las dos secciones que siguen se examinarán cinco de tales pruebas que son aplicables a series infinitas de *términos positivos*.

Prueba de la integral La primera prueba que se considerará relaciona los conceptos de convergencia y divergencia de una integral impropia con la convergencia y divergencia de una serie infinita.

Teorema 4.4.1 Prueba de la integral

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos y f es una función continua que es no negativa y decreciente sobre $[1, \infty)$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$.

i) Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

ii) Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

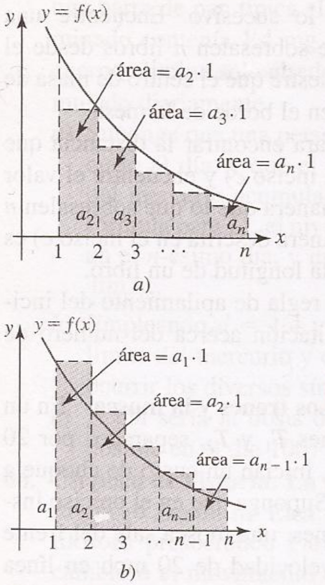


FIGURA 4.4.1 Rectángulos en la prueba del teorema 4.4.1

DEMOSTRACIÓN Si la grafica de f está dada como en la FIGURA 4.4.1, entonces considerando las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura, observamos que

$$0 \le a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \le \int_1^n f(x)\,dx \le a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$

o

$$S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)\,dx \le S_{n-1}.$$

De la desigualdad $S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)\,dx$, es claro que $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe siempre que exista $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx$. Por otro lado, de la desigualdad $S_{n-1} \ge \int_1^n f(x)\,dx$, concluimos que $\lim_{n\to\infty} S_{n-1}$ no existe siempre que $\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverja. ■

EJEMPLO 1 Empleo de la prueba de la integral

Demuestre la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

Solución La función $f(x) = 1/(1+x^2)$ es continua, no negativa y decreciente para $x \ge 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \ge 1$. De

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} x\Big]_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1) \quad \leftarrow \tan^{-1} 1 = \pi/4 \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\tan^{-1} b - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

es claro que la integral impropia es convergente. Del teorema 4.4.1*i*) se concluye que la serie dada también converge. ■

En la prueba de la integral, si la serie de términos positivos es de la forma $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, usamos entonces

$$\int_N^\infty f(x)\,dx \quad \text{donde} \quad f(k) = a_k.$$

EJEMPLO 2 Empleo de la prueba de la integral

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$.

$f'(x) < 0$ sobre el intervalo $[3, \infty)$.

▶ **Solución** La función $f(x) = (\ln x)/x$ satisface la hipótesis de la prueba de la integral sobre el intervalo $[3, \infty)$. En este caso,

$$\begin{aligned}
\int_3^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{\ln x}{x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}(\ln x)^2\Big]_3^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}[(\ln b)^2 - (\ln 3)^2] = \infty
\end{aligned}$$

muestra que la integral impropia diverge. Se concluye del teorema 4.4.1*ii*) que la serie dada también diverge. ■

Serie *p* La prueba de la integral es particularmente útil en cualquier serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots, \tag{1}$$

donde p es cualquier número real fijo. La serie infinita (1) se conoce como la **serie p** o **hiperarmónica**. El siguiente teorema indica los valores de p para los cuales converge (diverge) la serie p.

Teorema 4.4.2 Convergencia de la serie p

La serie p $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN Se distinguen cuatro casos: $p > 1$, $p = 1$, $0 < p < 1$ y $p \leq 0$. En el primero y tercer casos usamos la prueba de la integral con $f(x) = 1/x^p = x^{-p}$.

i) Si $p > 1$, entonces $p - 1 > 0$ y por ello

$$\int_1^{\infty} x^{-p}\, dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right] = \frac{1}{1-p}[0-1] = \frac{1}{p-1}.$$

La serie p es convergente por el teorema 4.4.1*i*).

ii) Si $p = 1$, entonces se reconoce a la serie p como la serie armónica divergente.

iii) Si $0 < p < 1$, entonces $-p + 1 > 0$ y por ello

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} [b^{-p+1} - 1] = \infty.$$

La serie p es divergente por el teorema 4.4.1*ii*).

iv) Por último, si $p \leq 0$, entonces $-p \geq 0$ y así $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \lim_{n\to\infty} n^{-p} \neq 0$. La serie p es divergente por la prueba del término n-ésimo, teorema 4.3.3. ■

EJEMPLO 3 Serie p

a) Del teorema 4.4.2, la serie p $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ diverge, ya que $p = \frac{1}{2} < 1$.

b) Del teorema 4.4.2, la serie p $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, ya que $p = 2 > 1$. ■

$\sum$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Cuando se aplica la prueba de la integral, es necesario tener la seguridad de que el valor de la integral impropia convergente $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ no se relaciona con la suma real de la serie infinita correspondiente. De tal modo, la serie en el ejemplo 1 *no* converge a $\pi/4$. Vea el problema 36 en los ejercicios 4.4.

ii) Los resultados de la prueba de la integral para $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ se cumplen incluso si la función no negativa continua f no empieza a decrecer hasta que $x \geq N \geq n$. Para la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (\ln k)/k$ la función $f(x) = (\ln x)/x$ disminuye sobre el intervalo $[3, \infty)$. De cualquier manera, en la prueba de la integral es posible utilizar $\int_1^{\infty} (\ln x\, dx)/x$.

4.4 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-9.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-30, determine si la serie dada converge o diverge. Recurra a la prueba de la integral en los casos en que sea apropiado.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.1}}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{0.99}}$

3. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots$

4. $\frac{1}{100} + \frac{1}{100\sqrt{2}} + \frac{1}{100\sqrt{3}} + \cdots$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+7}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k+1}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+5k^2}$

8. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{k^2+5}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$

12. $\sum_{k=2}^{\infty} k^2e^{-k}$

13. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$

14. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k}$

15. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{10}{k(\ln k)^2}$

16. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^4}$

19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^3}$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^{3/2}}$

23. $\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{3}k\right)$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k(k+1)}$

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k^2+1)}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{e^k+e^{-k}}$

30. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{e^{3k}}}$

En los problemas 31-34, sin hacer ningún trabajo determine si la serie dada converge o diverge. Enuncie sus razones.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k}+\frac{3}{k^2}\right)$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(5k^{-1.6}-10k^{-1.1}\right)$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2^k}\right)$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+4\sqrt{k}}{k^2}$

En los problemas 35 y 36, determine los valores de p para los cuales la serie dada converge.

35. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$

36. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k[\ln(\ln k)]^p}$

≡ Piense en ello

37. Determine los valores de p para los cuales la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^p \ln k$$

es convergente.

38. Suponga que f es una función continua que es positiva y decreciente para $x \geq 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$. Demuestre que

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

39. Demuestre que

$$\frac{\pi}{4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

40. Se demostró que la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$ es divergente debido a que la sucesión de sumas parciales diverge. Recuerde que $S_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

a) Use el resultado del problema 38 para estimar la suma de los primeros 10 mil millones de términos de la serie armónica.

b) ¿Cuántos términos de la serie armónica son necesarios para garantizar que $S_n \geq 100$?

41. Deje que S denote la suma de la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y S_n el término general en su sucesión de sumas parciales. Defina el **residuo**, o el error, que se efectúa cuando S_n se aproxima a S, como

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots.$$

Suponga que f es una función continua que es positiva y decreciente para $x \geq 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$ y que $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge. Demuestre que

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx.$$

42. La suma S de la serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ se sabe que es igual a $\pi^2/6$. Recurra al problema 41 para determinar n de manera que S_n dará una aproximación a S que es exacta hasta tres lugares decimales.

4.5 Pruebas de comparación

Introducción A menudo es posible determinar la convergencia o divergencia de una serie de términos positivos $\sum a_k$ *comparando* sus términos con los términos de una *serie de prueba* $\sum b_k$ que se sabe que es convergente o divergente. En esta sección se considerarán dos pruebas de comparación para la convergencia y la divergencia.

Prueba de comparación directa La demostración de la siguiente prueba utilizará dos propiedades importantes de las sucesiones. Recuerde de la sección 4.2 que si una sucesión está acotada y es monótona debe converger. También que si los términos de una sucesión se vuelven no acotados entonces ésta diverge. Aplicamos estos resultados a la sucesión de sumas parciales de una serie.

Teorema 4.5.1 Prueba de comparación directa

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series de términos positivos.

i) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge y $a_k \leq b_k$ para todo entero positivo k, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

ii) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge y $a_k \geq b_k$ para todo entero positivo k, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

DEMOSTRACIÓN Sea $a_k > 0$ y $b_k > 0$ para $k = 1, 2, \ldots$ y considere que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{y} \quad T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

son los términos generales de las sucesiones de sumas parciales para $\sum a_k$ y $\sum b_k$, respectivamente.

i) Si $\sum b_k$ es una serie convergente para la cual $a_k \leq b_k$, entonces $S_n \leq T_n$. Puesto que $\lim_{n\to\infty} T_n$ existe, $\{S_n\}$ es una sucesión creciente acotada y, en consecuencia, convergente por el teorema 4.2.1. Por tanto, $\sum a_k$ es convergente.

ii) Si $\sum b_k$ diverge y $a_k > b_k$, entonces $S_n > T_n$. Puesto que T_n aumenta sin cota, así lo hace S_n. Por consiguiente, $\sum a_k$ es divergente. ■

En general, si $\sum c_k$ y $\sum d_k$ son dos series para las cuales $c_k \leq d_k$ para toda k, se afirma que la serie $\sum c_k$ está **dominada** por la serie $\sum d_k$. De tal modo que para series de términos positivos, los incisos *i)* y *ii)* del teorema 4.5.1 pueden reenunciarse de la siguiente manera:

- Una serie $\sum a_k$ es convergente si está dominada por una serie convergente $\sum b_k$.
- Una serie $\sum a_k$ diverge si domina a una serie divergente $\sum b_k$.

Los siguientes dos ejemplos ilustran el método. Desde luego, no señalan que para recurrir a las series de prueba $\sum b_k$ es necesario estar familiarizado con algunas series que convergen y con algunas que divergen.

◀ Sería buena idea en este punto revisar la noción de serie p en la sección 4.4.

EJEMPLO 1 Empleo de la prueba de comparación directa

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+4}$.

Solución Se observa que al reducirse el denominador en los términos generales se obtiene una fracción mayor:

$$\frac{k}{k^3+4} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}.$$

Debido a que la serie dada es dominada por una serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$, se concluye del teorema 4.5.1*i)* que la serie dada también es convergente. ■

EJEMPLO 2 Uso de la prueba de comparación directa

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+2)}{k}$.

Solución Puesto que $\ln(k+2) > 1$ para $k \geq 1$, se tiene

$$\frac{\ln(k+2)}{k} > \frac{1}{k}.$$

En este caso se ha demostrado que la serie dada domina a la serie armónica divergente $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$. En consecuencia, por el teorema 4.5.1*ii)* la serie dada diverge. ■

Prueba de comparación del límite Otro tipo de prueba de comparación implica tomar el límite del cociente entre el término general de la serie $\sum a_k$ y el término general de la serie de prueba $\sum b_k$ que se sabe que es convergente o divergente.

Teorema 4.5.2 Prueba de comparación del límite

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series de términos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

donde L es finita y $L > 0$, entonces las dos series son ya sea ambas convergentes o ambas divergentes.

DEMOSTRACIÓN Puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = L > 0$, es posible elegir n tan grande, como $n \geq N$ para algún entero positivo N, que

$$\frac{1}{2}L \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}L.$$

Puesto que $a_n > 0$, la desigualdad implica que $a_n \leq \frac{3}{2}Lb_n$ para $n \geq N$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, se concluye de la prueba de comparación directa que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y, en consecuencia, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente. Además, puesto que $\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n$ para $n \geq N$, se observa que si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen. ■

La prueba de comparación del límite es aplicable a menudo a series $\sum a_k$ para las cuales no es conveniente la prueba de comparación directa.

EJEMPLO 3 Uso de la prueba de comparación del límite

El propio lector debe convencerse de que es difícil aplicar la prueba de comparación directa a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 - 5k^2 + 1}$. Sin embargo, se sabe que $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^3)$ es una serie p convergente ($p = 3 > 1$). En consecuencia, con

$$a_n = \frac{1}{n^3 - 5n^2 + 1} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n^3}$$

tenemos
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3 - 5n^2 + 1} = 1.$$

Del teorema 4.5.2 se concluye que la serie dada converge. ■

Si el término general a_n de la serie $\sum a_k$ es un cociente ya sea de potencias racionales de n o de raíces de polinomios en n, es posible distinguir el término general b_n de la serie de prueba $\sum b_k$ examinando el "comportamiento de grado" de a_n para valores grandes de n. En otras palabras, para encontrar un candidato correspondiente a b_n sólo se necesita examinar el cociente de las *potencias más altas de n* en el numerador y en el denominador de a_n.

EJEMPLO 4 Uso de la prueba de comparación del límite

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt[3]{8k^5 + 7}}$.

Solución Para valores grandes de n, el término general de la serie $a_n = n/\sqrt[3]{8n^5 + 7}$ "se comporta de manera similar" a un múltiplo constante de

$$\frac{n}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{n}{n^{5/3}} = \frac{1}{n^{2/3}}.$$

De tal modo, se ensaya la serie p divergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2/3}}$ como una serie de prueba:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{\sqrt[3]{8n^5 + 7}}}{\dfrac{1}{n^{2/3}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^5}{8n^5 + 7}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \frac{1}{2}.$$

Así, de acuerdo con el teorema 4.5.2, la serie dada diverge. ■

Σ NOTAS DESDE EL AULA

i) La hipótesis en la prueba de comparación directa también puede debilitarse, al considerar un teorema más fuerte. Para una serie con términos positivos, sólo se requiere que $a_k \le b_k$ o $a_k \ge b_k$ para k suficientemente grande y no para todos los enteros positivos.

ii) En la aplicación de la prueba de comparación directa, a menudo es fácil alcanzar un punto en que la serie dada está dominada por una serie divergente. Por ejemplo,

$$\frac{1}{5^k + \sqrt{k}} \le \frac{1}{\sqrt{k}}$$

es realmente cierto y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge. Este tipo de razonamiento no prueba nada acerca de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k + \sqrt{k}}$. Desde luego, la última serie converge. ¿Por qué? De manera similar, no puede llegarse a una conclusión al mostrar que una serie dada domina a una serie convergente.

La siguiente tabla resume la **prueba de comparación directa**. Sea $\sum a_k$ una serie de términos positivos y $\sum b_k$ una serie que se sabe que converge o diverge (una serie de pruebas).

Comparación de términos	Serie de prueba $\sum b_k$	Conclusión sobre $\sum a_k$
$a_k \le b_k$	converge	converge
$a_k \le b_k$	diverge	ninguna
$a_k \ge b_k$	diverge	diverge
$a_k \ge b_k$	converge	ninguna

4.5 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-9.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-14 utilice la prueba de comparación directa para determinar si la serie dada converge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 5}$

3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} - 1}$

4. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k^2 + 1}{k^3 - k}$

5. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$

6. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k^5}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 3^k}{2^k}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 8^k}{3 + 10^k}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + \operatorname{sen} k}{\sqrt[3]{k^4 + 1}}$

10. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k + 1}{k \ln k}$

11. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j + e^{-j}}{5^j(j+9)}$

12. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{ie^{-i}}{i+1}$

13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$

14. $\displaystyle\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 27} + \frac{1}{4 \cdot 81} + \cdots$

En los problemas 15-28, utilice la prueba de comparación del límite para determinar si la serie dada converge.

15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+7}$

16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10+\sqrt{k}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n+2}{3n^5+n^2}$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(4n+1)^{3/2}}$

21. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt[3]{64k^9+40}}$

22. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5k^2-k}{2k^3+2k^2-8}$

23. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+\ln k}{k^3+2k-1}$

24. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{e^k-2}$

25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

26. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right)^k$

28. $\displaystyle\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \cdots$

En los problemas 29-40, utilice cualquier prueba apropiada para determinar si la serie dada converge.

29. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{100\sqrt{k^2+1}}$

30. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$

31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(5+\frac{k}{5}\right)$

32. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{3^k}\right)$

33. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2+1)^2}$

34. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k-1}\sqrt[3]{k^2-2}}$

35. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9+\operatorname{sen}^2 k}$

36. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{3^{2k}-1}$

37. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2+k2^k}$

38. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2+k2^{-k}}$

39. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

40. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(0.9)^k}{k}$

☰ Piense en ello

41. Vuelva a leer *ii)* de las *Notas desde el aula* en la página anterior y discuta las razones por las que el siguiente enunciado es cierto:

Si $a_k > 0$ para todo k y $\sum a_k$ converge, entonces $\sum a_k^2$ converge.

42. Suponga que p y q son funciones polinomiales sin factores comunes de grado n y m, respectivamente, y que $p(x)/q(x) > 0$ para $x > 0$. Discuta: ¿Bajo qué condiciones convergerá la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p(k)/q(k)$?

43. Analice si el siguiente enunciado es verdadero o falso:

Si $a_k < b_k$ para todo k y $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.

44. Demuestre que si la serie $\sum a_k$ de términos positivos converge, entonces $\sum \ln(1+a_k)$ converge.

En los problemas 45 y 46, determine si la serie dada converge.

45. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}}$

46. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+k}$

47. La representación decimal de un número real positivo es una serie infinita:

$$0.a_1a_2a_3a_4\ldots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots,$$

donde a_i representa uno de los 10 enteros no negativos 0, 1, 2, . . . , 9. Demuestre que la serie de la forma

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

siempre es convergente.

☰ Proyecto

48. **¿Cuán grande es infinito?** La prueba de la integral puede usarse para verificar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.0001}}$ converge, en tanto que $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ diverge. Sin embargo, con la ayuda de un SAC se observa a partir de las gráficas de $y = 1/x^{1.0001}$ y $y = 1/(x \ln x)$ en la FIGURA 4.5.1 que

$$\frac{1}{k \ln k} < \frac{1}{k^{1.0001}}$$

para $2 \le k \le 15\,000$. De hecho, la desigualdad anterior es cierta para $2 \le k \le 99\,999\,999 \times 10^{99}$. ¿Entonces por qué $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ no converge por la prueba de comparación directa?

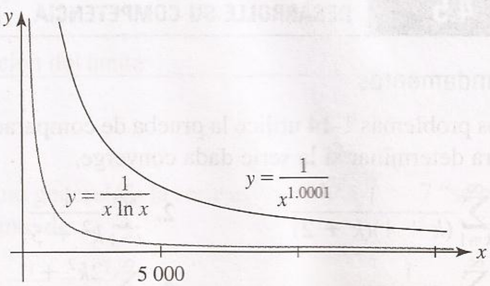


FIGURA 4.5.1 Gráfica para el problema 48

4.6 Pruebas de las proporciones y de la raíz

Introducción En esta sección, como en la anterior, las pruebas que se consideran son aplicables a series infinitas de *términos positivos*.

Prueba de las proporciones La primera de estas pruebas emplea el límite del cociente entre el primer término $(n+1)$ y el término n-ésimo de la serie. Esta prueba es especialmente útil cuando a_k implica factoriales, potencias k-ésimas de una constante y, algunas veces, potencias k-ésimas de k.

Teorema 4.6.1 Prueba de las proporciones

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

i) Si $L < 1$, la serie es convergente.
ii) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
iii) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

DEMOSTRACIÓN

i) Sea r un número positivo tal que $0 \leq L \leq r \leq 1$. Para n suficientemente grande, $n \geq N$ para algún entero positivo N, $a_{n+1}/a_n < r$; esto es, $a_{n+1} < ra_n$, $n \geq N$. La última desigualdad implica

$$a_{N+1} < ra_N$$
$$a_{N+2} < ra_{N+1} < a_N r^2$$
$$a_{N+3} < ra_{N+2} < a_N r^3,$$

y así sucesivamente. De tal modo la serie $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ converge por comparación con la serie geométrica convergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_N r^k$. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ difiere de $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ a lo sumo un número finito de términos, se concluye que la primera serie también converge.

ii) Sea r un número finito tal que $1 < r < L$. Entonces para n suficientemente grande, $n \geq N$ para algún entero positivo N, $a_{n+1}/a_n > r$ o $a_{n+1} > ra_n$. Para $r > 1$ esta última desigualdad implica $a_{n+1} > a_n$, y por ello $\lim_{x\to\infty} a_n \neq 0$. Del teorema 4.3.3 concluimos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge. ■

En el caso en que $L = 1$, debemos aplicar otra prueba a la serie para determinar su convergencia o divergencia.

EJEMPLO 1 Empleo de la prueba de las proporciones

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$.

Solución Se identifica que $a_n = 5^n/n!$ y por ello $a_{n+1} = 5^{n+1}/(n+1)!$. Luego se forma el cociente de a_{n+1} y a_n, se simplifica y se toma el límite cuando $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n}\\ &= \lim_{n\to\infty} 5\frac{n!}{(n+1)!}\\ &= \lim_{n\to\infty} 5\frac{n!}{n!(n+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0.\end{aligned}$$

◀ Repase las propiedades del factorial en la sección 4.1. Vea (4) y (5) en esa sección.

Puesto que $L = 0 < 1$, se concluye del teorema 4.6.1*i)* que la serie es convergente. ■

EJEMPLO 2 Empleo de la prueba de las proporciones

Examinar la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$.

Solución En este caso se tiene que $a_n = n^n/n!$ y $a_{n+1} = (n+1)^{n+1}/(n+1)!$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{n^n}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \leftarrow \text{Este límite es la definición de } e.\end{aligned}$$

Puesto que $L = e > 1$, se concluye del teorema 4.6.1*ii*) que la serie es divergente. ■

Prueba de la raíz Si los términos de una serie $\sum a_k$ consisten sólo en potencias k-ésimas, entonces puede aplicarse la siguiente prueba, la cual implica tomar la raíz n-ésima del término n-ésimo.

Teorema 4.6.2 Prueba de la raíz

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = L.$$

i) Si $L < 1$, la serie es convergente.
ii) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
iii) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

La demostración de la prueba de la raíz es muy similar a la prueba de las proporciones y no se presentará.

EJEMPLO 3 Empleo de la prueba de la raíz

Examinar la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{k}\right)^k$.

Solución Se identifica primero $a_n = (5/n)^n$, y después se calcula el límite cuando $n \to \infty$ de la raíz n-ésima de a_n:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{5}{n}\right)^n\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0.$$

Puesto que $L = 0 < 1$, se concluye del teorema 4.6.2*i*) que la serie converge. ■

NOTAS DESDE EL AULA

i) La prueba de las proporciones siempre producirá un caso no conclusivo cuando se aplique a una serie p. Inténtelo con la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ y vea lo que ocurre.

ii) Las pruebas examinadas en ésta y en las dos secciones anteriores indican cuando una serie tiene una suma, pero ninguna de estas pruebas da alguna pista respecto a lo que es la suma real. Sin embargo, al saber que una serie converge, es posible sumar cinco, cien o mil términos en una computadora para obtener una aproximación de la suma.

4.6 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-9.

Fundamentos

En los problemas 1-16, recurra a la prueba de las proporciones para determinar si la serie dada converge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1\,000^k}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k$
5. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{10}}{(1.1)^j}$
6. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^5(0.99)^j}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{n3^{n-2}}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 2^{n+3}}{7^{n-1}}$
9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!}$
10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(2k)^k}$
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{99^k(k^3+1)}{k^2 10^{2k}}$
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^{k^2}}$
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^k}$
14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!3^k}{k^k}$
15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{k!}$
16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}$

En los problemas 17-24, utilice la prueba de la raíz para determinar si la serie dada converge.

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$
18. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ke}{k+1}\right)^k$
19. $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{\ln k}\right)^k$
20. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$
21. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$
22. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{k}\right)^{k^2}$
23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^{2k+1}}{k^k}$
24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{e^{k+1}}$

En los problemas 25-32, use cualquier prueba apropiada para determinar si la serie dada converge.

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k}{k^3+2k+1}$
26. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{2k+1}\right)^k$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{e^n}$
29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k k!}{(k+1)!}$
30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k+k}$
31. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k+4^k}$
32. $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{6}+\cdots$

En los problemas 33 y 34, recurra a la prueba de las proporciones para determinar los valores no negativos de p para los cuales la serie dada converge.

33. $\sum_{k=1}^{\infty} kp^k$
34. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{2}{p}\right)^k$

En los problemas 35 y 36, determine todos los valores reales de p para los cuales la serie dada converge.

35. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p}{k!}$
36. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^p}$

37. En los problemas 78 y 79 de los ejercicios 4.1 se vio que la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots,$$

está definida por la fórmula de recursión $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, donde $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.

a) Verifique que el término general de la sucesión es

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

mostrando que este resultado satisface la fórmula de recursión.

b) Utilice el término general en el inciso *a)* para calcular F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5.

38. Sea F_n el término general de la sucesión de Fibonacci dada en el problema 37. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

39. Explique cómo el resultado del problema 38 demuestra que la serie

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$$

converge.

40. **Un poco de historia** En 1985, William Gosper utilizó la siguiente identidad para calcular los primeros 17 millones de dígitos de π:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9\,801}\sum_{n=0}^{\infty}(1\,103 + 26,390n)\frac{(4n)!}{(n!)^4(4\cdot 99)^{4n}}.$$

Esta identidad fue descubierta en 1920 por el matemático indio **Srinivasa Ramanujan** (1887-1920). Ramanujan fue notable por su excepcional conocimiento en el manejo de manipulaciones y cálculos algebraicos extremadamente complejos.

a) Verifique que la serie infinita converge.

b) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π produce el primer término de la serie?

c) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π producen los dos primeros términos de la serie?

4.7 Series alternantes

Introducción En las últimas tres secciones se consideraron pruebas para la convergencia que resultaron aplicables sólo para series con términos positivos. En la presente discusión se consideran series en las cuales los términos se alternan entre números positivos y negativos, esto es, las series tienen la forma

Una serie geométrica tal como $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ es una serie alternante. Vea el ejemplo 4 en la sección 4.3.

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \tag{1}$$

o

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k, \tag{2}$$

donde $a_k > 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Las series (1) y (2) se dice que son **series alternantes**. Ya se encontró un tipo especial de serie alternante en la sección 4.3, pero en esta sección se examinarán las propiedades de series alternantes generales y las pruebas de su convergencia. Debido a que la serie (2) es sólo un múltiplo de (1), se confinará la discusión a la última serie.

EJEMPLO 1 Serie alternante

Las series

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

y

$$\frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 4}{16} - \frac{\ln 5}{32} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln k}{2^k},$$

son ejemplos de series alternantes. ■

Prueba de la serie alternante La primera serie en el ejemplo 1, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, se denomina **serie armónica alternante**. Aunque la serie armónica

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

es divergente, la introducción de términos positivos y negativos en la sucesión de sumas parciales para la serie armónica alternante es suficiente para producir una serie convergente. Se demostrará que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge por medio de la siguiente prueba.

Teorema 4.7.1 Prueba de la serie alternante

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $0 < a_{k+1} \le a_k$ para todo entero positivo k, entonces la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converge.

La condición $0 < a_{k+1} \le a_k$ significa que $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_k \ge a_{k+1} \ge \cdots$

DEMOSTRACIÓN Considere las sumas parciales que contienen $2n$ términos:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \end{aligned} \tag{3}$$

Puesto que la suposición $0 < a_{k+1} \le a_k$ implica $a_k - a_{k+1} \ge 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ tenemos

$$S_2 \le S_4 \le S_6 \le \cdots \le S_{2n} \le \cdots.$$

De tal modo, la sucesión $\{S_{2n}\}$, cuyo término general S_{2n} contiene un número par de términos de la serie, es una sucesión monótona. Al reescribir (3) como

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - a_{2n}$$

demuestre que $S_{2n} < a_1$ para todo entero positivo n. En consecuencia, $\{S_{2n}\}$ está acotada. Por el teorema 4.2.1 se concluye que $\{S_{2n}\}$ converge a un límite S. Ahora,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

implica que $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S$. Esto muestra que la sucesión de sumas parciales $\{S_{2n+1}\}$, cuyo término general S_{2n+1} contiene un número impar de términos, también converge a S. Como $\{S_{2n}\}$ y $\{S_{2n+1}\}$ convergen a S, se concluye que $\{S_n\}$ converge a S. ■

EJEMPLO 2 Serie armónica alternante

Demuestre que la serie armónica alternante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.

Solución Con la identificación $a_n = 1/n$ tenemos de inmediato

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Además, puesto que

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$$

para $k \geq 1$ se tiene $0 < a_{k+1} \leq a_k$. Se concluye del teorema 4.7.1 que la serie armónica alternante converge. ■

EJEMPLO 3 Serie alternante divergente

La serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{3k-1}$ diverge, ya que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}.$$

Este último resultado indica que

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3n-1}$$

no existe. Recuerde del teorema 4.3.2 que es necesario que el último límite sea 0 para la convergencia de la serie. ■

Aunque demostrar que $a_{k+1} \leq a_k$ quizá sea una tarea directa, éste muchas veces no es el caso.

EJEMPLO 4 Uso de la prueba de la serie alternante

Pruebe la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$.

Solución Para demostrar que los términos de la serie satisfacen las condiciones $a_{k+1} \leq a_k$, se considerará la función $f(x) = \sqrt{x}/(x+1)$ para la cual $f(k) = a_k$. De la derivada, se observa que

$$f'(x) = -\frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0 \quad \text{para} \quad x > 1,$$

y, en consecuencia, la función f decrece para $x > 1$. De tal modo, $a_{k+1} \leq a_k$ es cierta para $k \geq 1$. Además, la regla de L'Hôpital muestra que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{y por ello} \quad \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Por consiguiente, la serie dada converge por el método de la serie alternante. ■

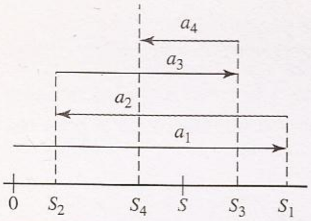


FIGURA 4.7.1 Sumas parciales sobre la recta numérica

Aproximación de la suma de una serie alternante Suponga que la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converge al número S. Las sumas parciales

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 - a_2, \quad S_3 = a_1 - a_2 + a_3, \quad S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \ldots$$

pueden representarse sobre una línea numérica como se muestra en la FIGURA 4.7.1. La sucesión $\{S_n\}$ converge de la manera ilustrada en la figura 4.1.1c); esto es, los términos S_n se acercan a S cuando $n \to \infty$ aunque oscilan a ambos lados de S. Como se indica en la figura 4.7.1, las sumas parciales con número par son menores que S y las sumas parciales con número impar son mayores que S. De manera aproximada, las sumas parciales numeradas par se incrementan hacia el número S y, a su vez, las sumas parciales numeradas impar disminuyen hacia S. Debido a ello, *la suma S de la serie debe ubicarse entre sumas parciales consecutivas S_n y S_{n+1}*:

$$S_n \leq S \leq S_{n+1}, \quad \text{para } n \text{ par,} \tag{4}$$

y

$$S_{n+1} \leq S \leq S_n, \quad \text{para } n \text{ impar.} \tag{5}$$

En este caso (4) produce $0 \leq S - S_n \leq S_{n+1} - S_n$ para n par, y (5) implica que $0 \leq S_n - S \leq S_n - S_{n+1}$ para n impar. De este modo, en cualquier caso $|S_n - S| \leq |S_{n+1} - S_n|$.

Pero $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ para n par y $S_{n+1} - S_n = -a_{n+1}$ para n impar. Así, $|S_n - S| \leq a_{n+1}$ para toda n. Se enuncia este resultado como el siguiente teorema.

Teorema 4.7.2 Cota de error para una serie alternante

Suponga que la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, $a_k > 0$, converge hacia un número S. Si S_n es la suma parcial n-ésima de la serie y $a_{k+1} \leq a_n$ para todo k, entonces

$$|S_n - S| \leq a_{n+1}$$

para toda n.

El teorema 4.7.2 es útil para aproximar la suma de una serie alternante convergente. Señala que el **error** $|S_n - S|$ entre la n-ésima suma parcial y la serie es menor que el valor absoluto del primer término $(n + 1)$ de la serie.

EJEMPLO 5 Aproximación de la suma de una serie

Aproxime la suma de la serie convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}$ hasta cuatro lugares decimales.

Solución Primero, observamos que $a_n = 1/(2n)!$. El teorema 4.7.2 indica que debe tenerse

$$a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!} < 0.00005$$

para aproximar la suma de la serie hasta cuatro lugares decimales. Ahora a partir de

$$n = 1, \quad a_2 = \frac{1}{4!} \approx 0.041667$$

$$n = 2, \quad a_3 = \frac{1}{6!} \approx 0.001389$$

$$n = 3, \quad a_4 = \frac{1}{8!} \approx 0.000025 < 0.00005$$

se ve que $|S_3 - S| \leq a_4 < 0.00005$. Por tanto,

$$S_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} \approx 0.4597$$

tiene la exactitud deseada. ■

Convergencia absoluta y condicional Una serie que contiene signos mezclados tal como

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^6--++\cdots \qquad (6)$$

no es estrictamente de la forma dada en (1) y por ello no se clasifica como una serie alternante. El teorema 4.7.1 no es aplicable a este tipo de serie. No obstante, veremos que la serie (6) es convergente *debido a que* la serie de valores absolutos

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots \qquad (7)$$

◀ Dé un vistazo adelante y lea las dos oraciones que siguen inmediatamente al ejemplo 7.

es convergente (una serie geométrica con $r=\frac{2}{3}<1$). La serie (6) es un ejemplo de una serie que es **absolutamente convergente**.

En la siguiente definición se está dejando que el símbolo $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ represente *cualquier* serie (los términos a_k podrían alternar como en (1) o contener signos mezclados); los signos pueden seguir cualquier regla [como en (6)] o no.

Definición 4.7.1 Convergencia absoluta

Una serie $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ se dice que es **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ converge.

EJEMPLO 6 Convergencia absoluta

La serie alternante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{1+k^2}$ es absolutamente convergente, puesto que se mostró que la serie de valores absolutos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{1+k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}$$

era convergente por la prueba de la integral en el ejemplo 1 de la sección 4.4. ■

Definición 4.7.2 Convergencia condicionada

Se dice que una serie $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ es **convergente de manera condicional** si $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ converge pero la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ diverge.

EJEMPLO 7 Convergencia condicional

En el ejemplo 2 vimos que la serie armónica alternante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es convergente. Pero al tomar el valor absoluto de cada término se obtiene la serie armónica divergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Por ello, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es convergente de manera condicional. ■

El siguiente resultado muestra que toda serie absolutamente convergente es también convergente. Por esta razón es que la serie en (6) converge.

Teorema 4.7.3 La convergencia absoluta implica convergencia

Si $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ converge.

DEMOSTRACIÓN Si se define $c_k = a_k + |a_k|$, entonces $c_k \le 2|a_k|$. Puesto que $\sum |a_k|$ converge, se sigue de la prueba de comparación que $\sum c_k$ converge. Además, $\sum (c_k - |a_k|)$ converge, ya que tanto $\sum c_k$ como $\sum |a_k|$ convergen. Pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - |a_k|).$$

Por tanto, $\sum a_k$ converge. ■

Advierta que $\sum |a_k|$ es una serie de términos positivos, y por ello las pruebas de la sección anterior pueden utilizarse para determinar si una serie converge absolutamente.

EJEMPLO 8 La convergencia absoluta implica convergencia

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2} = \frac{\operatorname{sen} 1}{1} + \frac{\operatorname{sen} 2}{4} + \frac{\operatorname{sen} 3}{9} + \frac{\operatorname{sen} 4}{16} + \cdots$$

contiene términos positivos y negativos puesto que

$$\operatorname{sen} 1 > 0, \quad \operatorname{sen} 2 > 0, \quad \operatorname{sen} 3 > 0, \quad \operatorname{sen} 4 < 0, \quad \operatorname{sen} 5 < 0, \quad \operatorname{sen} 6 < 0,$$

y así sucesivamente. De la trigonometría se sabe que $|\operatorname{sen} k| \le 1$ para todo k. Por tanto,

$$\left|\frac{\operatorname{sen} k}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}$$

para todo k. Por la prueba de comparación directa, teorema 4.5.1, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$ converge puesto que es dominada por la serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Por consiguiente, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$ es absolutamente convergente, y en virtud de ello por el teorema 4.7.3 converge. ■

Pruebas de las proporciones y de la raíz Las siguientes formas modificadas de la prueba de las proporciones y de la prueba de la raíz se aplican directamente a una serie alternante.

Teorema 4.7.4 Prueba de las proporciones

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos distintos de cero tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$$

i) Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.
ii) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
iii) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

EJEMPLO 9 Empleo de la prueba de las proporciones

Examine la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{k3^k}$.

Solución Con $a_n = (-1)^{n+1} 2^{2n-1}/(n3^n)$, observamos que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+2} 2^{2n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{n3^n}{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3(n+1)} = \frac{4}{3}$$

Puesto que $L = \frac{4}{3} > 1$, veremos por el teorema 4.7.4*ii*) que la serie alternante diverge. ■

Teorema 4.7.5 Prueba de la raíz

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = L.$$

i) Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.

ii) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.

iii) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

Rearreglo de términos Cuando trabajamos con una serie *finita* de términos tales como

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6, \tag{8}$$

cualquier rearreglo del orden de los términos, tal como

$$-a_2 + a_1 - a_4 + a_3 - a_6 + a_5$$

o

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6)$$

tiene la misma suma que la original (8). Este tipo de manipulación despreocupada de términos no lleva a una serie *infinita*:

- Si los términos de una serie convergente de manera condicional se escriben en un orden diferente, la nueva serie puede diverger o converger hacia un número por completo diferente.

De hecho, es posible demostrar que mediante un rearreglo adecuado de sus términos, una serie convergente de manera condicional puede hacerse converger a un número real r predeterminado.

En contraste, un rearreglo de los términos de una serie absolutamente convergente no afecta su suma:

- Si una serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente, entonces los términos de la serie pueden rearreglarse en cualquier manera y la serie resultante convergerá al mismo número que la serie original.

Por ejemplo, la serie geométrica $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ es absolutamente convergente y su suma es $\frac{3}{4}$. El rearreglo $-\frac{1}{3} + \frac{1}{1} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \cdots$ de la serie geométrica *no* es una serie geométrica, aunque la serie rearreglada converge y su suma es $\frac{3}{4}$. Vea los problemas 53-56 en los ejercicios 4.7.

Σ NOTAS DESDE EL AULA

i) La conclusión del teorema 4.7.1 sigue siendo válida cuando la hipótesis "$a_{k+1} \le a_k$ para todo k positivo" se sustituye con el enunciado "$a_{k+1} \le a_k$ para k suficientemente grande". Para la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (\ln k)/k^{1/3}$, se muestra de inmediato por medio del procedimiento utilizado en el ejemplo 4 que $a_{k+1} \le a_k$ para $k \ge 21$. Además, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. En consecuencia, la serie converge por la prueba de la serie alternante.

ii) Si la serie de valores absolutos $\sum |a_k|$ resulta divergente, entonces no es posible establecer ninguna conclusión relativa a la convergencia o divergencia de la serie $\sum a_k$.

4.7 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-9.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-14 utilice la prueba de la serie alternante para determinar si la serie dada converge.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{k+1}$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{k}{k^2+1}$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2+2}{k^3}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3k-1}{k+5}$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{3^k}\right)$ **8.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+1}{4^k}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4\sqrt{n}}{2n+1}$ **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\cos n\pi)\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ **12.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\sqrt{k^2+1}}{k^3}$

13. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{\ln k}$ **14.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{\ln k}$

En los problemas 15-34, determine si la serie dada es absolutamente convergente, convergente de manera condicional o divergente.

15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ **16.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k+5}}$

17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ **18.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}}{3^k}$

19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{5^k}$ **20.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}(k2^{-k})^2$

21. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}$ **22.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$

23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k!}{100^k}$ **24.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{5^{2k-3}}{10^{k+2}}$

25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k}{1+k^2}$ **26.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{1+k^4}$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\pi$ **28.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)}{\sqrt{k+1}}$

29. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$ **30.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right]$ **32.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\left[\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right]$

33. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\left(\frac{2k}{k+50}\right)^k$ **34.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{6^{3k}}{k^k}$

En los problemas 35 y 36, aproxime la suma de la serie convergente al número indicado de lugares decimales.

35. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}$; cinco **36.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$; tres

En los problemas 37 y 38, encuentre el entero positivo n más pequeño de modo que S_n aproxime la suma de la serie convergente al número indicado de lugares decimales.

37. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$; dos **38.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$; tres

En los problemas 39 y 40, aproxime la suma de la serie convergente de manera que el error sea menor que la cantidad indicada.

39. $1-\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{4^3}-\dfrac{1}{4^4}+\cdots;\quad 10^{-3}$

40. $1-\dfrac{2}{5^2}+\dfrac{3}{5^3}-\dfrac{4}{5^4}+\cdots;\quad 10^{-4}$

En los problemas 41 y 42, estime el error de usar la suma parcial indicada como una aproximación a la suma de la serie convergente.

41. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k};\ S_{100}$ **42.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k2^k};\ S_6$

En los problemas 43-48, indique por qué la prueba de la serie alternante no es aplicable a la serie dada. Determine si la serie converge.

43. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(k\pi/6)}{\sqrt{k^4+1}}$ **44.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{100+(-1)^k 2^k}{3^k}$

45. $1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}--++\cdots$

46. $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{36}---+++\cdots$

47. $\dfrac{2}{1}-\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{4}+\cdots$

[*Sugerencia*: Considere las sumas parciales S_{2n} para $n = 1, 2, 3, \ldots$]

48. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-----\cdots$

En los problemas 49-52, determine si la serie dada converge.

49. $1-1+1-1+\cdots$

50. $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$

51. $1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$

52. $1+(-1+1)+(-1+1-1)+\cdots$

≡ Piense en ello

53. Vuelva a leer la discusión previa a *Notas desde el aula* de esta sección. Explique después por qué el siguiente enunciado es cierto:

Si una serie de términos positivos $\sum a_k$ es convergente, entonces los términos de la serie pueden rearreglarse de cualquier manera y la serie que resulta converge al mismo número que la serie original.

54. Suponga que S es la suma de la serie armónica alternante convergente $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$. Demuestre que el rearreglo de la serie

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\cdots$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)\cdots$$

produce $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$.

55. Utilice $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ y el resultado del problema 54 en la forma

$$\frac{1}{2}S=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots$$

para demostrar que la suma de otro rearreglo de términos de la serie armónica alternante es

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

56. La serie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ es una serie geométrica absolutamente convergente. Demuestre que su rearreglo $\frac{1}{3} + \frac{1}{1} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \cdots$ es convergente. Intente con la prueba de las proporciones y con la prueba de la raíz. [*Sugerencia*: Examine $3^{k+(-1)^k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$]

57. Si $\sum a_k$ es absolutamente convergente, pruebe que $\sum a_k^2$ converge. [*Sugerencia*: Para n suficientemente grande, $|a_n| < 1$. ¿Por qué?]

58. Proporcione un ejemplo de una serie convergente $\sum a_k$ para la cual $\sum a_k^2$ diverge.

59. Proporcione un ejemplo de una serie convergente $\sum a_k$ para la cual $\sum a_k^2$ converge.

60. Dé un ejemplo de una serie divergente $\sum a_k$ para la cual $\sum a_k^2$ converge.

61. Explique por qué la serie

$$e^{-x}\operatorname{sen} x + e^{-2x}\operatorname{sen} 2x + e^{-3x}\operatorname{sen} 3x + \cdots$$

converge para todo valor positivo de x.

4.8 Series de potencias

Introducción En matemáticas aplicadas es común trabajar con la serie infinita de funciones,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(x) = c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots \tag{1}$$

Los coeficientes c_k son constantes que dependen de k y las funciones $u_k(x)$ podrían ser diversos tipos de polinomios o incluso funciones seno y coseno. Cuando se especifica la variable x, por ejemplo $x = 1$, entonces la serie se reduce a una serie de constantes. La convergencia de una serie tal como (1) dependerá, desde luego, de la variable x, con la serie convergiendo usualmente para algunos valores de x mientras que divergirá para otros valores. En ésta y en la siguiente sección se considerarán series infinitas (1) donde las funciones $u_k(x)$ son polinomios $(x - a)^k$. Estudiaremos las propiedades de este tipo de series y se demostrará cómo determinar los valores de x para los cuales la serie converge.

Series de potencias Una serie que contiene potencias enteras no negativas de $(x - a)^k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots, \tag{2}$$

recibe el nombre de **serie de potencias en $x - a$**. Se dice que la serie de potencias (2) está **centrada en a** o tiene **centro a**. Un importante caso especial de (2), cuando $a = 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots, \tag{3}$$

se denomina serie de **potencias en x**. La serie de potencias en (3) está centrada en 0. Un problema que enfrentaremos en esta sección es:

- Encontrar los valores de x para los cuales una serie de potencias converge.

Observe que (2) y (3) convergen a c_0 cuando $x = a$ y $x = 0$, respectivamente.

◀ Es conveniente definir $(x - a)^0 = 1$ y $x^0 = 1$ incluso cuando $x = a$ y $x = 0$, respectivamente.

EJEMPLO 1 Serie de potencias centrada en 0

La serie de potencias en x donde los coeficientes $c_k = 1$ para todo k,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

se reconoce como una serie geométrica con el mismo cociente común $r = x$. Por el teorema 4.3.1, la serie converge para aquellos valores de x que satisfacen $|x| < 1$ o $-1 < x < 1$. La serie diverge para $|x| \geq 1$, esto es, para $x \leq -1$ o $x \geq 1$. ■

En general, la prueba de las proporciones, como se establece en el teorema 4.7.4, es especialmente útil al determinar los valores de x para los cuales una serie de potencias converge. La prueba de la raíz, en la forma del teorema 4.7.5, también es útil pero en menor grado.

EJEMPLO 2 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{2^k(k+1)^2}$.

Solución Con la identificación de que $a_n = x^n/(2^n(n+1)^2)$ se usa la prueba de las proporciones, teorema 4.7.4,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)^2}\cdot\frac{2^n(n+1)^2}{x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\frac{|x|}{2} \quad \leftarrow \text{divida entre } n \text{ el numerador y el denominador del primer término} \\ &= \frac{|x|}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+1/n}{1+2/n}\right)^2 = \frac{|x|}{2}.\end{aligned}$$

Del inciso *i*) del teorema 4.7.4, se tiene convergencia absoluta siempre que este límite sea estrictamente menor que 1. De tal modo, la serie es absolutamente convergente para aquellos valores de x que satisfacen $|x|/2 < 1$ o $|x| < 2$. Puesto que la desigualdad de valor absoluto $|x| < 2$ es equivalente a $-2 < x < 2$, advertimos que la serie dada convergerá para cualquier número x en el intervalo abierto $(-2, 2)$. Sin embargo, si $|x|/2 = 1$, o $|x| = 2$, o cuando $x = 2$ o $x = -2$, entonces la prueba de las proporciones no brinda información. Es necesario efectuar verificaciones independientes de la serie dada para la convergencia en estos puntos extremos. Al sustituir 2 por x la serie se convierte en

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2},$$

que es convergente por comparación directa con la serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$. De manera similar, al sustituir -2 por x se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2},$$

que es convergente por la prueba de la serie alternante, teorema 4.7.1. Concluimos que la serie dada converge para toda x en el intervalo cerrado $[-2, 2]$. La serie diverge para $x < -2$ y $x > 2$, o equivalentemente, para $|x| > 2$. ■

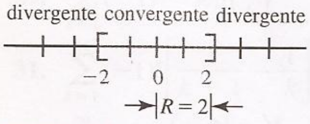


FIGURA 4.8.1 El conjunto de números x para los cuales la serie en el ejemplo 2 converge se muestra al centro

Intervalo de convergencia En la FIGURA 4.8.1 se ha ilustrado el conjunto $[-2, 2]$ de todos los números reales x para los cuales la serie en el ejemplo 2 converge y el conjunto $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ de números x para los cuales la serie diverge. El conjunto de números para los cuales la serie converge es un intervalo centrado en 0 (el centro de la serie). Como se muestra en la figura, el radio de este intervalo es $R = 2$. En general, el conjunto de *todos* los números reales x para los cuales converge una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ se dice que es su **intervalo de convergencia**. El centro del intervalo de convergencia es el centro a de la serie. El radio R del intervalo de convergencia se denomina **radio de convergencia**.

El siguiente teorema, que se presenta sin demostración, resume todas las maneras posibles en las que puede converger una serie de potencias.

Teorema 4.8.1 Convergencia de una serie de potencias

Para una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ exactamente uno de los siguientes puntos es cierto:

i) La serie converge sólo en el *número* $x = a$.

ii) La serie converge absolutamente para *todos los números reales* x.

iii) La serie converge absolutamente para los *números* x *en un intervalo finito* $(a - R, a + R)$, $R > 0$, y diverge para los números en el conjunto $(-\infty, a - R) \cup (a + R, \infty)$. En un punto extremo del intervalo finito, $x = a - R$ o $x = a + R$, la serie puede converger absolutamente, converger de manera condicional o divergir.

Desde luego en *ii*) y en *iii*), cuando la serie de potencias converge absolutamente a un número x, sabemos, por el teorema 4.7.3, que converge. En *i*) del teorema 4.8.1 el intervalo de convergencia consiste de un elemento $\{a\}$ y afirmamos que la serie tiene **radio de convergencia $R = 0$**. En *ii*) del teorema 4.8.1, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$ y la serie tiene **radio**

de convergencia $R = \infty$. Por último, en *iii)* del teorema 4.8.1, hay cuatro posibilidades para el intervalo de convergencia con **radio de convergencia $R > 0$**:

$$(a - R, a + R), \quad [a - R, a + R], \quad (a - R, a + R] \quad \text{o} \quad [a - R, a + R).$$

Vea la FIGURA 4.8.2.

Como en el ejemplo 1, si $R > 0$, debe manejarse la cuestión de convergencia en un punto extremo $x = a \pm R$ al sustituir estos números en la serie dada y *reconociendo* después la serie resultante como convergente o divergente o *probando* la serie que resulta respecto a la convergencia mediante una prueba apropiada diferente a la prueba de las proporciones. Recuerde que:

- La prueba de las proporciones siempre es no conclusiva en un punto extremo $x = a \pm R$.

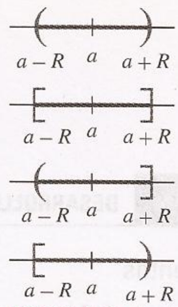


FIGURA 4.8.2 Posibles intervalos finitos de convergencia con $R > 0$

EJEMPLO 3 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Solución Por la prueba de las proporciones, teorema 4.7.4, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1}.$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty} |x|/(n+1) = 0$ para cualquier elección de x, la serie converge absolutamente para todo número real. De tal modo, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$ y el radio de convergencia es $R = \infty$. ∎

EJEMPLO 4 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k3^k}$.

Solución Por la prueba de las proporciones, teorema 4.7.4, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{n3^n}{(x-5)^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \frac{|x-5|}{3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/n} \right) \frac{|x-5|}{3} = \frac{|x-5|}{3}. \end{aligned}$$

La serie converge absolutamente si $|x - 5|/3 < 1$ o $|x - 5| < 3$. Esta desigualdad de valores absolutos produce el intervalo abierto $(2, 8)$. En $x = 2$ y $x = 8$, los puntos extremos del intervalo, obtenemos, a su vez,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

La primera serie es
$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots$
o $(-1)[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots]$
◀ La serie entre corchetes es la serie armónica alternante convergente.

La primera serie es un múltiplo de la serie armónica alternante y por ello es convergente, la segunda serie es la serie armónica divergente. Consecuentemente, el intervalo de convergencia es $[2, 8)$. El radio de convergencia es $R = 3$. La serie diverge si $x < 2$ o $x \geq 8$. Vea la FIGURA 4.8.3. ∎

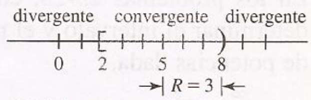


FIGURA 4.8.3 Intervalo de convergencia del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=1}^{\infty} k!(x + 10)^k$.

Solución De la prueba de las proporciones,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!(x+10)^{n+1}}{n!(x+10)^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} (n+1)|x+10| \end{aligned}$$

se observa que el límite cuando $n \to \infty$ sólo puede existir si $|x + 10| = 0$, a saber, cuando $x = -10$. De tal manera,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \begin{cases} \infty, & x \neq -10 \\ 0, & x = -10. \end{cases}$$

La serie diverge para todo número real x, *excepto* $x = -10$. En $x = -10$, obtenemos una serie convergente que consta sólo de ceros. El intervalo de convergencia es el conjunto $\{10\}$ y el radio de convergencia es $R = 0$. ■

4.8 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-10.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-24, recurra a la prueba de las proporciones para encontrar el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} x^k$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^3}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+7)^k}{\sqrt{k}}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k}(x-5)^k$
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2}(x-4)^k$
9. $\sum_{k=0}^{\infty} k!2^k x^k$
10. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k^{2k}} x^k$
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^k}{k^2+k}$
12. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x-5)^k}{3^k}$
13. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\ln k}$
14. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k \ln k}$
15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^{2k}}(x+7)^k$
16. $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 2^{4k}(x-1)^k$
17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{5k}}{5^{2k}}\left(\frac{x}{3}\right)^k$
18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\,000^k}{k^k} x^k$
19. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{(k+1)(k+2)}(x-1)^k$
20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(-2)^k k(k+1)}(x+5)^k$
21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^k$
22. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6-x)^{k+1}}{\sqrt{2k+1}}$
23. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{9^k} x^{2k+1}$
24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{(2k)!} x^{2k}$

En los problemas 25-28, emplee la prueba de la raíz para determinar el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

25. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(\ln k)^k}$
26. $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^k (x+1)^k$
27. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k (x+3)^k$
28. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} (x-e)^k$

En los problemas 29 y 30, encuentre el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^k$
30. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)}{3^k k!}(x-1)^k$

En los problemas 31-38, la serie dada no es una serie de potencias. No obstante, encuentre todos los valores de x para los cuales la serie dada converge.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$
32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^k}{x^{2k}}$
33. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^k$
34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(\frac{x}{x+2}\right)^k$
35. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+2}{6}\right)^{k^2}$
36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(kx)^k}$
37. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}$
38. $\sum_{k=0}^{\infty} k!e^{-kx^2}$
39. Encuentre todos los valores de x en $[0, 2\pi]$ para los cuales $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^k \operatorname{sen}^k x$ converge.
40. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{sen} kx)/k^2$ converge para todos los valores reales de x.

≡ Problemas con calculadora/SAC

41. En los problemas 71 y 72 del ejercicio 1.5 se señaló que algunas funciones importantes en matemáticas aplicadas se definen en términos de integrales no elementales. Algunas de estas funciones especiales de matemáticas aplicadas también se definen mediante series infinitas. La serie de potencias

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}$$

recibe el nombre de **función de Bessel de orden 0**.

a) El dominio de la función $J_0(x)$ es su intervalo de convergencia. Determine el dominio.

b) El valor de $J_0(x)$ se define como la suma de la serie para x en su dominio:

$$J_0(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

donde
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}$$

es el término general de la sucesión de sumas parciales. Emplee una calculadora o SAC y grafique las sumas parciales $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ y $S_4(x)$.

c) Hay varios tipos de funciones de Bessel de diferentes órdenes. $J_0(x)$ es un caso especial de una función más general $J_\nu(x)$ llamada **función de Bessel de primer tipo de orden ν**. Las funciones de Bessel son funciones incorporadas en sistemas algebraicos computarizados tales como *Mathematica* y *Maple*. Emplee un SAC para obtener la gráfica de $J_0(x)$ y compárela con las gráficas de las sumas parciales en el inciso *b*). [*Sugerencia*: En *Mathematica*, $J_0(x)$ se denota por medio de Bessel J[0, *x*].]

4.9 Representación de funciones mediante series de potencias

Introducción Para cada x en su intervalo de convergencia, una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ converge a un número. Por esta razón, una serie de potencias es en sí misma una función, la cual se denota como f, cuyo *dominio* es su intervalo de convergencia. Entonces para cada x en el intervalo de convergencia se define el elemento correspondiente en el *rango* de la función, el valor $f(x)$, como la suma de la serie:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

Los dos siguientes teoremas, que se anuncian sin demostración, responden algunas de las preguntas fundamentales acerca de la diferenciabilidad, integrabilidad y continuidad de una función f definida por una serie de potencias.

Diferenciación de una serie de potencias La función f definida por una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ es diferenciable.

Teorema 4.9.1 Diferenciación de una serie de potencias

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ converge sobre un intervalo $(a-R, a+R)$ para el cual el radio de convergencia R es positivo o ∞, entonces f es diferenciable en cada x en $(a-R, a+R)$, y

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}. \tag{1}$$

El radio de convergencia R de (1) es el mismo que el de la serie original.

El resultado de (1) establece simplemente que una serie de potencias puede diferenciarse *término por término* como se haría para una función polinomial:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}c_0 + \frac{d}{dx}c_1(x-a) + \frac{d}{dx}c_2(x-a)^2 + \cdots + \frac{d}{dx}c_n(x-a)^n + \cdots \\ &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Puesto que (1) es una serie de potencias con un radio de convergencia R, es posible aplicar el teorema 4.9.1 a f' definida en (2). Esto es, puede afirmarse que f' es diferenciable en cada x en $(a-R, a+R)$ y f'' está dada por

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(x-a)^{k-2}.$$

Continuando de esta manera, se concluye que:

- Una función f definida por una serie de potencias sobre $(a-R, a+R)$, $R>0$, o sobre $(-\infty, \infty)$, posee derivadas de todos los órdenes en el intervalo.

El radio de convergencia R de cada serie derivada es el mismo que el de la serie original. Además, puesto que la diferenciabilidad implica continuidad, también tenemos el resultado:

- Una función f definida por una serie de potencias sobre $(a-R, a+R)$, $R>0$, o sobre $(-\infty, \infty)$, es continua en cada x en el intervalo.

Integración de una serie de potencias Como en (1), el proceso de integración de una serie de potencias puede llevarse a cabo término por término:

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int c_0(x-a)^0\,dx + \int c_1(x-a)\,dx + \int c_2(x-a)^2\,dx + \cdots + \int c_n(x-a)^n\,dx + \cdots \\ &= c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \frac{c_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \cdots + C \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + C. \end{aligned}$$

El resultado se resume en el siguiente teorema.

Teorema 4.9.2 Integración de una serie de potencias

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ converge sobre un intervalo $(a-R, a+R)$ para el cual el radio de convergencia R es positivo o ∞, entonces

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + C. \tag{3}$$

El radio de convergencia R de (3) es el mismo que el de la serie original.

Puesto que la función $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ es continua, su integral definida existe y está definida por

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\int_{\alpha}^{\beta}(x-a)^k\,dx\right)$$

para cualesquiera números α y β en $(a-R, a+R)$, $R>0$, o en $(-\infty,\infty)$ si $R=\infty$.

Es recomendable que lea este párrafo varias veces.

En los teoremas 4.9.1 y 4.9.2 se estableció que si la función $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ tiene radio de convergencia $R>0$ o $R=\infty$, entonces la serie obtenida que forma $f'(x)$ e $\int f(x)\,dx$ tiene el mismo radio de convergencia R. Esto *no* significa que la serie de potencias que definen a $f(x)$, $f'(x)$ e $\int f(x)\,dx$ tengan los mismos intervalos de convergencia. Esto no es tan malo como parece. Si el radio de convergencia de la serie que define a $f(x)$, $f'(x)$ e $\int f(x)\,dx$ es $R>0$, entonces los intervalos de convergencia pueden diferir sólo en los puntos extremos del intervalo. Como regla, al diferenciar una función definida por serie de potencias con radio de convergencia $R>0$ *es posible perder* convergencia en un punto final del intervalo. Al integrar una función definida por una serie de potencias con radio de convergencia $R>0$ *puede ganarse* convergencia en un punto extremo del intervalo.

EJEMPLO 1 Intervalo de convergencia

Para la función f definida por $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, encuentre los intervalos de convergencia de

a) $f'(x)$ *b)* $\int f(x)\,dx$.

Solución Se muestra fácilmente de la prueba de las proporciones que el intervalo de convergencia de la serie de potencia que define a f es $[-1, 1)$.

a) La derivada

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{4}$$

se reconoce como una serie geométrica cuyo intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. La serie diferenciada (4) ha perdido convergencia en el punto extremo izquierdo en el intervalo de convergencia de f.

b) La integral de f es

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int \frac{x^k}{k}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)} + C. \tag{5}$$

En $x=-1$ y $x=1$, las series en (5) se convierten, respectivamente, en

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}.$$

La primera serie converge por la prueba de la serie alternante; la segunda converge por la prueba de comparación directa (la serie es dominada por la serie p convergente $\sum 1/k^2$).

Como ambas series convergen, el intervalo de convergencia de (5) es $[-1, 1]$. En este caso, la serie integrada (5) ha ganado convergencia en el punto extremo derecho del intervalo de convergencia de f. ■

Representación de series de potencias de una función Con frecuencia es posible expresar una función f *conocida* o *dada* (tal como e^x o $\tan^{-1} x$) como la suma de una serie de potencias en algún intervalo. En este caso puede afirmarse que la serie es una **representación de f en serie de potencias** sobre el intervalo.

El siguiente ejemplo es importante debido a que conduce a muchos otros resultados.

EJEMPLO 2 Representación de una función por una serie de potencias

Encuentre una representación en serie de potencias de $\dfrac{1}{1-x}$ centrada en 0.

Solución Recuerde que una serie geométrica converge a $a/(1-r)$ si $|r| < 1$:

$$\frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots.$$

Identificando $a = 1$ y $r = x$, observamos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k. \tag{6}$$

La serie converge para $|x| < 1$. El intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. En la FIGURA 4.9.1 se ha desplegado la gráfica de $y = 1/(1-x)$ junto con las gráficas de las sumas parciales $S_2(x)$, $S_5(x)$, $S_8(x)$ y $S_9(x)$ de la serie de potencias (6). Al inspeccionar esta figura, ponga atención sólo en el intervalo $(-1, 1)$. La serie no representa la función fuera de este intervalo. ■

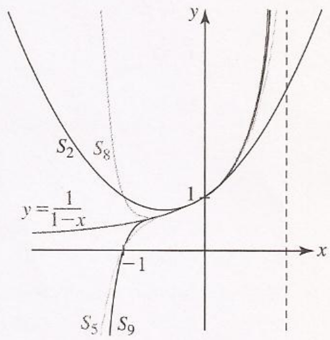


FIGURA 4.9.1 Gráficas de las sumas parciales del ejemplo 2

Al sustituir x por $-x$ en (6), obtenemos una representación de serie de potencias para la función $1/(1+x)$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k. \tag{7}$$

La serie (7) converge para $|-x| < 1$ o $x < 1$. El intervalo de convergencia es otra vez $(-1, 1)$.

Muchas funciones conocidas pueden representarse mediante una serie infinita a través de cierto tipo de manipulación de las series en (6) y en (7). Por ejemplo, podría multiplicarse la serie por una potencia de x, reemplazar x con otra variable o quizá combinar la sustitución de x con otra variable con el proceso de integración (o diferenciación), etcétera.

EJEMPLO 3 Representación de una función por una serie de potencias

Encuentre una representación de serie de potencias de $\dfrac{1}{1+3x}$ centrada en 0.

Solución Al sustituir simplemente el símbolo x por $3x$ en (7) obtenemos

$$\frac{1}{1+3x} = 1 - 3x + (3x)^2 - (3x)^3 + \cdots + (-1)^n(3x)^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 3^k x^k.$$

Esta serie converge cuando $|-3x| < 1$ o $|x| < \frac{1}{3}$. El intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. ■

EJEMPLO 4 Representación de una función por una serie de potencias

Encuentre una representación de series de potencias de $\dfrac{1}{5-x}$ centrada en 0.

Solución Factorizando 5 del denominador,

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5\left(1 - \dfrac{x}{5}\right)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x}{5}},$$

estamos en posibilidad de utilizar (6). Al reemplazar el símbolo x en (6) con $x/5$ obtenemos

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x}{5}} = \frac{1}{5}\left[1 + \frac{x}{5} + \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{5}\right)^5 + \cdots\right]$$

o

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^{k+1}} x^k.$$

La serie converge para $|x/5| < 1$ o $|x| < 5$. El intervalo de convergencia es $(-5, 5)$. ■

Con un poco de habilidad, las representaciones en serie de potencias en (6) y (7) muy a menudo se utilizan para encontrar una representación de serie de potencias de una función centrada en un número a diferente de 0.

EJEMPLO 5 Serie de potencias centrada en 3

Determine una representación de serie de potencia de $\dfrac{1}{1+x}$ centrada en 3.

Solución Puesto que el centro de la potencia va a ser 3, deseamos que la serie de potencias contenga sólo potencias de $x - 3$. Con ese fin, sustraemos y sumamos 3 en el denominador:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x-3+3} = \frac{1}{4+(x-3)}.$$

A partir de este punto, procedemos como en el ejemplo 4, a saber: factorizamos 4 del denominador y usamos (7) con x sustituida por $(x-3)/4$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{4+(x-3)}\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{4}}\\ &= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{x-3}{4} + \left(\frac{x-3}{4}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{4}\right)^3 + \cdots\right]\end{aligned}$$

o $$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x-3}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}(x-3)^k.$$

Esta serie converge para $|(x-3)/4| < 1$ o $|x-3| < 4$. La solución de la última desigualdad muestra que el intervalo de convergencia es $(-1, 7)$. ■

EJEMPLO 6 Diferenciación de una serie de potencias

La diferenciación término por término de (7) produce una representación en serie de potencias de $1/(1+x)^2$ sobre el intervalo $(-1, 1)$:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx}1 - \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{d}{dx}x^n + \cdots$$

produce $$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots \quad \leftarrow \text{se multiplican ambos lados por } -1$$

o $$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}kx^{k-1}.$$ ■

EJEMPLO 7 Integración de una serie de potencias

Encuentre una representación de serie de potencias de $\ln(1+x)$ sobre $(-1, 1)$.

Solución Primero introducimos un cambio de variable de integración al sustituir $x = t$ en (7):

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots.$$

Entonces, para cualquier x dentro del intervalo $(-1, 1)$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt &= \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \cdots + (-1)^n\int_0^x t^n\,dt + \cdots\\ &= t\Big]_0^x - \frac{1}{2}t^2\Big]_0^x + \frac{1}{3}t^3\Big]_0^x - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n+1}t^{n+1}\Big]_0^x + \cdots\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots.\end{aligned}$$

Pero $$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+t)\Big]_0^x = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x)$$

y así

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}. \quad (8)$$

Advierta que el intervalo de convergencia de la serie en (8) es ahora $(-1, 1]$, esto es, hemos agregado la convergencia en $x = 1$. Dejando $x = 1$ en (8), la serie en el lado derecho de la igualdad es la serie armónica alternante convergente; sobre el lado izquierdo se obtiene ln 2. De tal manera, hemos obtenido la suma S de la serie armónica alternante:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots. \quad (9)$$

EJEMPLO 8 Aproximar un valor de ln x

Aproxime $\ln(1.2)$ hasta cuatro lugares decimales.

Solución Al sustituir $x = 0.2$ en (8) se obtiene

$$\ln(1.2) = 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{3} - \frac{(0.2)^4}{4} + \frac{(0.2)^5}{5} - \frac{(0.2)^6}{6} + \cdots \quad (10)$$

$$= 0.2 - 0.02 + 0.00267 - 0.0004 + 0.000064 - 0.00001067 + \cdots$$

$$\approx 0.1823. \quad (11)$$

Si la suma de la serie (10) en el ejemplo 8 se denota mediante S, entonces sabemos del teorema 4.7.2 que $|S_n - S| \le a_{n+1}$. El número dado en (11) es exacto hasta cuatro decimales, ya que, para la quinta suma parcial de (10),

$$|S_5 - S| \le 0.00001067 < 0.00005.$$

Aritmética de series de potencias Las dos series de potencias $f(x) = \sum b_k(x-a)^k$ y $g(x) = \sum c_k(x-a)^k$ pueden combinarse mediante las operaciones aritméticas de adición, multiplicación y división. Es factible que calculemos $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$ como en la adición y multiplicación de dos polinomios: agrupamos términos a partir de potencias similares de $x - a$. En cada punto en el cual las series de potencias que definen a f y g convergen absolutamente, las series

$$f(x) + g(x) = (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)(x-a) + (b_2 + c_2)(x-a)^2 + \cdots \quad (12)$$

y $$f(x)g(x) = b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)(x-a) + (b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0)(x-a)^2 + \cdots \quad (13)$$

convergen absolutamente. De manera similar, para $c_0 \neq 0$ podemos calcular $f(x)/g(x)$ mediante división larga:

$$\begin{array}{rll} & \dfrac{b_0}{c_0} + \dfrac{b_1c_0 - b_0c_1}{c_0^2}(x-a) + \cdots & \leftarrow \text{cociente} \\ c_0 + c_1(x-a) + \cdots \;\big) & b_0 + \quad b_1(x-a) \quad + \cdots & \\ & b_0 + \dfrac{b_0c_1}{c_0}(x-a) \quad + \cdots & \quad (14) \\ & 0 + \dfrac{b_1c_0 - b_0c_1}{c_0}(x-a) + \cdots & \\ & \vdots & \end{array}$$

◀ Desde luego, no memorice (12), (13) y (14); sólo aplique el álgebra como lo haría para dos polinomios.

La división es válida en *alguna* vecindad del centro a de las dos series.

En ocasiones es posible que utilicemos las operaciones aritméticas tal como se ilustró junto con los resultados conocidos previamente para obtener una representación de serie de potencias de una función.

EJEMPLO 9 Suma de serie de potencias

Determine una representación de serie de potencias de $\dfrac{4x}{x^2 + 2x - 3}$ centrada en 0.

Solución Para comenzar, descomponemos la función en fracciones parciales

$$\frac{4x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{3+x} + \frac{1}{1-x}.$$

Después factorizamos 3 del denominador de la primera fracción parcial y usamos (7) con x sustituida por $x/3$:

$$\frac{3}{3+x} = \frac{1}{1+\dfrac{x}{3}} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} x^k. \tag{15}$$

Esta serie converge para $|x/3| < 1$ o $|x| < 3$. El intervalo de convergencia para (15) es $(-3, 3)$. Ahora sabemos de (6) que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \tag{16}$$

converge para $|x| < 1$. El intervalo de convergencia para (16) es $(-1, 1)$. Por último, la suma de (15) y (16) produce la siguiente representación de serie de potencias para la función dada:

$$\frac{4x}{x^2+2x-3} = \frac{3}{3+x} - \frac{1}{1-x} = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{9}x^2 - \frac{28}{27}x^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{3^k} - 1 \right) x^k. \tag{17}$$

La serie (17) converge para todas las x comunes a (esto es, la intersección de) los intervalos $(-3, 3)$ y $(-1, 1)$, es decir, para toda x en $(-1, 1)$. ■

El resultado (17) también puede obtenerse al multiplicar dos series de potencias.

EJEMPLO 10 Repaso del ejemplo 9

Si reescribimos la función en el ejemplo 9 como un producto

$$\frac{4x}{x^2+2x-3} = -\frac{4}{3}x \cdot \frac{1}{1+\dfrac{x}{3}} \cdot \frac{1}{1-x}$$

y después usamos (15) y (16), se concluye que

$$\begin{aligned}\frac{4x}{x^2+2x-3} &= -\frac{4}{3}x \cdot \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \cdots\right) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ &= -\frac{4}{3}x\left[1 + 1\left(1 - \frac{1}{3}\right)x + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right)x^2 + \cdots\right] \\ &= -\frac{4}{3}x - \frac{8}{9}x^2 - \frac{28}{27}x^3 - \cdots\end{aligned}$$

■

4.9 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-10.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-8, utilice (6) y (7) para determinar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función indicada. Proporcione el intervalo de convergencia.

1. $\dfrac{1}{3-x}$
2. $\dfrac{1}{4+x}$
3. $\dfrac{1}{1+2x}$
4. $\dfrac{1}{5+2x}$
5. $\dfrac{1}{1+x^2}$
6. $\dfrac{x}{1+x^2}$
7. $\dfrac{1}{4+x^2}$
8. $\dfrac{4}{4-x^2}$

En los problemas 9-14, utilice la diferenciación de una serie apropiada de los problemas 1-8 para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función que se indica. Señale el intervalo de convergencia.

9. $\dfrac{1}{(3-x)^2}$
10. $\dfrac{1}{(1+2x)^2}$
11. $\dfrac{1}{(5+2x)^3}$
12. $\dfrac{1}{(4+x)^3}$
13. $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$
14. $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

En los problemas 15-20, utilice la integración de una serie apropiada de los problemas 1-8 para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función indicada. Proporcione el intervalo de convergencia.

15. $\tan^{-1} x$
16. $\tan^{-1}(x/2)$
17. $\ln(1+x^2)$
18. $\ln(5+2x)$
19. $\ln(4+x)$
20. $\ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$

En los problemas 21-28, utilice (6), (7) o resultados previos para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función dada. Indique el intervalo de convergencia.

21. $\dfrac{1-x}{1+2x}$ **22.** $\dfrac{3-x}{1-x}$

23. $\dfrac{x^2}{(1+x)^3}$ **24.** $\dfrac{x^3}{8+2x}$

25. $x\ln(1+x^2)$ **26.** $x^2\tan^{-1}x$

27. $\displaystyle\int_0^x \tan^{-1} t\,dt$ **28.** $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$

En los problemas 29-32, proceda como en el ejemplo 5 y encuentre una representación de serie de potencias, centrada en el número dado *a*, de la función indicada. Señale el intervalo de convergencia.

29. $\dfrac{1}{1-x}$; $a=6$ **30.** $\dfrac{1}{x}$; $a=-2$

31. $\dfrac{x}{2+x}$; $a=-1$ **32.** $\dfrac{x-2}{x-1}$; $a=2$

En los problemas 33 y 34, proceda como en el ejemplo 9 y utilice fracciones parciales para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función dada. Indique el intervalo de convergencia.

33. $\dfrac{7x}{x^2+x-12}$ **34.** $\dfrac{3}{x^2-x-2}$

En los problemas 35 y 36, proceda como en el ejemplo 10 y utilice multiplicación de series de potencia para determinar los primeros cuatro términos distintos de cero de una representación de serie de potencias, centrada en 0, para la función dada.

35. $\dfrac{1}{(2-x)(1-x)}$ **36.** $\dfrac{x}{(1+2x)(1+x^2)}$

En los problemas 37 y 38, encuentre el dominio de la función dada.

37. $f(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^2}{2\cdot 3^2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 3^3}-\dfrac{x^4}{4\cdot 3^4}+\cdots$

38. $f(x)=1+2x+\dfrac{4x^2}{1\cdot 2}+\dfrac{8x^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$

En los problemas 39-44, use la serie de potencias para aproximar la cantidad dada hasta cuatro lugares decimales.

39. $\ln(1.1)$ **40.** $\tan^{-1}(0.2)$

41. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{1}{1+x^3}\,dx$ **42.** $\displaystyle\int_0^{1/3}\frac{x}{1+x^4}\,dx$

43. $\displaystyle\int_0^{0.3} x\tan^{-1}x\,dx$ **44.** $\displaystyle\int_0^{1/2}\tan^{-1}x^2\,dx$

45. Utilice el problema 15 para demostrar que

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

46. Se sabe que la serie en el problema 45 converge muy lentamente. Demuestre lo anterior encontrando el entero positivo *n* más pequeño de manera que S_n aproxime $\pi/4$ hasta cuatro lugares decimales.

En los problemas 47 y 48, demuestre que la función definida por la serie de potencias satisface la ecuación diferencial dada.

47. $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$; $(x+1)y''+y'=0$

48. $J_0(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k}$; $xy''+y'+xy=0$

≡ Piense en ello

49. *a)* Si $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, entonces demuestre que $f'(x)=f(x)$ para toda *x* en $(-\infty,\infty)$.

b) ¿Qué función tiene la propiedad de que su primera derivada es igual a la función? Conjeture sobre cuál función se representa mediante la serie de potencias del inciso *a*).

50. *a)* Si $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, entonces demuestre que $f''(x)=-f(x)$ para toda *x* en $(-\infty,\infty)$.

b) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que su segunda derivada es igual al negativo de la función? Conjeture respecto a cuál función se representa mediante la serie de potencia del inciso *a*). Advierta que las potencias de *x* en la serie de potencias son enteros positivos impares.

4.10 Series de Taylor y Maclaurin

Introducción Suponga que $\sum c_k(x-a)^k$ es una serie de potencias centrada en *a* y que tiene un intervalo de convergencia con un radio de convergencia *R* distinto de cero. Luego, como se vio en la sección anterior, dentro del intervalo de convergencia una serie de potencias es una función continua que posee derivadas de todos los órdenes. También se abordó la idea de usar una serie de potencias para *representar* una función determinada (tal como $1/(1+x)$) sobre un intervalo. En esta sección se va a extender de manera adicional la noción de representar una función mediante una serie de potencias. El problema básico es:

- Suponga que se cuenta con una función *f* que posee derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto *I*. ¿Es posible encontrar una serie de potencias que **represente** a *f* sobre *I*?

En palabras un poco diferentes: ¿podemos **expandir** una función diferenciable infinitamente (tal como $f(x)=\operatorname{sen}x$, $f(x)=\cos x$ o $f(x)=e^x$) en una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ que converge al valor correcto de la función $f(x)$ para toda *x* en algún intervalo abierto $(a-R, a+R)$, donde *R* es $R>0$ o $R=\infty$?

Serie de Taylor para una función f Antes de responder la pregunta del último párrafo, se va a hacer simplemente la *suposición* de que una función f infinitamente diferenciable sobre un intervalo $(a - R, a + R)$ puede representarse mediante una serie de potencias $\sum c_k(x - a)^k$ sobre ese intervalo. En ese caso es relativamente fácil determinar cuáles deben ser los coeficientes c_k. La diferenciación repetida de

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n + \cdots \tag{1}$$

produce

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \cdots \tag{2}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - a) + \cdots \tag{3}$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1c_3 + \cdots \tag{4}$$

y así sucesivamente. Al evaluar (1), (2), (3) y (4) en $x = a$, encontramos que

$$f(a) = c_0, \quad f'(a) = 1!c_1, \quad f''(a) = 2!c_2 \quad \text{y} \quad f'''(a) = 3!c_3,$$

respectivamente. En general, se ve que $f^{(n)}(a) = n!c_n$ o

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n \geq 0. \tag{5}$$

Cuando $n = 0$, interpretamos la derivada *0*-ésima como $f(a)$ y $0! = 1$. Al sustituir (5) en (1) se producen los resultados resumidos en el siguiente teorema.

Teorema 4.10.1 Forma de una serie de potencias

Si una función f posee una representación en serie de potencias $f(x) = \sum c_k(x - a)^k$ sobre un intervalo $(a - R, a + R)$, entonces los coeficientes deben ser $c_k = f^{(k)}(a)/k!$.

En otras palabras, si una función f tiene una representación en serie de potencias centrada en a, entonces debe verse como lo siguiente:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k. \tag{6}$$

La serie en (6) se denomina **serie de Taylor de f en a**, o **centrada en a**. La serie de Taylor centrada en $a = 0$,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{7}$$

se denomina **serie de Maclaurin de f**.

La pregunta planteada en la introducción ahora puede reformularse como:

- ¿Es posible expandir una función f infinitamente diferenciable en una serie de Taylor (6)?

Parecería que la respuesta es afirmativa (calculando simplemente los coeficientes como lo indica la fórmula (5)). Por desgracia, no es tan simple el concepto de expandir una función f dada infinitamente diferenciable en una serie de Taylor. Es necesario tener en mente que (5) y (6) se obtuvieron bajo la suposición de que f era representada por una serie de potencias centrada en a. Si no se conoce *a priori* que una función f infinitamente diferenciable tiene una representación en serie de potencias, entonces debe considerarse una serie de potencias obtenidas de (6) o (7) como un resultado *formal*, en otras palabras, una serie de potencias que es simplemente **generada** por la función f. No se sabe si la serie generada de esta manera converge o, incluso si lo hace, si converge a $f(x)$.

EJEMPLO 1 Serie de Taylor de ln x

Encuentre la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$ centrada en $a = 1$. Determine su intervalo de convergencia.

Solución La función f, sus derivadas y sus valores en 1 son:

$$\begin{array}{l|l}
f(x) = \ln x & f(1) = 0 \\
f'(x) = \dfrac{1}{x} & f'(1) = 1 \\
f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} & f''(1) = -1 \\
f'''(x) = \dfrac{1 \cdot 2}{x^3} & f'''(1) = 2! \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n} & f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{array}$$

Puesto que $(n-1)!/n! = 1/n$, $n \geq 1$, (6) produce

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k. \tag{8}$$

La prueba de las proporciones,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n-1}(x-1)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x-1| = |x-1|,$$

muestra que la serie (8) converge para $|x-1| < 1$ o sobre el intervalo $(0, 2)$. En los puntos extremos $x = 0$ y $x = 2$, las series

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

son divergente y convergente, respectivamente. El intervalo de convergencia de estas series es $(0, 2]$. El radio de convergencia es $R = 1$. ■

Advierta en el ejemplo 1 que no se escribió la igualdad

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k.$$

En este punto no se ha establecido que la serie dada en (8) representa a $\ln x$ sobre el intervalo $(0, 2]$.

Teorema de Taylor De acuerdo con (5), es claro que para tener una serie de Taylor centrada en a es necesario que una función f posea derivadas de todos los órdenes que estén definidas en a. Así, por ejemplo, $f(x) = \ln x$ no posee una serie de Maclaurin, debido a que $f(x) = \ln x$ y todas sus derivadas no están definidas en 0. Además, es importante notar que incluso si una función f posee derivadas de todos los órdenes y genera una serie de Taylor convergente sobre algún intervalo, es posible que la serie no represente a f sobre el intervalo, esto es, la serie no converge a $f(x)$ en toda x en el intervalo. Vea el problema 63 de los ejercicios 4.10. La pregunta fundamental de si una serie de Taylor representa la función que la generó puede resolverse por medio del **teorema de Taylor**.

Teorema 4.10.2 Teorema de Taylor

Sea f una función tal que $f^{(n+1)}(x)$ existe para toda x en un intervalo que contiene al número a. Entonces para toda x en el intervalo

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde $$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{9}$$

(continúa)

recibe el nombre de **polinomio de Taylor de f en a**, de grado n-ésimo, y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{10}$$

se llama **forma de Lagrange del residuo**. El número c yace entre a y x.

Existen varias formas del residuo. Esta forma se debe al matemático francés **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813).

Puesto que la demostración de este teorema desviaría la principal finalidad de esta discusión, se reserva para el apéndice. La importancia del teorema 4.10.2 radica en el hecho de que los polinomios de Taylor $P_n(x)$ son las sumas parciales de la serie de Taylor (6). El residuo se define como

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad \text{y así} \quad P_n(x) = f(x) - R_n(x). \tag{11}$$

Si $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$, entonces la función f es la suma de la serie de Taylor que la genera. Sin embargo, de (11) observamos que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

por lo que sí es posible mostrar de algún modo que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, y entonces la sucesión de sumas parciales converge a $f(x)$. Resumimos el resultado.

Teorema 4.10.3 Convergencia de una serie de Taylor

Suponga que f es una función que posee derivadas de todos los órdenes sobre un intervalo centrado en el número a. Si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo, entonces la serie de Taylor generada por f converge a $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

En la práctica, la prueba de que el residuo $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ depende muchas veces del hecho de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0. \tag{12}$$

Este último resultado sigue de aplicar el teorema 4.3.2 a la serie $\sum_{m=1}^{\infty} x^k/k!$, la cual se sabe que es absolutamente convergente para todos los números reales. (Vea el ejemplo 3 en la sección 4.8.)

EJEMPLO 2 Repaso del ejemplo 1

Demuestre que la serie (8) representa a $f(x) = \ln x$ sobre el intervalo $(0, 2]$.

Solución En la solución para el ejemplo 1 vimos que la derivada n-ésima de $f(x) = \ln x$ está dada por

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

De $f^{(n+1)}(c) = \dfrac{(-1)^n n!}{c^{n+1}}$, obtenemos de (10)

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-1|^{n+1} = \left|\frac{(-1)^n n!}{c^{n+1}(n+1)!}\cdot(x-1)^{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}\left|\frac{x-1}{c}\right|^{n+1},$$

donde c es algún número en el intervalo $(0, 2]$ entre 1 y x.

Si $1 \le x \le 2$, entonces $0 < x - 1 \le 1$. Puesto que $1 < c < x$, debemos tener $0 < x - 1 \le 1 < c$ y, en consecuencia, $(x-1)/c < 1$. Por consiguiente,

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n+1} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

En el caso en que $0 < x < 1$, también puede mostrarse que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Se omite la demostración. En consecuencia,

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

para todos los valores de x en el intervalo $(0, 2]$. ■

EJEMPLO 3 Representación de la serie de Maclaurin de $\cos x$

Encuentre la serie de Maclaurin de $f(x) = \cos x$. Demuestre que la serie de Maclaurin representa a $\cos x$ para toda x.

Solución Determinamos primero la serie de Maclaurin generada por $f(x) = \cos x$:

$$\begin{array}{rl|l} f(x) &= \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x & f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x & f'''(0) = 0 \end{array}$$

y así sucesivamente. De (7) obtenemos la serie de potencias

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}. \tag{13}$$

La prueba de las proporciones indica que (13) converge absolutamente para todos los valores reales de x, en otras palabras, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$. En este caso, con el fin de demostrar que $\cos x$ es representada por la serie (13), debemos mostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Para este fin, advertimos que la derivada de f satisface

$$|f^{(n+1)}(x)| = \begin{cases} |\operatorname{sen} x|, & n \text{ par} \\ |\cos x|, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

En cualquier caso, $|f^{(n+1)}(c)| \le 1$ para todo número real c, y consecuentemente por (10),

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En vista de (12), tenemos para cualquier elección fija aunque arbitraria de x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Pero $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ implica que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Por tanto,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

es una representación válida de $\cos x$ para todo número real x. ■

EJEMPLO 4 Representación de la serie de Taylor de $\operatorname{sen} x$

Determine la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ centrada en $a = \pi/3$. Compruebe que la serie de Taylor representa a $\operatorname{sen} x$ para toda x.

Solución Tenemos

$$\begin{array}{rl|l} f(x) &= \operatorname{sen} x & f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ f'(x) &= \cos x & f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

y así sucesivamente. Por consiguiente, la serie de Taylor centrada en $\pi/3$ generada por $\operatorname{sen} x$ es

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\cdot 1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2-\frac{1}{2\cdot 3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\cdots. \tag{14}$$

También en este caso, de la prueba de las proporciones se sigue que (14) converge absolutamente para todos los valores reales de x, esto es, su intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$. Para demostrar que

$$\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\cdot 1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2-\frac{1}{2\cdot 3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\cdots$$

para todo valor real x, advertimos que, como en el ejemplo anterior, $|f^{(n+1)}(c)| \le 1$. Esto implica que

$$|R_n(x)| \le \frac{|x-\pi/3|^{n+1}}{(n+1)!}$$

a partir de lo cual vemos, con la ayuda de (12), que $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$. ■

Se resumen algunas representaciones importantes de series de Maclaurin y sus intervalos de convergencia:

Series de Maclaurin	Intervalos de convergencia	
$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$	$(-\infty,\infty)$	(15)
$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$	$(-\infty,\infty)$	(16)
$\operatorname{sen} x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$	$(-\infty,\infty)$	(17)
$\tan^{-1} x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$	$[-1,1]$	(18)
$\cosh x=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$	$(-\infty,\infty)$	(19)
$\operatorname{senh} x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$(-\infty,\infty)$	(20)
$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$	$[-1,1]$	(21)

Se pide al lector demostrar la validez de las representaciones (15), (17), (19) y (20) como ejercicio. Vea los problemas 51-54 en los ejercicios 4.10.

Además, se le recomienda observar con cuidado las series dadas en (16)-(20) y responder después la pregunta del problema 61 de los ejercicios 4.10.

Algunas gráficas de polinomios de Taylor En el ejemplo 3 vimos que la serie de Taylor de $f(x)=\cos x$ en $a=0$ representa la función para toda x, ya que $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$. Siempre es de interés ver gráficamente cómo las sumas parciales de la serie de Taylor, las cuales son los polinomios de Taylor definidos en (9), convergen a la función. En la FIGURA 4.10.1*a*) las gráficas de los polinomios de Taylor

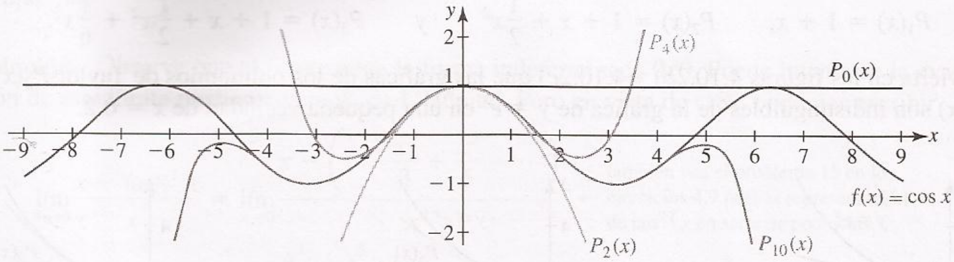
$$P_0(x)=1, \qquad P_2(x)=1-\frac{1}{2!}x^2, \qquad P_4(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4,$$

y

$$P_{10}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}$$

se comparan con la gráfica de $f(x)=\cos x$ que se muestra en oscuro.

Una comparación de los valores numéricos se presenta en la figura 4.10.1*b*).



a)

x	$P_2(x)$	$P_4(x)$	$P_{10}(x)$	$\cos x$
$\pi/6$	0.86292	0.86605	0.86603	0.86603
$\pi/4$	0.69157	0.70743	0.70711	0.70711
$\pi/3$	0.45169	0.50180	0.50000	0.5
$\pi/2$	−0.23370	0.01997	0.00000	0

b)

FIGURA 4.10.1 Polinomios de Taylor P_0, P_2, P_4 y P_{10} para $\cos x$

Aproximaciones Cuando el valor de x es cercano al centro a ($x \approx a$) de una serie de Taylor, puede usarse el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de una función f en a para aproximar el valor de la función $f(x)$. El error en esta aproximación está dado por

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

EJEMPLO 5 Aproximación utilizando un polinomio de Taylor

Aproxime $e^{-0.2}$ mediante un polinomio de Taylor $P_3(x)$. Determine la exactitud de la aproximación.

Solución Como el valor $x = -0.2$ es cercano a 0, recurrimos al polinomio de Taylor de $f(x) = e^x$ en $a = 0$:

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{1!}x^2 + \frac{f''(0)}{3!}x^3.$$

Se sigue de

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$$
$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$$

que

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Este polinomio es la cuarta suma parcial de la serie dada en (15). Ahora,

$$P_3(-0.2) = 1 + (-0.2) + \frac{1}{2}(-0.2)^2 + \frac{1}{6}(-0.2)^3 \approx 0.8187$$

y por ello,

$$e^{-0.2} \approx 0.8187. \qquad (22)$$

Después de esto, de acuerdo con (10) es posible escribir

$$|R_3(x)| = \frac{e^c}{4!}|x|^4 < \frac{|x|^4}{4!}$$

puesto que $-0.2 < c < 0$ y $e^c < 1$. La desigualdad

$$|R_3(-0.2)| < \frac{|-0.2|^4}{24} < 0.0001$$

implica que el resultado en (22) es exacto hasta tres lugares decimales.

En la FIGURA 4.10.2 hemos comparado las gráficas de los polinomios de Taylor $f(x) = e^x$ centrados en $a = 0$:

$$P_1(x) = 1 + x, \qquad P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Advierta en las figuras 4.10.2*b*) y 4.10.2*c*) que las gráficas de los polinomios de Taylor $P_2(x)$ y $P_3(x)$ son indistinguibles de la gráfica de $y = e^x$ en una pequeña vecindad de $x = 0.2$.

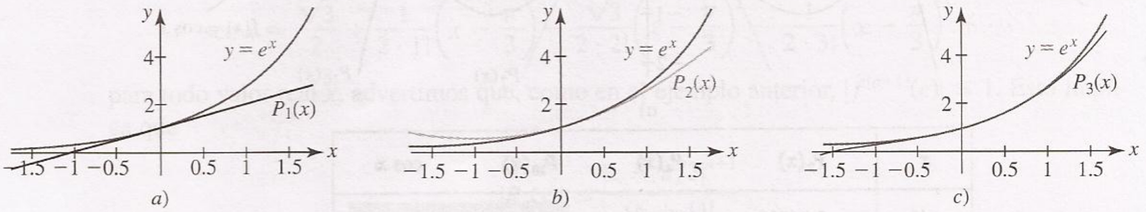


FIGURA 4.10.2 Gráficas de los polinomios de Taylor del ejemplo 5 ■

En las *Notas desde el aula* de la sección 1.5 se introdujo la noción de **integrales no elementales**, a saber: una integral tal como $\int \operatorname{sen} x^2\, dx$, donde $\operatorname{sen} x^2$ no posee una antiderivada en la forma de una función elemental. La serie de Taylor puede ser una ayuda cuando se trabaja con integrales no elementales. Por ejemplo, la serie de Maclaurin que se obtiene al sustituir x por x^2 en (17) converge para $-\infty < x < \infty$, y por ello, de acuerdo con el teorema 4.9.2,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} x^2\, dx &= \int \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \cdots + C. \end{aligned} \tag{23}$$

EJEMPLO 6 Aproximación utilizando una serie de Taylor

Aproxime $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx$ hasta tres lugares decimales.

Solución De (23) advertimos de inmediato que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \cdots \Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \cdots. \end{aligned} \tag{24}$$

Por el teorema de la cota del error para la serie alternante, teorema 4.7.2, el cuarto término en la serie (24) satisface

$$a_4 = \frac{1}{15\cdot 7!} \approx 0.000013 < 0.0005.$$

Por tanto, la aproximación

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} \approx 0.3103$$

es exacta hasta tres lugares decimales. ■

Límites Una representación de serie de potencias de una función algunas veces es útil en el cálculo de límites. Por ejemplo, en el estudio de límites trigonométricos se recurre a un sutil argumento geométrico para demostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Pero si usamos (17) y la división entre x observamos de inmediato que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{x} = \lim_{x\to 0} \Bigg(1 \overbrace{- \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots}^{\text{el límite de cada uno de estos términos es 0}} \Bigg) = 1.$$

EJEMPLO 7 Cálculo de un límite

Evalúe $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\tan^{-1}x}{x^3}$.

Solución Observe que el límite tiene la forma indeterminada 0/0. Puede intentarse la evaluación de este límite mediante la regla de L'Hôpital. Pero en vista de (18), podemos escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots\right)}{x^3} &&\leftarrow \text{también vea el problema 15 en los ejercicios 4.9 para la representación de } \tan^{-1}x \text{ en serie de potencias}\\ &= \lim_{x\to \infty}\frac{\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{5}+\cdots}{x^3} &&\leftarrow \text{se factoriza } x^3 \text{ del numerador y se cancela}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{5}+\cdots\right)=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

■

Empleo de la aritmética de una serie de potencias En la sección 4.9 se discutió la aritmética de la serie de potencias, esto es, las series de potencias pueden básicamente manipularse de manera aritmética igual que los polinomios. En el caso en que las representaciones de las series de potencia $f(x)=\sum b_k(x-a)^k$ y $g(x)=\sum c_k(x-a)^k$ convergen en el mismo intervalo abierto $(a-R, a+R)$ para $R>0$ o $(-\infty,\infty)$ para $R=\infty$, pueden obtenerse las representaciones de la serie de potencias para $f(x)+g(x)$ y $f(x)g(x)$ a su vez, sumando las series y multiplicándolas. La suma y el producto convergen en el mismo intervalo. Si dividimos la serie de potencias de f entre la serie de potencias de g, entonces el cociente representa a $f(x)/g(x)$ en alguna vecindad de a.

EJEMPLO 8 Serie de Maclaurin de $\tan x$

Encuentre los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de $f(x)=\tan x$.

Solución De (16) y (17) podemos escribir

$$\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\frac{x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots}{1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots}$$

Entonces mediante división larga

$$\begin{array}{r|l} & x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{2}{15}x^5+\cdots\\ \hline 1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4-\cdots & x-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{120}x^5-\cdots\\ & \underline{x-\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{1}{24}x^5-\cdots}\\ & \tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{30}x^5+\cdots\\ & \underline{\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{6}x^5+\cdots}\\ & \tfrac{2}{15}x^5+\cdots\\ & \underline{\tfrac{2}{15}x^5+\cdots}\\ & \vdots \end{array}$$

Por consiguiente, tenemos

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots.$$

■

Desde luego, el último resultado pudo también obtenerse utilizando (7). Vea el problema 11 en los ejercicios 4.10. Después de trabajar en el ejemplo 8 se le recomienda leer *ii*) en las *Notas desde el aula*.

Polinomios de Taylor (Redux) Anteriormente se introdujo la noción de una **aproximación lineal local** de f en a dada por $f(x) \approx L(x)$, donde

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{25}$$

Esta ecuación representa la línea tangente a la gráfica de f en $x = a$. Como es un polinomio lineal, otro símbolo apropiado para (25) es

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{26}$$

La ecuación se reconoce ahora como el polinomio de Taylor de primer grado de f en a. La idea detrás de (25) es que la línea tangente puede usarse para aproximar el valor de $f(x)$ cuando x está en una pequeña vecindad de a. Pero, puesto que la mayoría de las gráficas tienen concavidad y una línea tangente, no es posible esperar que un polinomio de grado superior proporcionaría una mejor aproximación a $f(x)$ en el sentido de que su gráfica estaría cerca de la gráfica de f sobre un intervalo más grande que contenga a a. Advierta que (26) tiene las propiedades de P_1 y su primera derivada concuerda con f y su primera derivada en $x = a$:

$$P_1(a) = f(a) \qquad \text{y} \qquad P_1'(a) = f'(a).$$

Si deseamos que una función polinomial cuadrática

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2$$

tenga las propiedades análogas, a saber:

$$P_2(a) = f(a), \qquad P_2'(a) = f'(a) \qquad \text{y} \qquad P_2''(a) = f''(a),$$

entonces, siguiendo un procedimiento similar a (1)-(5), se advierte que P_2 debe ser

$P_n(x)$ es el polinomio de grado n definido en (9).

$$P_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2. \tag{27}$$

Gráficamente, esto significa que la gráfica de f y la gráfica de P_2 tienen la misma línea tangente y la misma concavidad en $x = a$. Desde luego, se reconoce (27) como el polinomio de Taylor de segundo grado. Se afirma que $f(x) \approx P_2(x)$ es una **aproximación cuadrática local de f en a**. Al continuar de esta manera se construye $f(x) \approx P_n(x)$, que es una **aproximación local de grado n-ésimo de f en a**. Con esta discusión en mente, el lector necesita prestar mayor atención a las gráficas de $f(x) = \cos x$, P_0, P_2, P_4 y P_{10} cerca de $x = 0$ en la figura 4.10.1*a*) y las aproximaciones en la figura 4.10.1*b*). También debe reexaminar la figura 4.10.2.

Posdata. Un poco de historia El teorema 4.10.2 recibe su nombre en honor del matemático inglés **Brook Taylor** (1685-1731), quien publicó este resultado en 1715. Sin embargo, la fórmula en (6) fue descubierta por Johann Bernoulli casi 20 años antes. La serie en (7) recibe su nombre en honor al matemático escocés y estudiante de Isaac Newton, **Colin Maclaurin** (1698-1746). No es claro por qué el nombre de Maclaurin se asocia con esta serie.

Σ NOTAS DESDE EL AULA

i) El método de la serie de Taylor para encontrar la serie de potencias de una función y la prueba posterior de que la serie representa a la función tiene una gran y obvia desventaja. La obtención de una expresión general para la derivada n-ésima de la mayoría de las funciones es casi imposible. De tal modo, se presenta con frecuencia la limitación de determinar sólo algunos de los primeros coeficientes c_n.

ii) Es fácil pasar por alto la importancia de los resultados en (6) y (7). Suponga que se desea encontrar la serie de Maclaurin para $f(x) = 1/(2 - x)$. Es posible, desde luego, utilizar (7), lo cual se le pide al lector en el problema 1 de los ejercicios 4.10. Por otro lado, el lector debe reconocer, de los ejemplos 3-5 de la sección 4.9, que la representación en serie de potencias de f puede obtenerse utilizando series geométricas. El punto es:

- La representación es única. De tal modo que sobre su intervalo de convergencia, una serie de potencias que representa a una función, independientemente de cómo se obtuvo, es la serie de Taylor o de Maclaurin de esa función.

4.10 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-10.

Fundamentos

En los problemas 1-10, emplee (7) para determinar la serie de Maclaurin de la función dada.

1. $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ **2.** $f(x) = \dfrac{1}{1 + 5x}$

3. $f(x) = \ln(1 + x)$ **4.** $f(x) = \ln(1 + 2x)$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x$ **6.** $f(x) = \cos 2x$

7. $f(x) = e^x$ **8.** $f(x) = e^{-x}$

9. $f(x) = \operatorname{senh} x$ **10.** $f(x) = \cosh x$

En los problemas 11 y 12, emplee (7) para determinar los primeros cuatro términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función dada.

11. $f(x) = \tan x$ **12.** $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$

En los problemas 13-24, emplee (6) para determinar la serie de Taylor de la función dada centrada en el valor indicado de a.

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, $a = 4$ **14.** $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$ **16.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = -5$

17. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/4$ **18.** $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/2$

19. $f(x) = \cos x$, $a = \pi/3$ **20.** $f(x) = \cos x$, $a = \pi/6$

21. $f(x) = e^x$, $a = 1$ **22.** $f(x) = e^{-2x}$, $a = \dfrac{1}{2}$

23. $f(x) = \ln x$, $a = 2$ **24.** $f(x) = \ln(x + 1)$, $a = 2$

En los problemas 25-32, utilice resultados, métodos o problemas previos para determinar la serie de Maclaurin de la función dada.

25. $f(x) = e^{-x^2}$ **26.** $f(x) = x^2 e^{-3x}$

27. $f(x) = x \cos x$ **28.** $f(x) = \operatorname{sen} x^3$

29. $f(x) = \ln(1 - x)$ **30.** $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

31. $f(x) = \sec^2 x$ **32.** $f(x) = \ln(\cos x)$

En los problemas 33 y 34, emplee la serie de Maclaurin como una ayuda en la evaluación de límite indicado.

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x - \operatorname{sen} x}$ **34.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x - e^x}{1 - \cos x}$

En los problemas 35 y 36, use adición de series de Maclaurin para e^x y e^{-x} para determinar la serie de Maclaurin de la función dada.

35. $f(x) = \cosh x$ **36.** $f(x) = \operatorname{senh} x$

En los problemas 37 y 38, use multiplicación para encontrar los primeros cinco términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función dada.

37. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - x}$ **38.** $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$

En los problemas 39 y 40, utilice división para encontrar los primeros cinco términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de la función dada.

39. $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos x}$ **40.** $f(x) = \sec x$

En los problemas 41 y 42, establezca el valor indicado de la integral definida dada.

41. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \cdots$

42. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots$

En los problemas 43-46, encuentre la suma de la serie dada.

43. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ **44.** $\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} + \cdots$

45. $1 - \dfrac{\pi^2}{2!} + \dfrac{\pi^4}{4!} - \dfrac{\pi^6}{6!} + \cdots$ **46.** $\pi - \dfrac{\pi^3}{3!} + \dfrac{\pi^5}{5!} - \dfrac{\pi^7}{7!} + \cdots$

En los problemas 47-50, aproxime la cantidad indicada utilizando el polinomio de Taylor $P_n(x)$ para los valores señalados de n y a. Determine la exactitud de la aproximación.

47. $\operatorname{sen} 46°$, $n = 2$, $a = \pi/4$ [*Sugerencia*: Convierta 46° a radianes.]

48. $\cos 29°$, $n = 2$, $a = \pi/6$ **49.** $e^{0.3}$, $n = 4$, $a = 0$

50. $\operatorname{senh}(0.1)$, $n = 3$, $a = 0$

51. Demuestre que la serie obtenida en el problema 5 representa a $\operatorname{sen} x$ para todo valor real de x.

52. Demuestre que la serie obtenida en el problema 7 representa a e^x para todo valor real de x.

53. Demuestre que la serie obtenida en el problema 9 representa a $\operatorname{senh} x$ para todo valor real de x.

54. Demuestre que la serie obtenida en el problema 10 representa $\cosh x$ para todo valor real de x.

Aplicaciones

55. Al nivelar una larga autopista de longitud L, debe hacerse una compensación con respecto a la curvatura de la Tierra.

a) Demuestre que la corrección de nivelación y indicada en la FIGURA 4.10.3 es $y = R\sec(L/R) - R$, donde R es el radio de la Tierra medido en millas.

b) Si $P_2(x)$ es el polinomio de Taylor de segundo grado para $f(x) = \sec x$ en $a = 0$, utilice $\sec x \approx P_2(x)$ para x cercano a cero con el fin de demostrar que la corrección aproximada del nivelado es $y \approx L^2/(2R)$.

c) Encuentre el número de pulgadas de la corrección del nivelado que se necesita para una autopista de 1 milla. Emplee $R = 4\,000$ mi.

d) Si se usa $\sec x \approx P_4(x)$, entonces demuestre que la corrección de nivelación es

$$y \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}.$$

Repita el cálculo en el inciso *c*) utilizando la última fórmula.

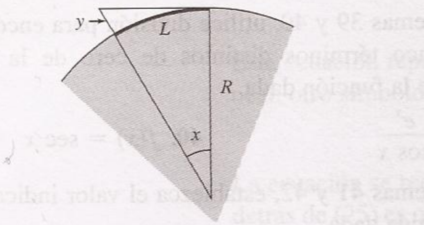


FIGURA 4.10.3 La Tierra en el problema 55

56. Una onda de longitud L viaja de izquierda a derecha a través de agua a una profundidad d (en pies), como se ilustra en la FIGURA 4.10.4. Un modelo matemático que relaciona la velocidad v de la onda con L y d es

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}.$$

a) Para agua profunda demuestre que $v \approx \sqrt{gL/2\pi}$.

b) Utilice (7) para determinar los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para $f(x) = \tanh x$. Demuestre que cuando d/L es pequeña, $v \approx \sqrt{gd}$. En otras palabras, en agua poco profunda la velocidad de una onda es independiente de la longitud de la onda.

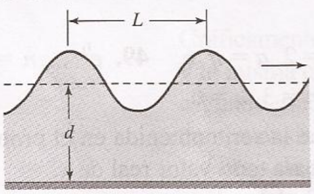


FIGURA 4.10.4 Onda del problema 56

≡ Piense en ello

En los problemas 57 y 58, encuentre dos maneras, aparte de utilizar (7), de determinar la representación de la serie de Maclaurin de la función dada.

57. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

58. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

59. Sin utilizar (6), encuentre la serie de Taylor para la función $f(x) = (x + 1)^2 e^x$ centrada en $a = 1$. [*Sugerencia*: $e^x = e^{x+1-1}$.]

60. Discuta: ¿$f(x) = \cot x$ posee una representación en serie de Maclaurin?

61. Explique por qué resulta lógico que las series de Maclaurin (16) y (17) para cos x y sen x contengan sólo potencias pares de x y sólo potencias impares de x, respectivamente. Después reinspeccione la serie de Maclaurin en (18), (19) y (20) y comente.

62. Suponga que se desea calcular $f^{(10)}(0)$ para $f(x) = x^4 \operatorname{sen} x^2$. Desde luego, podría utilizarse el enfoque de fuerza bruta: recurrir a la regla del producto y cuando se obtenga (a la larga) la décima derivada igualar x a 0. Piense en una manera más hábil de determinar el valor de esta derivada.

≡ Proyectos

63. Un clásico matemático La función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

aparece en casi todo texto de cálculo. La función f es continua y posee derivadas de todos los órdenes en todo valor de x.

a) Emplee una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de f.

b) Emplee (7) para determinar la serie de Maclaurin correspondiente a f. Tendrá que recurrir a la definición de la derivada para calcular $f'(0), f''(0), \ldots$ Por ejemplo,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}.$$

Podría ser de utilidad utilizar $t = \Delta x$ y recordar la regla de L'Hôpital. Demuestre que la serie de Maclaurin de f converge para toda x. ¿La serie representa a la función f que la generó?

4.11 Serie del binomio

Introducción La mayoría de los estudiantes de matemáticas están familiarizados con la expansión binomial en los dos casos:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

En general, si m es un entero positivo, entonces

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots + mx^{m-1} + x^m. \quad (1)$$

La expansión de $(1 + x)^m$ en (1) se denomina **teorema del binomio**. Utilizando la notación de sumatoria, (1) se escribe

$$(1 + x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k, \quad (2)$$

donde el símbolo $\binom{m}{k}$ se define como

$$\underbrace{\binom{m}{0} = 1}_{\text{por conveniencia este término se define como 1}}, \quad k = 0 \quad \text{y} \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots\overbrace{(m-k+1)}^{(m-k+1)=(m-(k-1))}}{k!}, \quad k \geq 1.$$

Estos números se llaman **coeficientes binomiales**. Por ejemplo, cuando $m = 3$, los cuatro coeficientes binomiales son

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = \frac{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = \frac{3(3-1)(3-2)}{6} = 1.$$

Si bien (2) tiene la apariencia de una serie, es una suma finita consistente en $m + 1$ términos que finalizan con x^m. En esta sección se verá que cuando (1) se extiende a potencias m que no son enteros positivos, el resultado es una serie infinita.

Isaac Newton fue el primero que dio en 1665 la extensión del **teorema del binomio** (m un entero positivo) a la **serie del binomio** (m fraccionario y números reales negativos).

Serie del binomio Suponga ahora que $f(x) = (1 + x)^r$, donde r representa cualquier número real. De

$$\begin{array}{l|l}
f(x) = (1+x)^r & f(0) = 1 \\
f'(x) = r(1+x)^{r-1} & f'(0) = r \\
f''(x) = r(r-1)(1+x)^{r-2} & f''(0) = r(r-1) \\
f'''(x) = r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-3} & f'''(0) = r(r-1)(r-2) \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
f^{(n)}(x) = r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n} & f^{(n)}(0) = r(r-1)\cdots(r-n+1)
\end{array}$$

advertimos que la serie de Maclaurin generada por f es

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k. \qquad (3)
\end{aligned}$$

La serie de potencias dada en (3) se denomina **serie del binomio**. Advierta que (3) termina sólo cuando r es un entero positivo; en este caso, (3) se reduce a (1). De acuerdo con la prueba de las proporciones, la versión dada en el teorema 4.7.4,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)(r-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{r(r-1)\cdots(r-n+1)x^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|r-n|}{n+1}|x| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{r}{n} - 1\right|}{1 + \dfrac{1}{n}}|x| = |x|
\end{aligned}$$

concluimos que la serie del binomio (3) converge para $|x| < 1$ o $-1 < x < 1$ y diverge para $|x| > 1$, esto es, para $x > 1$ o $x < -1$. La convergencia en los puntos extremos $x = \pm 1$ depende del valor de r.

Desde luego no es una gran sorpresa aprender que la serie (3) representa la función f que la generó. Se enuncia esto como un teorema formal.

Teorema 4.11.1 Serie del binomio

Si $|x| < 1$, entonces para cualquier número real r,

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k, \tag{4}$$

donde

$$\binom{r}{0} = 1, k = 0 \quad \text{y} \quad \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1.$$

EJEMPLO 1 Representación de una función mediante una serie del binomio

Encuentre una representación en serie de potencias para $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Solución Reescribiendo f como $f(x) = (1+x)^{1/2}$ identificamos $r = \frac{1}{2}$. Después se deduce de (4) que para $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 2!}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + \cdots.\end{aligned}$$

La última línea se escribe utilizando la notación de sumatoria como

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)}{2^k k!}x^k. \qquad ■$$

Suponga que la función en el ejemplo 1 ha sido $f(x) = \sqrt{4+x}$. Para obtener la representación en serie del binomio de f tendríamos que reescribir la función en la forma $(1+x)^r$ factorizando el 4 fuera del radical, esto es,

$$f(x) = \sqrt{4+x} = \sqrt{4}\left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{1/2} = 2\left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{1/2}.$$

Ahora es posible emplear (4) en la cual el símbolo x es sustituido por $x/4$. La serie resultante convergería entonces para $|x/4| < 1$ o $|x| < 4$.

EJEMPLO 2 Una fórmula de la física

En la teoría de la relatividad de Einstein, la masa de una partícula que se mueve a una velocidad v relativa a un observador está dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{5}$$

donde m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz.

Muchos de los resultados de la física clásica no se cumplen para partículas, tales como electrones, los cuales se mueven a una velocidad cercana a la de la luz. La energía cinética ya no es $K = \frac{1}{2}m_0 v^2$ sino

$$K = mc^2 - m_0 c^2. \tag{6}$$

Si identificamos $r = -\frac{1}{2}$ y $x = -v^2/c^2$ en (5), tenemos $|x| < 1$, ya que ninguna partícula puede superar la velocidad de la luz. En consecuencia, (6) puede escribirse:

$$\begin{aligned}K &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1+x}} - m_0 c^2 \\ &= m_0 c^2\left[(1+x)^{-1/2} - 1\right]\end{aligned}$$

$$= m_0c^2\left[\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots\right) - 1\right] \leftarrow \text{ahora se sustituye el valor por } x$$

$$= m_0c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) + \frac{5}{16}\left(\frac{v^6}{c^6}\right) + \cdots\right]. \qquad (7)$$

En el mundo cotidiano donde v es mucho más pequeña que c, son ignorables los términos más allá del primero en (7). Esto conduce al resultado clásico bien conocido

$$K \approx m_0c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \frac{1}{2}m_0v^2. \quad ■$$

∑ NOTAS DESDE EL AULA

Al llegar al final de la discusión de series infinitas es probable que el lector tenga la fuerte impresión de que las series divergentes son inútiles. Nada de eso. Los matemáticos odian que algo se desperdicie. Las series divergentes se usan en una teoría conocida como *representaciones asintóticas de funciones*. Ocurre algo como lo siguiente; una serie divergente de la forma

$$a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \cdots$$

es una **representación asintótica de la función** f si

$$\lim_{n\to\infty} x^n[f(x) - S_n(x)] = 0,$$

donde $S_n(x)$ es la suma parcial $(n + 1)$ de la serie divergente. Algunas funciones importantes en matemáticas aplicadas se definen de esta manera.

4.11 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-11.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, recurra a (4) para determinar los primeros cuatro términos de una representación en serie de potencias de la función dada. Indique el radio de convergencia.

1. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$

2. $f(x) = \sqrt{1 - x}$

3. $f(x) = \sqrt{9 - x}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 5x}}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$

7. $f(x) = (4 + x)^{3/2}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(1 + x)^5}}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{(2 + x)^2}$

10. $f(x) = x^2(1 - x^2)^{-3}$

En los problemas 11 y 12, explique por qué el error en la aproximación dada es menor que la cantidad indicada. [*Sugerencia*: Revise el teorema 4.7.2.]

11. $(1 + x)^{1/3} \approx 1 + \dfrac{x}{3};\quad \dfrac{1}{9}x^2,\ x > 0$

12. $(1 + x^2)^{-1/2} \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{8}x^4;\quad \dfrac{5}{16}x^6$

13. Encuentre una representación en serie de potencias para $\operatorname{sen}^{-1} x$ utilizando

$$\operatorname{sen}^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt.$$

14. *a*) Demuestre que la longitud de un cuarto de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ está dada por $L = aE(k)$, donde $E(k)$ es

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta$$

y $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 < 1$. Esta integral recibe el nombre de **integral elíptica completa del segundo tipo**.

b) Demuestre que

$$L = a\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\frac{\pi}{4}k^2 - \frac{a}{8}\frac{3\pi}{16}k^4 - \cdots.$$

15. En la FIGURA 4.11.1 un cable colgante está sostenido en los puntos A y B y soporta una carga distribuida uniformemente (tal como el piso de un puente). Si $y = (4d/l^2)x^2$ es la ecuación del cable, demuestre que su longitud está dada por

$$s = l + \frac{8d^2}{3l} - \frac{32d^4}{5l^3} + \cdots.$$

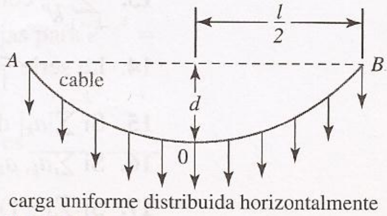


FIGURA 4.11.1 Cable colgante del problema 15

16. Aproxime las siguientes integrales hasta tres lugares decimales.

a) $\displaystyle\int_0^{0.2} \sqrt{1 + x^3}\, dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1 + x^4}\, dx$

17. Por la ley de los cosenos, el potencial en el punto A en la FIGURA 4.11.2 debido a una carga unitaria en el punto B es $1/R = (1 - 2xr + r^2)^{-1/2}$, donde $x = \cos\theta$. La expresión $(1 - 2xr + r^2)^{-1/2}$ se dice que es la **función generadora** de los **polinomios de Legendre** $P_k(x)$, puesto que

$$(1 - 2xr + r^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) r^k.$$

Recurra a (4) para determinar $P_0(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$.

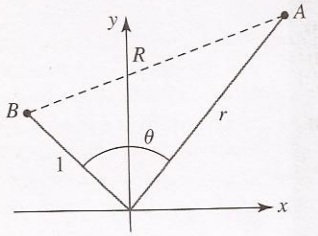


FIGURA 4.11.2 Carga unitaria en el punto B del problema 17

18. *a*) Suponga que

$$f(x) = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

para $|x| < 1$. Determine $f'(x)$ y $xf'(x)$.

b) Muestre que

$$(n+1)\frac{r(r-1)\cdots(r-n)}{(n+1)!} + n\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} = r\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$

c) Demuestre que $f'(x) + xf'(x) = rf(x)$.

d) Resuelva la ecuación diferencial de primer orden

$$(1 + x)f'(x) = rf(x)$$

sujeta a $f(0) = 1$.

En los problemas 19 y 20, emplee (4) para determinar la representación en serie de potencias en $x - 1$ de la función dada. [*Sugerencia*: $1 + x = 2 + (x - 1)$.]

19. $f(x) = \sqrt{1 + x}$ **20.** $f(x) = (1 + x)^{-2}$

Competencia final de la unidad 4

Las respuestas de problemas impares comienzan en la página RES-11.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-30, indique si el enunciado es verdadero (V) o falso (F).

1. La sucesión $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{2n+1}\right\}$ converge. _____

2. Toda sucesión acotada converge. _____

3. Si una sucesión es no monótona, es no convergente. _____

4. La sucesión $\left\{\dfrac{10^n}{2^{n^2}}\right\}$ es no monótona. _____

5. Si $a_n \le B$ para todo n y $a_{n+1}/a_n \ge 1$ para todo n, entonces $\{a_n\}$ converge. _____

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ para todo valor de x. _____

7. Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, entonces $\sum a_k$ siempre converge. _____

8. $0.999999\ldots = 1$ _____

9. Si $\sum a_k = \frac{3}{2}$, entonces $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. _____

10. Si $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\sum a_k$ converge. _____

11. Si $\sum a_k^2$ converge, entonces $\sum a_k$ converge. _____

12. Si $\sum a_k$ converge y $\sum b_k$ diverge, entonces $\sum (a_k + b_k)$ diverge. _____

13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge para $p = 1.0001$. _____

14. La serie $\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \cdots$ diverge. _____

15. Si $\sum |a_k|$ diverge, entonces $\sum a_k$ diverge. _____

16. Si $\sum a_k$, $a_k > 0$, converge, entonces $\sum (-1)^{k+1} a_k$ converge. _____

17. Si $\sum (-1)^{k+1} a_k$ converge absolutamente, entonces $\sum (-1)^{k+1} \dfrac{a_k}{k}$ converge. _____

18. Si $\sum b_k$ converge y $a_k \geq b_k$ para todo entero positivo k, entonces $\sum a_k$ converge. _____

19. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ entonces $\sum a_k$ converge absolutamente. _____

20. Toda serie de potencias tiene un radio de convergencia diferente de cero. _____

21. Una serie de potencias converge absolutamente en todo número x en su intervalo de convergencia. _____

22. Una serie de potencias $\sum c_k x^k$ con un intervalo de convergencia $[-R, R]$, $R > 0$, es una función infinitamente diferenciable dentro de $(-R, R)$. _____

23. Si una serie de potencias $\sum c_k x^k$ converge para $-1 < x < 1$ y es convergente en $x = 1$, entonces la serie también debe converger en $x = -1$. _____

24. Si la serie de potencias $\sum a_k x^k$, $a_k > 0$, tiene el intervalo de convergencia $[-R, R)$, $R > 0$, entonces la serie converge condicionalmente, pero no absolutamente, en $x = -R$. _____

25. Puesto que $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}$ también converge a 1. _____

26. La serie $1 + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{6^2} - - + + \cdots$ converge. _____

27. $f(x) = \ln x$ no puede representarse mediante una serie de Maclaurin. _____

28. Si la serie de potencias $\sum c_k (x - 4)^k$ diverge en $x = 7$, la serie diverge necesariamente en $x = 9$. _____

29. Si la sucesión $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ converge a 10, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 10$. _____

30. Si $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} x^{2k-1}$ es la serie de Maclaurin de una función f, entonces $f^{(4)}(0) = 0$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-12, llene los espacios en blanco.

1. Si $\{a_n\}$ converge a 4 y $\{b_n\}$ converge a 5, entonces $\{a_n b_n\}$ converge a __________, $\{a_n + b_n\}$ converge a __________, $\{a_n/b_n\}$ converge a __________ y $\{a_n^2\}$ converge a __________.

2. La sucesión $\{\tan^{-1} n\}$ converge a __________.

3. Para aproximar la suma de la serie alternante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{10^k}$ a cuatro lugares decimales, sólo se necesita utilizar la suma parcial _____-ésima.

4. La suma de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 4\left(\tfrac{2}{3}\right)^k$ es __________.

5. Si n es un entero, $1 \leq n \leq 9$, entonces $0.nnn\ldots =$ __________ y por ello como un cociente de enteros, $2.444444\ldots =$ __________.

6. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} [\tan^{-1} k - \tan^{-1}(k+1)]$ converge a __________.

7. La serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ representa a la función $f(x)$ __________ para toda x.

8. La representación de la serie del binomio de $f(x) = (4 + x)^{1/2}$ tiene el radio de convergencia __________.

9. La serie geométrica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{x}\right)^{k-1}$ converge para los siguientes valores de x: __________.

10. Si $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ para todos los números reales x, entonces una serie de potencias para $e^{-x^3} =$ __________.

11. El intervalo de convergencia de la serie de potencias $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$ es __________.

12. Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 8 - 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k =$ __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-12, determine si la serie dada converge o diverge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2+1)^2}$ **2.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^{-k}}$ **3.** $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^{-k}$ **4.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2.5)^k}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}\ln k}{k^4+4}$ **6.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^{3/2}}$ **7.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\sqrt[3]{k^6-4k}}$ **8.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{\sqrt{k}}$ **10.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2)!}{(k!)^2}$ **11.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^2+4k+6}$ **12.** $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3k}{k+1}\right)$

En los problemas 13 y 14, encuentre la suma de la serie convergente dada.

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}+3}{(1.01)^{k-1}}$ **14.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+11k+30}$

En los problemas 15-18, encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada.

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}x^k$ **16.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k}(2x-1)^k$ **17.** $\sum_{k=1}^{\infty} k!(x+5)^k$ **18.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2x)^k}{\ln k}$

19. Encuentre el radio de convergencia para la serie de potencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4k-1)}x^k.$$

20. Encuentre el valor de x para el cual $\sum_{k=1}^{\infty}(\cos x)^k$ converge.

21. Para $|\alpha| > 1$, encuentre la suma de la serie

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}+\cdots.$$

22. Determine si el siguiente argumento es válido. Si

$$S = 1+2+4+8+\cdots, \quad \text{entonces} \quad 2S = 2+4+8+\cdots = S-1.$$

Al resolver $2S = S-1$ produce $S = -1$.

En los problemas 23-26, determine por cualquier método los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función indicada.

23. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}}$ **24.** $f(x) = \frac{x}{2-x}$ **25.** $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ **26.** $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$

27. Encuentre la serie de Taylor para $f(x) = \cos x$ con centro en $a = \pi/2$.

28. Demuestre que la serie del problema 25 representa a la función demostrando que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

29. Una gran convención de matemáticos con gastos pagados aporta 3 millones a la economía de la ciudad de San Francisco. Se estima que cada residente de la ciudad gasta $\frac{2}{3}$ de su ingreso en la ciudad. De modo tal que la cantidad recaudada en la convención, $3(\frac{2}{3}) = \$2$ millones, los gastan las personas de San Francisco en la ciudad. De esta última cantidad, $\frac{2}{3}$ se gasta en la ciudad, y así en lo sucesivo. A largo plazo, ¿cuánto gastan los residentes de San Francisco en su ciudad como resultado de la convención?

30. Si se invierten P dólares a una tasa anual r de interés compuesto anualmente, el rendimiento S después de m años es $S = (1+r)^m$. La **regla del 70**, que usan a menudo los agentes de préstamos y los analistas de acciones, dice que el tiempo que se requiere para duplicar una inversión ganando una tasa de interés r es aproximadamente $70/(100r)$ años. Por ejemplo, el dinero invertido a una tasa anual de 5% requiere aproximadamente $79/100(0.05) = 14$ años para duplicarse.

a) Muestre que el verdadero tiempo de duplicación es $\ln 2/\ln(1+r)$.

b) Utilice la serie de Maclaurin para $\ln(1+r)$ con el fin de deducir la regla del 70.

c) Use los primeros tres términos de la serie de Maclaurin para $\ln(1+r)$ con el fin de aproximar esa tasa de interés para la cual la regla del 70 produce el verdadero tiempo de duplicación.